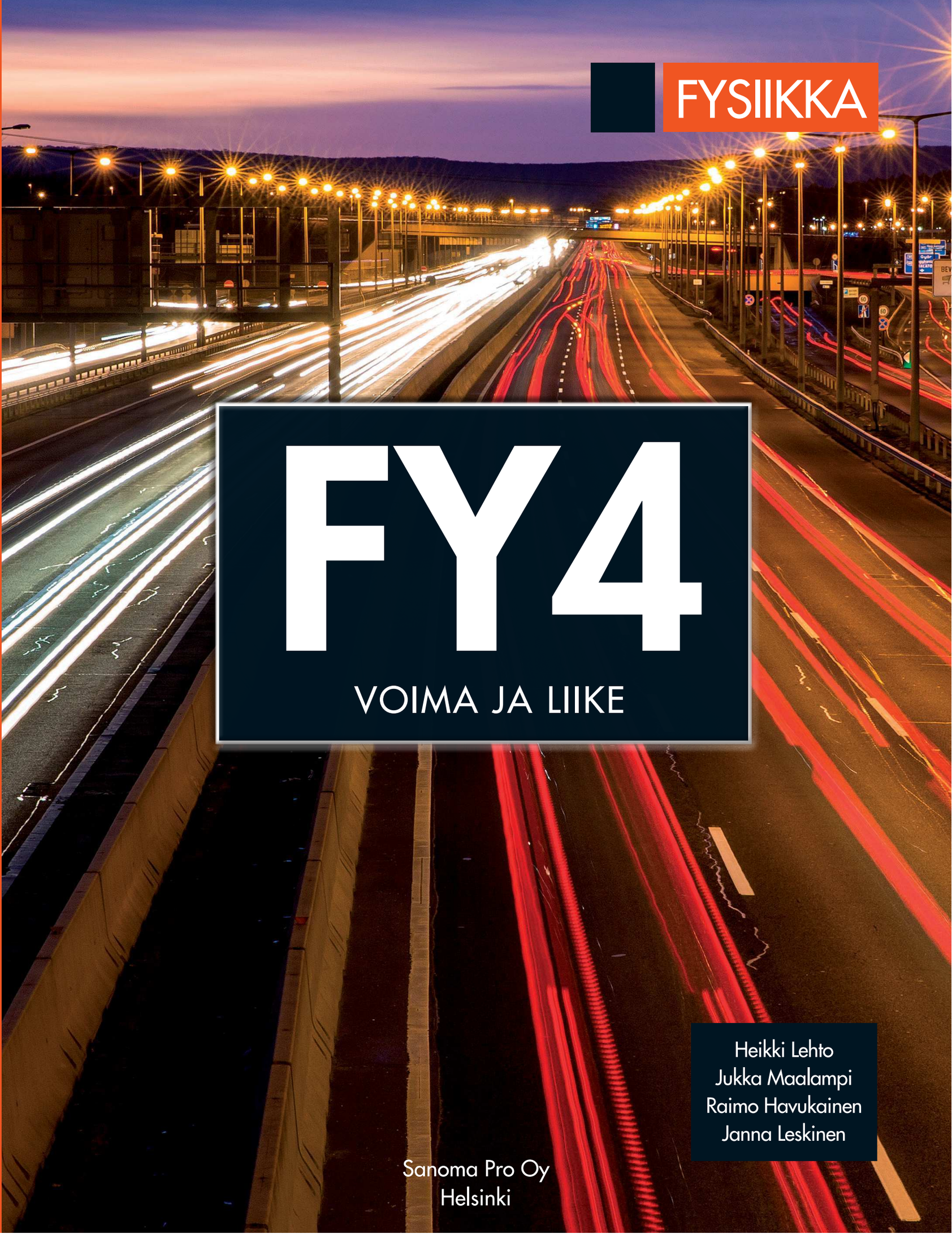


FYSIIKKA

FY4

VOIMA JA LIIKE

Heikki Lehto
Jukka Maalampi
Raimo Havukainen
Janna Leskinen

Sanoma Pro Oy
Helsinki

Tiedustelut
Sanoma Pro Oy, Helsinki
puh. 020 391 000
sähköposti: asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy
10.–11. painos, 2017

ISBN 978-952-63-3515-5

Toimitus: Johanna Patokoski
Kuvatoimitus: Nina Tuittu
Ulkoasu: Sari Jeskanen
Taitto: Tarja Heikkilä / Cosmograf
Piirroskuvitus: Pertti Heikkilä / Cosmograf,
Pekka Könönen / Picman Oy, Eila Sinivuori,
Mirja Nuutinen
Valokuvat: ks. s. 173

© Heikki Lehto, Jukka Maalampi,
Raimo Havukainen, Janna Leskinen ja
Sanoma Pro Oy

Kopiointiehdot

Tämä teos on oppikirja, joka on suojattu
tekijänoikeuslailla (404/61).

Tämän teoksen tai sen osan valokopiointi,
skannaaminen tai muu digitaalinen kopiointi
tai käyttö edellyttää oikeudenomistajan luvan.

Kopiosto ry myöntää teosten osittaiseen
kopiointiin lupia. Tarkistakaa, mitkä
valokopiointi- ja digiluvat ovat kohdallanne
voimassa. Lisätietoja luvista www.kopiosto.fi

Teoksen tai sen osan muuntelu on kielletty.

Opettajalle ja opiskelijalle

Fysiikka 4 sisältää lukiofysiikan kolmannella syventävällä kurssilla opiskeltavat asiat. Kirjan pääotsikot ovat Suoraviivainen liike, Voima, Energia ja Törmäys.

Kirja opettaa liikkeeseen liittyvät perusilmiöt ja käsitteet ja antaa opiskelijalle valmiudet käyttää voiman ja liikkeen käsitteitä jokapäiväisen elämän, ympäristön, yhteiskunnan ja teknologian ilmiöissä. Opiskelija myös oppii ymmärtämään säilymislakien merkityksen fysiikassa.

Kirja koostuu kuudestatoista luvusta, joista kukin sisältää yhden 75 minuutin oppitunnin aiheet. Fysiikan kokeellinen luonne on niissä vahvasti esillä. Kirjassa on runsaasti yksinkertaisin välinein toteutettavia tutkimuksia ja tietokoneavusteisia mittauksia, joiden avulla opiskelija oppii tutkimaan voimaan ja liikkeeseen liittyviä ilmiöitä. Oppimista tuetaan tekstiä ja tehtäviä täydentävillä ja syventävillä sähköisillä rikasteilla, kuten videoilla, simulaatioilla ja lisätietoa sisältävillä artikkeleilla.

Kirjassa on myös monentyyppisiä oppimista tukevia tehtäviä ja testejä. On perinteisiä tehtäviä, mittausohjelmilla ratkaistavia tehtäviä, videotehtäviä, itsearviointiin tarkoitettuja Testaa, osaatko -tehtäviä ja kertaustehtäviä. Kirjaan liittyy oheismateriaalina monipuolinen kokoelma mobiilitehtäviä ja testejä.

Mittausohjelmien käyttöä vaativat ja videoihin liittyvät tehtävät valmentavat sähköisiin ylioppilaskirjoituksiin. Kirjan tehtäviä tehdessään opiskelija harjaantuu graafisten esitysten tekemiseen ja tuottamiseen. Fysiikka 4 tukee myös viestintäteknologian käyttöön harjaantumista, sillä monissa tutkimustehtävissä laaditaan raportteja ja mittaustapahtumia taltioidaan kuvin ja videoin. Opettajan apuna on koetyökalu, jossa on valmista materiaalia kokeiden laatimiseen.

Innostusta ja menestystä fysiikan opiskeluun!

Tammikuussa 2017

Heikki Lehto, Jukka Maalampi, Raimo Havukainen ja Janna Leskinen

Sisällys

SUORAVIIVAINEN LIIKE

Liike ja sen muutoksen syyt 6
1 Tasainen liike 8
2 Muuttuva suoraviivainen liike 16
3 Liikkeen tutkiminen 24
Tiivistelmä 34
Testaa, osaatko 35

VOIMA

Newton ja Principia 36
4 Vuorovaikutus ja voima 38
5 Newtonin I ja II laki 48
6 Voimien yhteisvaikutus 58
7 Kitka..... 66
8 Noste ja väliaineen vastus 76
9 Voiman momentti..... 84
10 Jäykän kappaleen tasapaino 92
Tiivistelmä..... 100
Testaa, osaatko..... 101

ENERGIA

Energiaa tuulesta ja vedestä 102
11 Työ 104
12 Liike-energia 112
13 Potentiaalienergia 120
14 Mekaanisen energian säilyminen 128
Tiivistelmä 136
Testaa, osaatko 137

TÖRMÄYS

Liikenneturvallisuus paremmaksi fysiikan avulla 138
15 Impulssi ja liikemäärä 140
16 Liikemäärän säilyminen 148
Tiivistelmä 158
Testaa, osaatko 159

LIITTEET

Kertaustehtävät 160
Vastauksia 170
Valokuvien oikeudet 173
Hakemisto 175

Liike ja sen muutoksen syyt

Jokaisen meistä on hyvä tietää liikkeen lainalaisuudet, jotka vaikuttavat turvalliseen liikkumiseen.

$$v = v_0 + at$$
$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Fysiikassa selitetään luonnossa esiintyviä liikkeitä ja esitetään liikkeissä vallitsevat säännönmukaisuudet matemaattisina malleina.

Vuorovaikutukset määräävät vesipisaran liikeradan muodon.

Curlingkiven liikettä voi mallintaa yksiulotteisena liikkeenä.

Liikkeellä tarkoitetaan fysiikassa kappaleen paikan muuttumista ajan kuluessa. Liikkeeseen liittyviä käsitteitä ovat aika, paikka, siirtymä, nopeus, vauhti ja kiihtyvyys. Liikettä tarkasteltaessa on usein merkitystä myös liikkeen suunnalla. Siirtymällä, nopeudella ja kiihtyvyydellä on sekä suuruus että suunta; ne ovat vektorisuureita.

Liike voi olla tasaista tai muuttuvaa. Tasaisessa suoraviivaisessa liikkeessä kappaleen nopeus pysyy sekä suuruudeltaan että suunnaltaan muuttumattomana.

Muuttuvassa liikkeessä muuttuu nopeuden suuruus tai suunta tai molemmat. Liikettä ja sen muutoksia tutkivaa fysiikan osaa kutsutaan mekaniikaksi. Mekaniikka muodostaa fysiikan perustan, ja koko nykyaikaisen fysiikan alkuna voidaan pitää Galileo Galilein ja Isaac Newtonin mekaniikkaa koskevia tutkimuksia.

Liike voi olla yksi-, kaksi- tai kolmiulotteista. Suoraan eteenpäin ajavan pyöräilijän liikettä voidaan mallintaa yksiulotteisena liikkeenä. Tietokoneen hiiren liike pöydän pinnalla on kaksiulotteista liikettä. Kärpäsen lento huoneessa on puolestaan kolmiulotteista liikettä. Yksiulotteista liikettä kutsutaan myös suoraviivaiseksi liikkeeksi. Tässä kirjassa tarkastellaan pääasiassa suoraviivaista liikettä.

Lepokitka on skootteria kiihdyttävä voima.

Ilmanvastus vastustaa moottoripyörän liikettä.

Kappaleiden liikkeen muutokset aiheutuvat vuorovaikutuksesta. Kun tennispallo osuu mailaan, vaikuttaa maila palloon ja pallo mailaan.

Satelliitit liikkuvat Maata kiertävällä radalla gravitaatiovuorovaikutuksen takia.

Kaikki kappaleiden liikkeen muutokset aiheutuvat vuorovaikutuksesta. Kappaleen liikkeen muuttumiseen tarvitaan aina kappaleeseen vaikuttava voima. Kappaleen tulee siis olla vuorovaikutuksessa jonkin toisen kappaleen kanssa, jotta sen liike muuttuisi.

Kun kaksi kappaletta on vuorovaikutuksessa keskenään, molemmissa kappaleissa havaitaan vaikutus samanaikaisesti. Vuorovaikutus ilmenee niin, että molempiin kappaleisiin vaikuttaa voima. Voimat ovat yhtä suuret ja vastakkaissuuntaiset.

Kappale on yleensä yhtä aikaa vuorovaikutuksessa usean eri kappaleen kanssa. Esimerkiksi kadulla etenevään moottoripyörään vaikuttavat pyörään kohdistuva paino, tien pinnan tukivoima, renkaiden ja tienpinnan välinen kitka sekä ilmanvastus ja renkaiden vierimisvastus. Moottoripyörän liikkeen muuttuminen riippuu kaikista edellä mainituista voimista eli moottoripyörään vaikuttavasta kokonaisvoimasta.

On mahdollista, että eri vuorovaikutuksiin liittyvät voimat kumoavat toisensa. Silloin kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoima on nolla ja kappale on paikallaan tai liikkuu vakionopeudella.

1 Tasainen liike

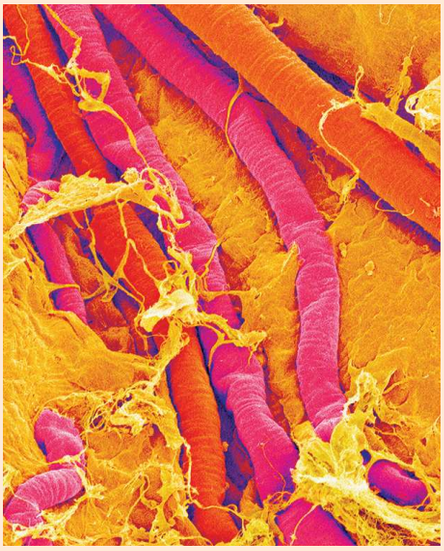
! Keskeisiä asioita

- **suoraviivainen liike**
- **liikkeen suunta**
- **siirtymä, matka, paikka**
- **nopeus**

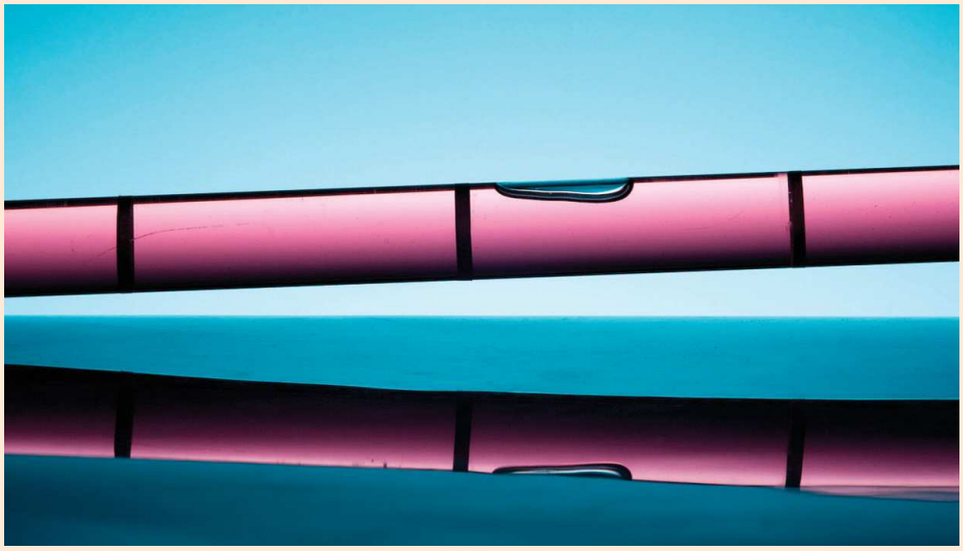
T Tutki

Ilmakuplan liike lasiputkessa

Tutki ilmakuplan liikettä kaltevassa asennossa olevassa lasiputkessa. Määritä ilmakuplan nopeus. Käytä kahta eri kaltevuuskulmaa.



Sydänlihaksen liike on jaksollisesti toistuvaa värähdysliikettä. Veren virtaus suorissa verisuonissa on likimain tasaista liikettä. Kuvassa on aivojen verisuonia; valtimot ja laskimot on värjätty erivärisiksi.



Fysiikan ensimmäisellä kurssilla puhuttiin vauhdista ja nopeudesta. Kaarreajo on esimerkki tilanteesta, jossa vauhti voi olla vakio mutta nopeus ei. Mikä on vauhdin ja nopeuden ero?

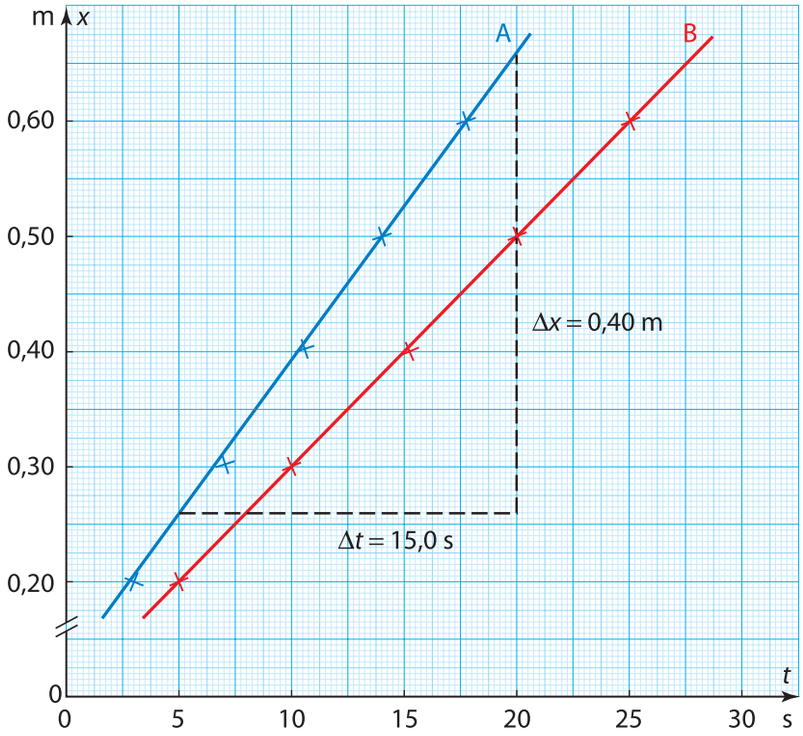
!

Kertaa Fysiikka 1, s. 53–54.

Tasainen suoraviivainen liike

Tutkimuksessa mitattiin suoraviivaisesti yläviistoon liikkuneen ilmakuplan paikkaa ajan funktiona. Mittaustulokset siirrettiin *t*,*x*-koordinaatistoon. Koska mittauspisteet asettuvat kumpaakin kaltevuuskulmaa käytettäessä mittaustarkkuuden rajoissa peräkkäin, sovitetaan pistejoukkoihin suorat. Jyrkempi suora kuvaa nopeammin liikkuvan kuplan liikettä.

Suurempi kaltevuuskulma		**Pienempi kaltevuuskulma**	
***x* (m)**	***t* (s)**	***x* (m)**	***t* (s)**
0,20	3,0	0,20	4,9
0,30	7,0	0,30	10,0
0,40	10,5	0,40	15,1
0,50	14,2	0,50	20,0
0,60	17,5	0,60	25,0



Ilmakuplan nopeus saadaan *t*,*x*-koordinaatistosta suoran fysikaalisen kulmakertoimen avulla.

Kupla A:

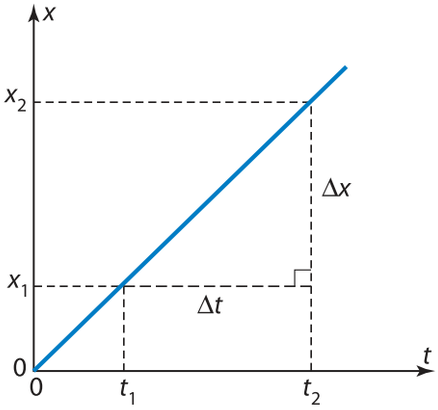
$\Delta x = x_2 - x_1$
$= 0{,}66\ \text{m} - 0{,}26\ \text{m} = 0{,}40\ \text{m}$

$\Delta t = t_2 - t_1$
$= 20{,}0\ \text{s} - 5{,}0\ \text{s} = 15{,}0\ \text{s}.$

Kuvaajasta havaitaan, että ilmakupla on liikkunut yhtä pitkissä aikaväleissä aina yhtä pitkän matkan. Tällaista suoraviivaista liikettä kutsutaan tasaiseksi liikkeeksi. Tasaisessa liikkeessä nopeus on vakio. Tasainen liike on yksinkertaisin liikkeen malli. Täysin tasainen liike on kuitenkin luonnossa harvinaista.

Nopeammin liikkuvan kuplan A nopeus on

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0{,}40\ \text{m}}{15{,}0\ \text{s}} \approx 0{,}027\ \text{m/s}.$$



$\Delta x = x_2 - x_1$
$\Delta t = t_2 - t_1$

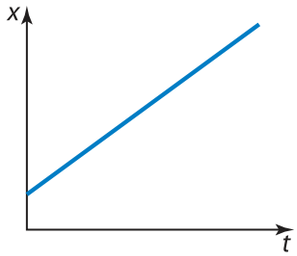
Tasainen suoraviivainen liike

- Suoraviivaista liikettä sanotaan tasaiseksi liikkeeksi, jos kappale etenee samassa ajassa aina yhtä pitkän matkan.
- Tasaisessa liikkeessä kappaleen nopeus on vakio.
- Kappaleen nopeus on $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$, jossa x_1 on kappaleen paikka hetkellä t_1 ja x_2 kappaleen paikka hetkellä t_2.

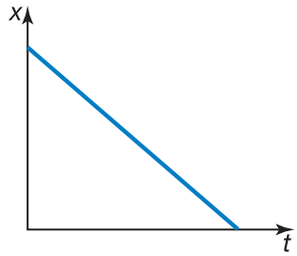
Tasaisen liikkeen kuvaajat

Koska tasaisessa liikkeessä kappaleen nopeus on vakio, kappaleen paikan kuvaaja on nouseva tai laskeva suora. Liikkeen tarkasteluun liittyy aina myös suunta. Nopeus $\overline{v}$ on vektorisuure, eli sillä on sekä suuruus että suunta.

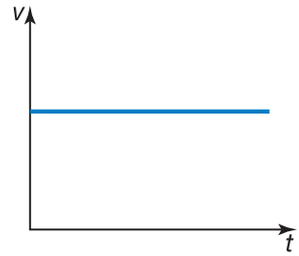
Kun käsitellään **suoraviivaista** liikettä, liikkeen suunta ilmaistaan etumerkillä. Toinen suoraviivaisen liikkeen suunnista valitaan positiiviseksi. Tähän suuntaan etenevän kappaleen nopeus on positiivinen, ja vastakkaiseen suuntaan etenevän kappaleen nopeus on negatiivinen.



Kappaleen paikan kuvaaja, kun kappaleen nopeus on positiivinen.

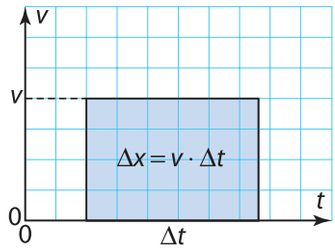


Kappaleen paikan kuvaaja, kun kappaleen nopeus on negatiivinen.

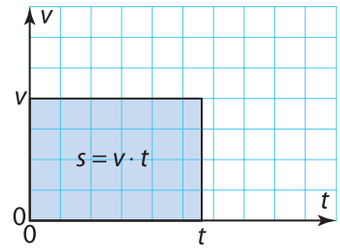


Tasaisen liikkeen nopeuden kuvaaja on *t*-akselin suuntainen.

Tasaisessa liikkeessä olevan kappaleen nopeuden kuvaaja on *t*-akselin suuntainen suora. Kappaleen siirtymä Δx saadaan *t*,*v*-koordinaatistosta **fysikaalisena pinta-alana** (ns. graafinen integrointi). Väritetyn alueen pinta-ala on yhtä suuri kuin kappaleen siirtymä Δx ajassa Δt.



Tasaisessa liikkeessä olevan kappaleen siirtymä on $\Delta x = v\Delta t$.



Tasaisessa liikkeessä olevan kappaleen aikana 0...*t* kulkema matka on $s = vt$.

Oletetaan, että kappaleen liikkeen suunta on positiivisen *x*-akselin suunta. Tällöin tasaisessa suoraviivaisessa liikkeessä kappaleen kulkema matka *s* on sama kuin siirtymä eli $\Delta x = s$. Kappaleen aikana 0...*t* kulkema matka voidaan silloin esittää muodossa $s = vt$.

Kappaleen paikka ja kappaleen kulkema matka

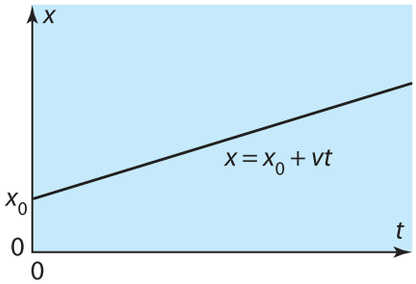
Usein hetki $t_0 = 0$ s valitaan liikkeen alkuhetkeksi.

Tasaisessa liikkeessä olevan kappaleen nopeuden yhtälö voidaan esittää muodossa $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0}$, jossa x on kappaleen paikka hetkellä t ja x_0 paikka hetkellä t_0.

Jos hetki $t_0 = 0$ s, yhtälö saa muodon $v = \frac{x - x_0}{t}$, josta seuraa $x = x_0 + vt$.

Paikka ja kuljettu matka tasaisessa suoraviivaisessa liikkeessä

- Kappaleen paikka hetkellä t on
  $x = x_0 + vt$,
  jossa x_0 on paikka hetkellä $t_0 = 0$ s ja v on kappaleen vakionopeus.
- Kappaleen aikana 0...t kulkema matka on
  $s = vt$,
  jossa v on kappaleen vakionopeus.



Kappaleen rata.

Kappaleen paikkaa ajan funktiona kutsutaan kappaleen **radaksi**. Yksiulotteisessa liikkeessä rataa esittää t,x-koordinaatistoon piirretty paikan kuvaaja. Kun halutaan esittää kappaleen rata, on valittava liikkeelle positiivinen suunta sekä ajalle ja paikalle nollakohta.

Tasaisessa liikkeessä olevan kappaleen radan kuvaaja on suora, jonka yhtälö on $x = x_0 + vt$. Viereisen kuvaajan tilanteessa nopeus v on positiivinen.

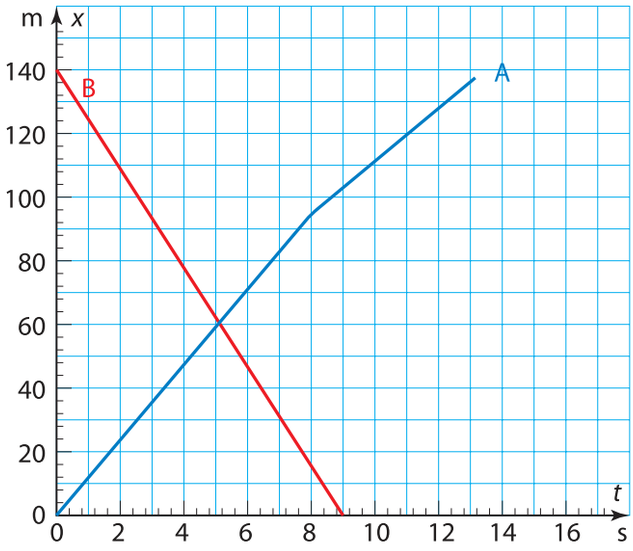
Kun tiedetään, missä paikassa kappale on kullakin hetkellä, voidaan piirtää kappaleen rata.

Kappaleen rata sisältää tiedon paikasta ajan funktiona. Voiko kuvan perusteella määrittää biisonin radan?

E Esimerkki 1

Kumpi olisi fysiikan kannalta oikein, nopeusmittari vai vauhtimittari?

Kuva esittää kahden suoralla tiellä vastakkaisiin suuntiin liikkuvan moottoripyörän paikkaa ajan funktiona. Alussa pyörät ovat 140 m päässä toisistaan.



a) Millä hetkellä pyörät ovat samassa paikassa?
b) Mikä on pyörän B nopeus?
c) Esitä pyörän A liikkeen kuvaaja *t*,*v*-koordinaatistossa ja määritä siitä pyörän 12,0 sekunnissa kulkema matka. Määritä matka myös paikan kuvaajasta. Vertaa saamiasi tuloksia.
d) Laske pyörän B paikka hetkellä 3,5 s.
e) Laske pyörän B 4,0 sekunnissa kulkema matka.

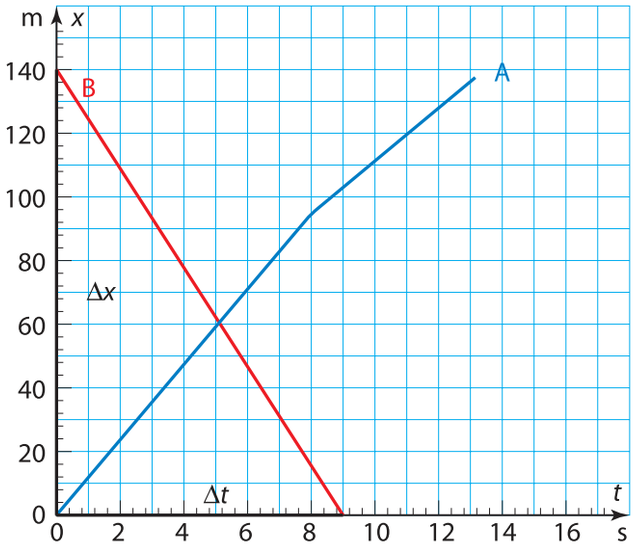
Ratkaisu

a) Moottoripyörät ovat samassa paikassa silloin, kun niiden paikan kuvaajat leikkaavat eli hetkellä $t = 5{,}1$ s.

b) Valitaan pyörän A liikkeen suunta positiiviseksi. Pyörän B nopeus on

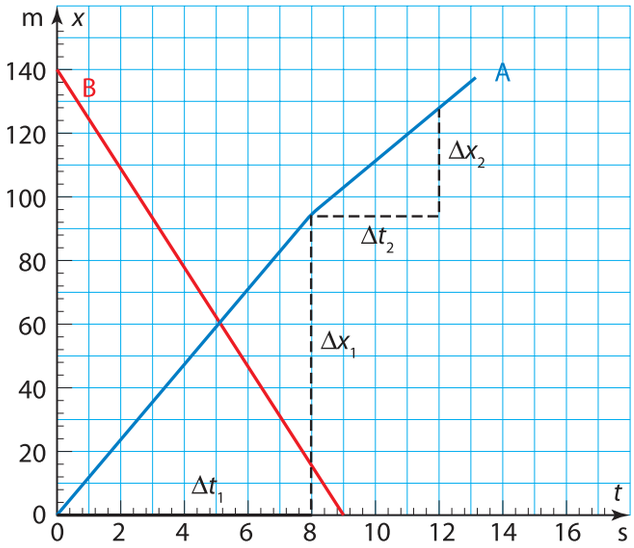
$$v_B = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-140{,}0\ \text{m}}{9{,}0\ \text{s}} = -15{,}5556\ \text{m/s} \approx -16\ \text{m/s}.$$

Pyörä B:
$\Delta x = x_2 - x_1$
$= 0{,}0\ \text{m} - 140{,}0\ \text{m}$
$= -140{,}0\ \text{m}$
$\Delta t = t_2 - t_1$
$= 9{,}0\ \text{s} - 0{,}0\ \text{s} = 9{,}0\ \text{s}.$



c) Pyörän A nopeus aikavälillä 0,0…8,0 s on

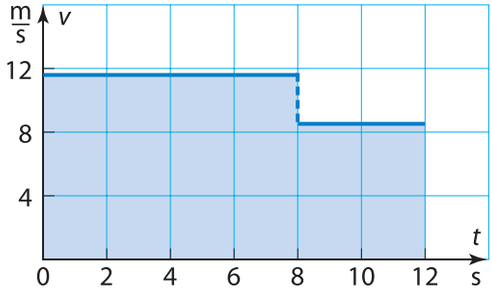
$$v = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{95\text{ m} - 0,0\text{ m}}{8,0\text{ s} - 0,0\text{ s}} = 11,875\text{ m/s}$$



ja aikavälillä 8,0…12,0 s

$$v = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{128\text{ m} - 95\text{ m}}{12,0\text{ s} - 8,0\text{ s}} = \frac{33\text{ m}}{4,0\text{ s}} = 8,25\text{ m/s}.$$

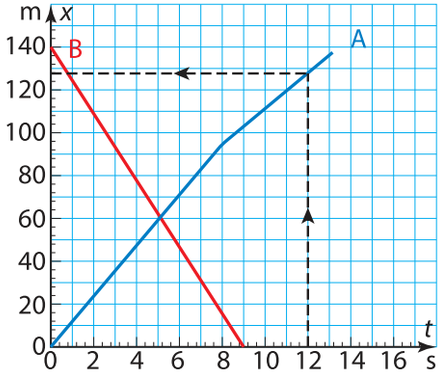
Kuvassa on esitetty moottoripyörän A nopeus ajan funktiona.



Pyörän A 12,0 sekunnissa kulkema matka saadaan nopeuden kuvaajasta fysikaalisena pinta-alana:

$s = 11,875\text{ m/s} \cdot 8,0\text{ s} + 8,25\text{ m/s} \cdot 4,0\text{ s} = 128\text{ m} \approx 130\text{ m}.$

Myös paikan kuvaajasta saadaan matkaksi noin 130 m.



Matka on 130 m.

!

Pyörän paikan saa myös suoraan *t*,*x*-kuvaajasta.

d) Pyörän B paikka hetkellä 3,5 sekuntia on

$x = x_0 + vt = 140\text{ m} + (-15,5556\text{ m/s}) \cdot 3,5\text{ s} \approx 86\text{ m}.$

e) Pyörän B 4,0 sekunnissa kulkema matka on

$s = vt = |-15,5556\text{ m/s}| \cdot 4,0\text{ s} \approx 62\text{ m}.$

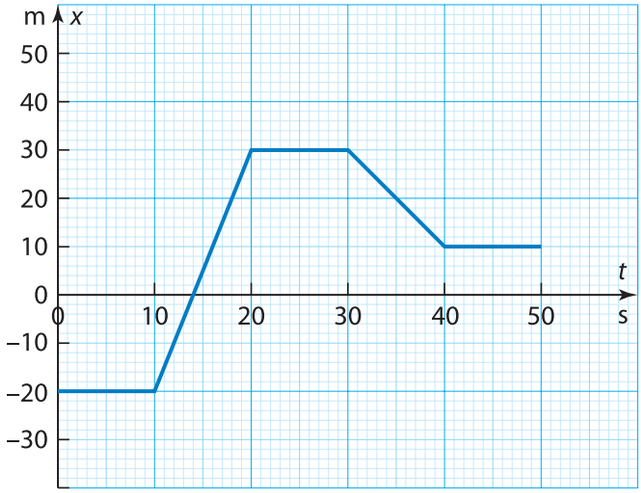
Vastaus

a) 5,1 s **b)** Nopeuden suuruus on 16 m/s, suunta vastakkainen pyörän A nopeudelle. **c)** 130 m **d)** 86 m **e)** 62 m

TEHTÄVÄT

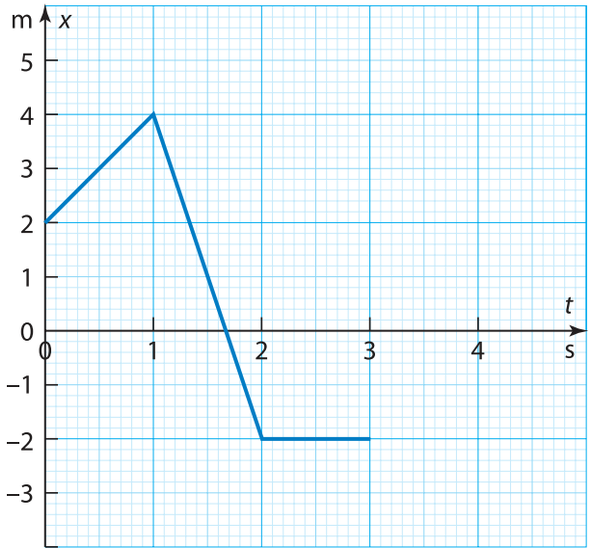
1-1. Kuvassa on esitetty suoraviivaisesti liikkuvan kappaleen paikka ajan funktiona. Positiivinen suunta on kappaleen liikkeen alkusuunta. Milloin

a) kappaleen nopeus on suurin
b) kappale liikkuu hitaimmin
c) kappale on liikkumatta
d) kappaleen nopeus on negatiivinen?

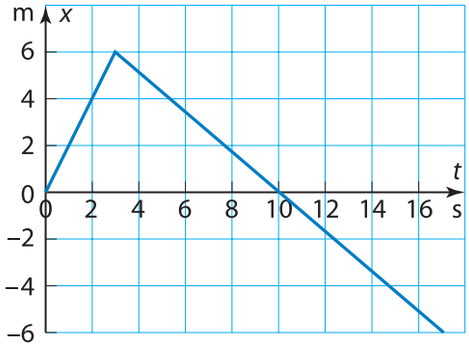


1-2. Kuvaaja esittää suoraviivaisesti liikkuvan kappaleen paikkaa ajan funktiona. Määritä kuvaajan avulla kappaleen

a) siirtymä aikavälillä 0,0…1,0 s
b) nopeus aikavälillä 0,0…1,0 s
c) siirtymä aikavälillä 1,0…2,0 s
d) nopeus aikavälillä 1,0…2,0 s
e) siirtymä aikavälillä 0,0…3,0 s.



1-3. Kauko-ohjattava leikkiauto liikkui suoraviivaisesti lattialla. Kun auton liikettä tutkittiin paikka-anturin avulla, saatiin seuraava, yksinkertaistettu kuvaaja.



a) Kuvaile auton liikettä.
b) Kuinka pitkän matkan auto kulkee aikavälillä 0,0…10,0 s?
c) Määritä auton nopeudet liikkeen eri vaiheissa.
d) Esitä auton liike t,v-koordinaatistossa.

1-4. Kopioi palvelimelta video Ilmakupla. Putkessa olevat merkit ovat 0,10 m välein.

a) Määritä kuplan nopeus.
b) Esitä kuplan nopeuden kuvaaja.

1-5. Valonnopeuden mittauslaite lähettää valopulssin ja vastaanottaa peilistä takaisin heijastuneen pulssin sekä rekisteröi pulssin lähdön ja paluun välisen aikaeron. Kokeessa peilin etäisyyttä (s) mittalaitteesta muutettiin metrin välein ja mitattiin aikaerot (t), jolloin saatiin alla olevan taulukon mukaiset tulokset. Määritä sopivaa graafista esitystä käyttäen valon nopeus näiden mittaustulosten perusteella.

s (m)	10,00	11,00	12,00	13,00	14,00
t (ns)	70	79	84	92	100
s (m)	15,00	16,00			
t (ns)	105	113			

1-6. Emma ajaa polkupyörällä 30 minuuttia vakionopeudella 3,5 m/s, lepää sen jälkeen 10 minuuttia ja ajaa sitten takaisin lähtöpaikkaansa vakionopeudella 3,5 m/s. Piirrä liikkeen kuvaaja
a) t,x-koordinaatistoon
b) t,v-koordinaatistoon.

1-7. Jääpala liikkuu suoraviivaisesti vakionopeudella 1,9 m/s. Jääpalan paikka hetkellä $t_0 = 0$ s on $x_0 = 2{,}3$ m. Mikä on jääpalan paikka hetkellä 4,5 s?

1-8. Robottiauto etenee vakionopeudella. Sen paikka hetkellä $t_0 = 0$ s on $x_0 = 0{,}35$ m. Hetkellä 6,1 s paikka on 8,3 m. Robottiauton nopeus on
a) 1,4 m/s **b)** 1,3 m/s **c)** −1,4 m/s.

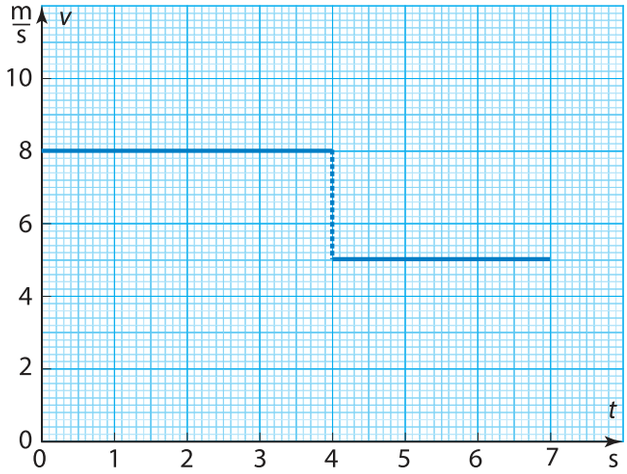
1-9. Pesäpallo voi saada sitä lyötäessä nopeuden 150 km/h. Kuinka kaukana lyöjästä siepparin on vähintään oltava, jotta hän ehtisi reagoida häntä kohti tulevaan palloon? Ihmisen reaktioaika näköhavainnon jälkeen on noin 0,20 s. Ilmanvastusta ei tarvitse huomioida.

1-10. Keilapallo liikkuu vakionopeudella 16,5 m:n pituista keilarataa pitkin ja osuu radan päässä oleviin keiloihin. Keilaaja kuulee osumaäänen 2,4 s heittonsa jälkeen. Laske keilapallon nopeus. Äänen nopeus ilmassa on 340 m/s.

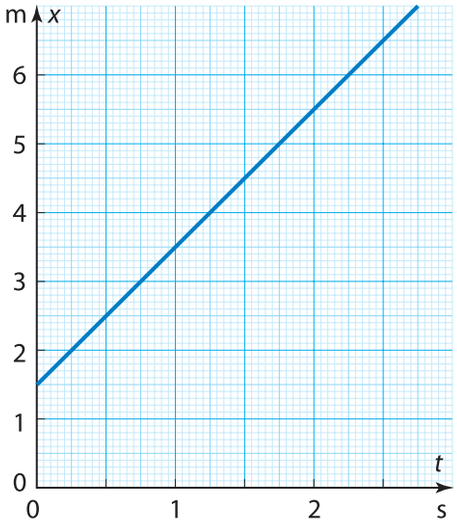
1-11. Sini lähtee kävelemään suoraa tietä pitkin vakionopeudella 5,0 km/h. Sinin ystävä Joni lähtee samalla hetkellä 1,0 km:n päästä Siniä vastaan polkupyörällä vakionopeudella 15 km/h.
a) Piirrä Sinin ja Jonin radat samaan t,x-koordinaatistoon.
b) Määritä kuvaajista, missä kohdassa ja kuinka pitkän ajan kuluttua lähdöstä Sini ja Joni kohtaavat.

1-12. Kappaleen liikettä tutkittiin paikka-anturin avulla sekunnin ajan. Tutki, onko kappaleen liike tasaista. Myönteisessä tapauksessa määritä kappaleen nopeus. Kopioi mittaustulokset palvelimelta.

1-13. Kuvaaja esittää kappaleen nopeuden kuvaajaa. Piirrä kuvaajan avulla kappaleen rata, kun hetkellä 0 s kappaleen paikka on 5,0 s.



1-14. Kuvaaja esittää kappaleen paikan riippuvuutta ajasta.



a) Esitä yhtälönä kappaleen paikan riippuvuus ajasta.
b) Esitä kappaleen nopeuden kuvaaja ja laske sen avulla kappaleen siirtymä aikavälillä 0…2,5 s.

2 Muuttuva suoraviivainen liike

! Keskeisiä asioita

- **kiihtyvyys**
- **tasaisesti kiihtyvä liike**
- **paikka**
- **keskinopeus tasaisesti muuttuvassa liikkeessä**

T Tutki

Kiihtyvyys

Aseta vaunu kaltevalle vaunuradalle. Päästä vaunu liikkeelle ilman alkunopeutta ja mittaa sen paikkaa paikka-anturilla. Kasvata radan kaltevuuskulmaa ja toista koe. Tutki paikan kuvaajia. Mitä voit päätellä kuvaajista?

Millaista kappaleen liike voi olla oheisissa kuvissa? Pohdi eri vaihtoehtoja. Perustele.
Mitä tarkoittaa, jos kappaleen kiihtyvyys on $-1{,}5\ \mathrm{m/s^2}$?

Hissi on liikkuessaan myös muuttuvassa suoraviivaisessa liikkeessä.

Tasaisesti kiihtyvä liike

Kun kappaleen liike on kiihtyvää, voidaan tarkoittaa, että kappaleen liike nopeutuu, hidastuu tai liikkeen suunta muuttuu.

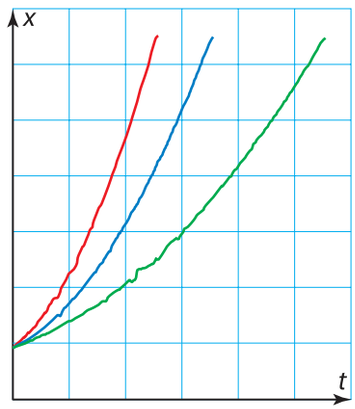
Muuttuvassa suoraviivaisessa liikkeessä kappaleen nopeus voi kasvaa (kiihtyvyys $a > 0$) tai pienentyä ($a < 0$). Kappaleen liikkeen suunta voi myös muuttua vastakkaiseksi. **Kiihtyvyys** kuvaa nopeuden muutosnopeutta. Kiihtyvyys $\vec{a}$ on vektorisuure eli sillä on suuruus ja suunta. Tässä luvussa tarkastellaan ainoastaan suoraviivaista liikettä.

!

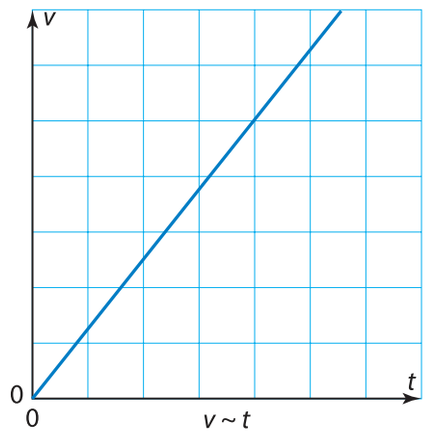
Kertaa Fysiikka 1, s. 63 – 66.

Tutkimuksessa saaduista paikan kuvaajista havaitaan, että vaunun siirtymä yhtä pitkinä aikaväleinä kasvaa, joten vaunun nopeus kasvaa. Vaunu on kiihtyvässä liikkeessä. Vaunun nopeus muuttuu sitä nopeammin, mitä jyrkemmässä kulmassa vaunurata on.

Vakiokiihtyvyys on $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, jossa Δv on nopeuden muutos ja Δt nopeuden muutokseen kulunut aika. Kiihtyvyyden yksikkö on m/s^2.

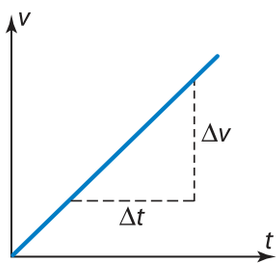


Vaunun paikan kuvaaja.



Vaunun nopeuden kuvaaja yhdessä mittauksessa.

Koska vaunun nopeuden kuvaaja on suora, vaunun nopeus muuttuu yhtä pitkinä aikaväleinä aina yhtä paljon. Tällaista liikettä sanotaan **tasaisesti kiihtyväksi liikkeeksi**. Tällöin kiihtyvyyden suuruus ja suunta pysyvät vakiona.

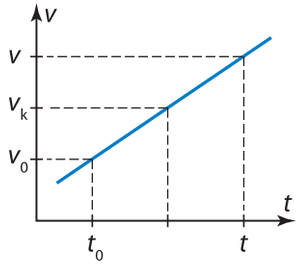


$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

Tasaisesti kiihtyvä liike

- Kappaleen liike on tasaisesti kiihtyvää, jos kappaleen nopeus muuttuu yhtä pitkinä aikaväleinä aina yhtä paljon.
- Vakiokiihtyvyys on $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Metallikuulan vieriminen pitkin kaltevaa kourua on alussa likimain tasaisesti kiihtyvää.



Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä keskinopeus on $v_k = \frac{v_0 + v}{2}$.

Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä kappaleen keskinopeus on alkunopeuden ja loppunopeuden keskiarvo.

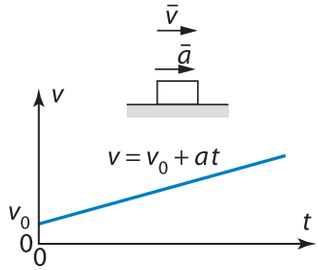
Nopeus tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä

Tasaisesti kiihtyvä liike on kiihtyvän liikkeen yksinkertaisin malli, jolla pyritään kuvaamaan luonnossa esiintyvää kiihtyvää liikettä. Luonnossa liike on harvoin tasaisesti kiihtyvää – yleensä kappaleen kiihtyvyys vaihtelee liikkeen kuluessa.

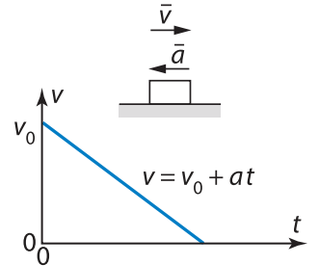
Monissa tilanteissa kiihtyvyys muuttuu tarkastelun aikana kuitenkin niin vähän, että liikettä voi riittävällä tarkkuudella tarkastella tasaisesti kiihtyvänä liikkeenä. Esimerkiksi jos ilmanvastus on pieni, putoamisliike on likimain tasaisesti kiihtyvää liikettä.

Fysiikan ensimmäisellä kurssilla johdettiin tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä olevan kappaleen nopeuden yhtälö $v = v_0 + at$. Yhtälössä v_0 on kappaleen nopeus hetkellä $t_0 = 0$ s ja a kappaleen vakiokiihtyvyys. Jos kiihtyvyys on positiivinen, kappaleen nopeus kasvaa. Jos kiihtyvyys on negatiivinen, kappaleen nopeus pienenee.

Koska tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä kappaleen kiihtyvyys ei muutu, kappaleen keskinopeus v_k voidaan laskea alkunopeuden v_0 ja loppunopeuden v keskiarvona: $v_k = \frac{v_0 + v}{2}$. Huomaa, että keskinopeuden yhtälö ei ole voimassa silloin, kun kiihtyvyys vaihtelee.



a) Jos suoraviivaisessa liikkeessä olevan kappaleen nopeus ja kiihtyvyys ovat samansuuntaiset, kappaleen nopeus kasvaa.

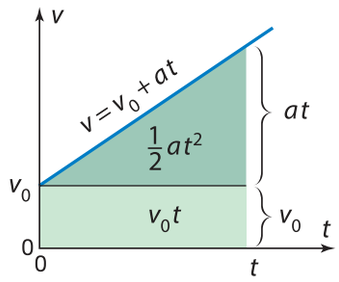


b) Jos nopeus ja kiihtyvyys ovat vastakkaissuuntaiset, kappaleen nopeus pienenee.

Nopeus tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä

- Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä kappaleen nopeus hetkellä t on $v = v_0 + at$,
  jossa v_0 on kappaleen nopeus hetkellä $t_0 = 0$ s ja a on kappaleen vakiokiihtyvyys.
- Kappaleen keskinopeus tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä on $v_k = \frac{v_0 + v}{2}$,
  jossa v_0 on kappaleen alkunopeus ja v loppunopeus.

Paikka tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä



Paikan muutos on $\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

Jos kappaleen liike on tasaisesti kiihtyvää, kappaleen paikan muutos Δx riippuu sekä nopeudesta liikkeen alussa että nopeuden muuttumisesta liikkeen aikana eli kiihtyvyydestä.

Viereisessä kuvaajassa on esitetty kappaleen liike t,v-koordinaatistossa. Valitaan tarkastelun alkuhetki t_0 ajan nollakohdaksi eli $t_0 = 0$ s, tällöin aika t ilmaisee myös liikkeen keston tarkasteluaikana. Kappaleen alkunopeus on v_0. Suoran $v = v_0 + at$ ja aika-akselin väliin jäävä pinta-ala kertoo kappaleen paikan muutoksen: $\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ eli $x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

Kappaleen paikka ajan funktiona on $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

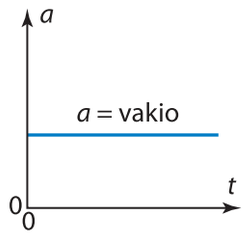
Usein paikka-akseli valitaan siten, että kappale on alkuhetkellä $t_0 = 0$ s paikassa $x_0 = 0$ m, jolloin kappaleen paikka hetkellä t on $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

Paikka tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä

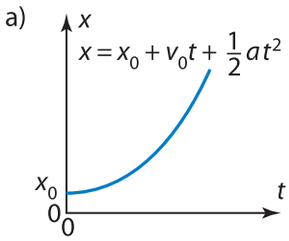
Kappaleen paikka tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä hetkellä t on

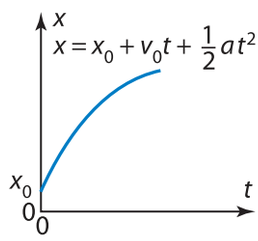
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2,$$

jossa x_0 ja v_0 ovat kappaleen paikka ja nopeus hetkellä $t_0 = 0$ s ja a on kappaleen vakiokiihtyvyys.

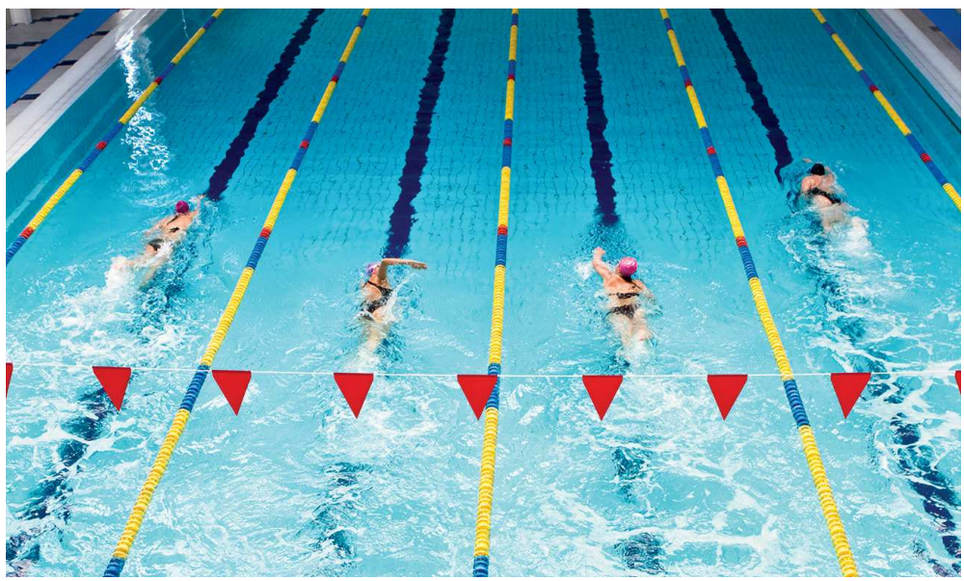


Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä olevan kappaleen kiihtyvyys on vakio. Kuvaaja on t-akselin suuntainen suora.





Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä olevan kappaleen paikan kuvaaja on paraabeli. a-kohdassa kiihtyvyys $a > 0$ ja b-kohdassa $a < 0$.



Kappaleen paikan yhtälö ei välttämättä ilmoita kappaleen kulkemaa matkaa. Kun 25 metrin altaassa uidaan altaan toiseen päähän ja takaisin, uintimatka on 50 m, mutta siirtymä eli paikan muutos on 0 m.

E Esimerkki 1

Iinan auton nopeus on 55 km/h. Hän painaa kaasua suoralla tiellä, ja auton nopeus kasvaa 2,5 sekunnin ajan tasaisesti kiihtyvyydellä 1,9 m/s^2.

a) Laske auton nopeus kiihdytyksen jälkeen.

b Kuinka pitkän matkan auto kulkee kiihdytyksen aikana?

c) Iinan auton nopeus on 55 km/h. Lähestyvän suojatien takia Iina jarruttaa, jolloin auto pysähtyy 4,0 sekunnissa. Auton kiihtyvyys on –3,8 m/s^2. Laske jarrutusmatka.

Ratkaisu

$v_0 = 55$ km/h, $a = 1{,}9$ m/s^2, $\Delta t = 2{,}5$ s, $a_{\text{jarrutus}} = -3{,}8$ m/s^2

a) Valitaan kiihdytyksen alkamisen ajan nollakohdaksi $t = 0$ s, jolloin kiihdytys päättyy hetkellä $t = 2{,}5$ s. Koska auton liike on tasaisesti kiihtyvää, loppunopeudeksi saadaan

$$v = v_0 + at = \frac{55}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}} + 1{,}9\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2{,}5\ \text{s}$$

$$= 20{,}0278\ \text{m/s} \approx 72\ \text{km/h}.$$

Pysähtymismatka riippuu sekä ajonopeudesta ennen jarrutusta että auton hidastuvuudesta jarrutuksen aikana. Liikenneturvallisuus paranee, kun noudatetaan nopeusrajoituksia ja arvioidaan tilannenopeus olosuhteisiin nähden oikein.

b) Valitaan auton paikan nollakohdaksi kohta, jossa kiihdytys alkaa eli $x_0 = 0$ m. Paikka kiihdytyksen päättyessä on silloin

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$= \frac{55}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2{,}5\ \text{s} + \frac{1}{2} \cdot 1{,}9\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (2{,}5\ \text{s})^2 \approx 44\ \text{m}.$$

Koska liike on suoraviivaista, 44 m on myös matka, jonka auto kulkee kiihdytyksen aikana.

Huomaa, koska liike on tasaisesti kiihtyvää, auton kulkema matka voidaan laskea myös keskinopeutta käyttäen:

$$x = v_{\text{k}} t = \frac{v_0 + v}{2} t = \frac{\frac{55}{3{,}6}\ \text{m/s} + 20{,}0278\ \text{m/s}}{2} \cdot 2{,}5\ \text{s} \approx 44\ \text{m}.$$

c) Auton paikka jarrutuksen päätyttyä on

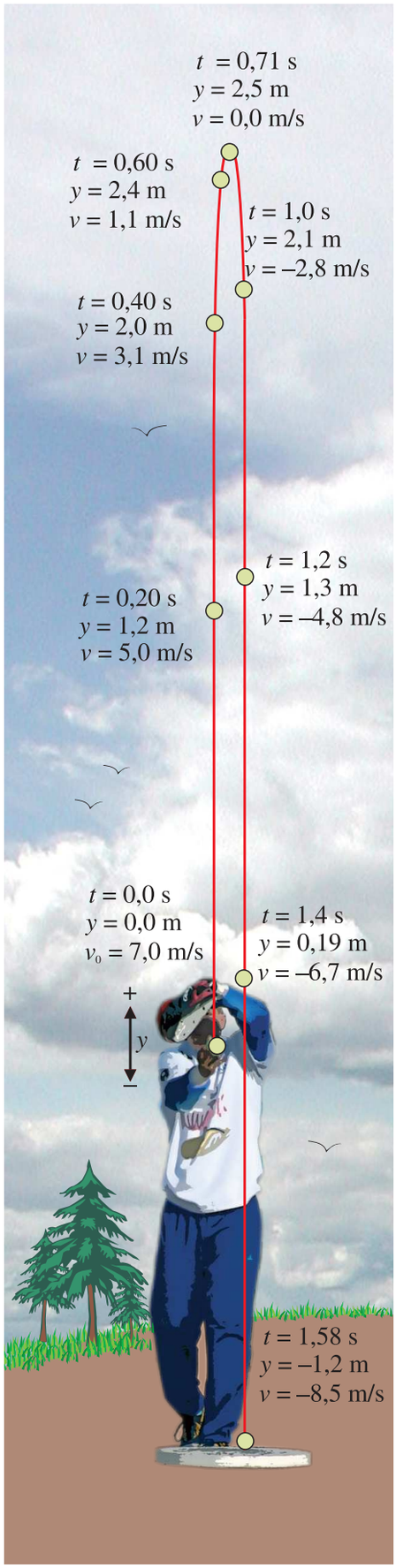
$$x = v_0 t + \frac{1}{2}a_{\text{jarrutus}} t^2 = \frac{55}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 4{,}0\,\text{s} + \frac{1}{2} \cdot (-3{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \cdot (4{,}0\ \text{s})^2 \approx 31\,\text{m}.$$

Koska liike on suoraviivaista, jarrutusmatka on 31 m.

Vastaus

a) 72 km/h **b)** 44 m **c)** 31 m

E Esimerkki 2



Piirrokseen on laskettu pallon paikka ja nopeus joillakin ajanhetkillä.

Janne harjoittelee pesäpallossa tolppasyöttöjä. Pallo irtoaa hänen kädestään 1,2 m:n korkeudella. Syötössä pallon alkunopeus on 7,0 m/s. Kuinka pitkän ajan kuluttua heitosta pallo on 2,0 m korkeammalla kuin Jannen käsi sillä hetkellä, kun pallo irtoaa kädestä?

Ratkaisu

$v_0 = 7{,}0$ m/s, $g = 9{,}81$ m/s^2

Mallinnetaan pallon paikkaa pystysuunnassa tasaisesti kiihtyvän liikkeen avulla. Kun y on pallon paikka heiton suunnassa, paikka ajan funktiona

on $y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$.

Valitaan ajan nollakohdaksi hetki, jona pallo irtoaa Jannen kädestä, ja paikaksi tuolla hetkellä $y_0 = 0{,}0$ m. Tehtävänä on määrittää hetki t, jolloin pallon paikka on $y = 2{,}0$ m.

Paikan yhtälö $y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ saadaan muotoon

$\frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + y_0 = y$ eli

$\frac{1}{2} a t^2 + v_0 t - y = 0.$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa käyttämällä saadaan

$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{{v_0}^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot (-y)}}{2 \cdot \frac{1}{2} a}.$$

$ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Valitaan suunta ylös positiiviseksi, jolloin kiihtyvyys on $a = -g = -9{,}81$ m/s^2.

$$t = \frac{-7{,}0 \text{ m/s} \pm \sqrt{(7{,}0 \text{ m/s})^2 - 2 \cdot (-9{,}81 \text{ m/s}^2) \cdot (-2{,}0 \text{ m})}}{-9{,}81 \text{ m/s}^2}.$$

Yhtälöllä on kaksi ratkaisua, $t_1 \approx 0{,}40$ s ja $t_2 \approx 1{,}0$ s.

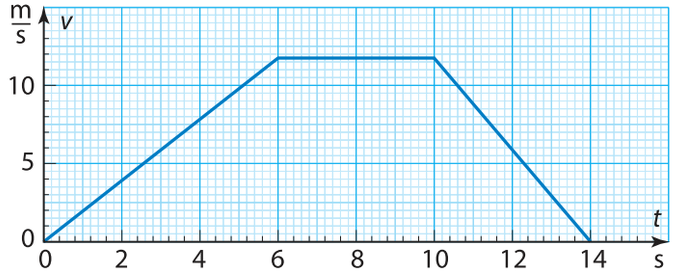
Ensimmäinen on hetki, jolloin pallo ohittaa korkeuden 2,0 m ylös mennessään, ja toinen on hetki, jolloin pallo ohittaa saman kohdan alas tullessaan.

Vastaus

Pallo on 2,0 m:n korkeudella 0,40 s:n ja 1,0 s:n kuluttua heitosta.

TEHTÄVÄT

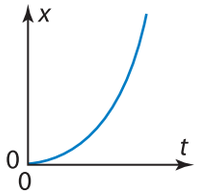
2-1. Kuvaaja esittää yksinkertaistettuna mopoauton liikettä 14,0 sekunnin aikana.

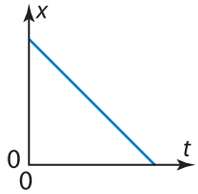


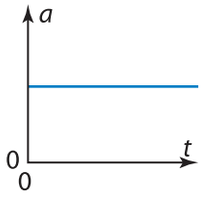
a) Mitä voit päätellä liikkeestä?
b) Määritä mopoauton kiihtyvyydet aikaväleillä 0,0…6,0 s, 6,0…10 s ja 10…14 s.
c) Kuinka pitkän matkan mopoauto on kulkenut 14,0 sekunnin aikana?

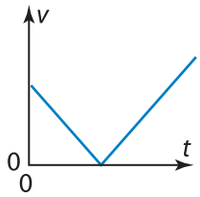
2-2. Ohitustilanteessa moottoripyörän nopeus kasvaa tasaisesti nopeudesta 75 km/h nopeuteen 101 km/h 3,0 sekunnissa.
a) Esitä pyörän liike t,v-koordinaatistossa.
b) Laske pyörän keskinopeus.
c) Kuinka pitkän matkan pyörä kulkee ko. aikana?

2-3. Mitkä seuraavista kuvaajista voivat esittää samaa kappaleen liikettä?

a)


b)


c)


d)


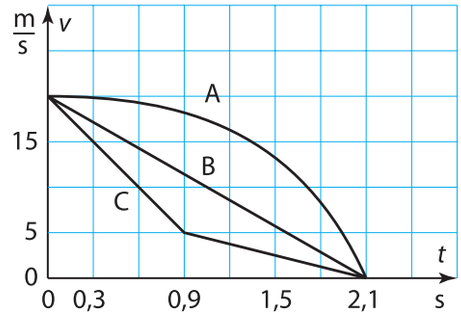
2-4. Moottorikelkka lähtee levosta ja liikkuu suoraviivaisesti 10,0 s kiihtyvyydellä 4,0 m/s^2.
a) Mikä on kelkan loppunopeus?
b) Mikä on kelkan keskinopeus?
c) Kuinka pitkän matkan kelkka kulkee?

2-5. Lataa palvelimelta video Kappale kaltevalla tasolla.
a) Esitä kappaleen paikan kuvaaja.
b) Tutki, onko kappaleen liike tasaisesti kiihtyvää.

2-6. Nopeudella 54 km/h ajava moottoripyöräilijä aloittaa edellään ajavan auton ohituksen. Ohitus kestää 3,0 s, ja tänä aikana moottoripyörän nopeus kasvaa arvoon 90 km/h. Pyörän liike oletetaan ohituksen aikana tasaisesti kiihtyväksi.
a) Laske moottoripyörän kiihtyvyys.
b) Kuinka pitkän matkan pyörä kulkee ohituksen aikana?

2-7. Maija ajaa skootterillaan nopeudella 45 km/h kohti risteystä, jossa liikennevalot vaihtuvat punaisiksi. Maija aloittaa (tasaisen) jarrutuksen, joka kestää 4,0 s, ja lopulta skootteri pysähtyy.
a) Laske skootterin kiihtyvyys jarrutuksen aikana.
b) Kuinka pitkän matkan skootteri kulkee jarrutuksen aikana?
c) Kuinka pitkän matkan skootteri kulkee ennen pysähtymistään, kun Maijan reaktioaika on 0,50 s?

2-8. Autojen pysähtymistä tutkittiin autoon kiinnitetyn mittarin avulla. Tutkimuksessa saatiin kuvan mukaiset jarrutuskäyrät.



a) Kuinka jarrupoljinta painetaan tilanteissa A, B ja C?
b) Millä jarrutustavalla auton pysähtymismatka on pienin tämän mallin mukaan?
c) Kuinka pitkä on lyhin jarrutusmatka?

2-9. **a)** Osoita yhtälöstä $\Delta x = v_k t$ lähtien, että tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä kappaleen paikka ajan funktiona on $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$. Kappaleen paikka hetkellä $t_0 = 0$ s on x_0.

b) Kappale lähtee hetkellä $t_0 = 0$ s levosta paikasta $x_0 = 0$ m tasaisesti kiihtyvään liikkeeseen. Tällöin paikan yhtälö voidaan esittää muodossa $x = \frac{1}{2} a t^2$ ja loppunopeuden yhtälö muodossa $v = at$. Johda näiden yhtälöiden avulla tasaisesti kiihtyvään liikkeeseen lähtevän kappaleen loppunopeudelle yhtälö $v = \sqrt{2ax}$.

c) Määritä levosta lähtevän moottorikelkan 15 metrin matkalla saavuttama loppunopeus, kun kelkan kiihtyvyys on 8,5 m/s^2.

2-10. Hotellin hissi kulkee 1. kerroksesta 20. kerrokseen seuraavasti:

- ensimmäiset 5,0 m tasaisesti kiihtyen ajassa 2,5 s,
- seuraavat 44,0 m vakionopeudella ja
- loppumatka tasaisesti hidastuen.

Kerrosväli on 2,8 m. Laske hissin

a) nopeus tasaisen liikkeen aikana

b) koko matkaan kuluva aika.

2-11. Uutta junatyyppiä testattaessa junan kiihtyvyys ja hidastuvuus ei saa ylittää arvoa 1,1 m/s^2. Junan nopeus ei saa olla suurempi kuin 155 km/h. Laske lyhin aika, jossa juna voi kulkea 145 kilometrin matkan lähtöasemalta pääteasemalle.

2-12. Kuula päästetään vierimään pitkin kallistettua pöytää. Sen liike voidaan olettaa tasaisesti kiihtyväksi. Pöydän pituus on 1,70 m. Kuulan keskinopeudeksi mitattiin 1,9 m/s. Laske kuulan

a) loppunopeus

b) kiihtyvyys.

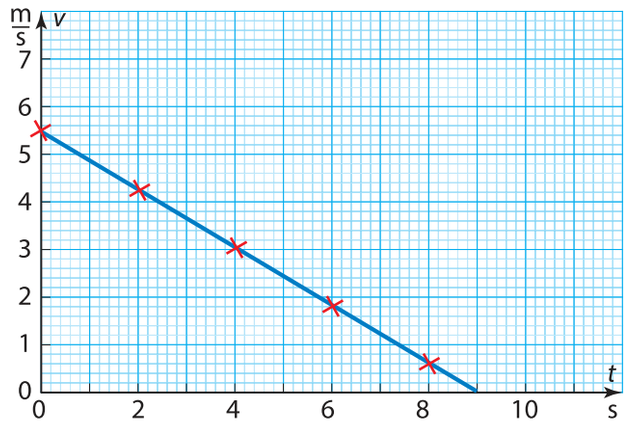
2-13. Nopeuslaskija laskee tasaista rinnettä alas. Hänen alkunopeutensa on 22 m/s ja kiihtyvyytensä 5,4 m/s^2. Oletetaan liike tasaisesti kiihtyväksi. Ilmanvastusta ei oteta huomioon. Laskijalla kuluu 25 metrin matkaan

a) 9,2 s **b)** 1,0 s **c)** 2,4 s **d)** 0,71 s.

2-14. Oheinen kuvaaja esittää pysäkille jarruttavan raitiovaunun nopeutta aikavälillä 0…9 s.

a) Piirrä raitiovaunun kiihtyvyyden kuvaaja.

b) Kuinka pitkän matkan raitiovaunu kulkee jarrutuksen aikana? [K2005/1]



3 Liikkeen tutkiminen

! Keskeisiä asioita

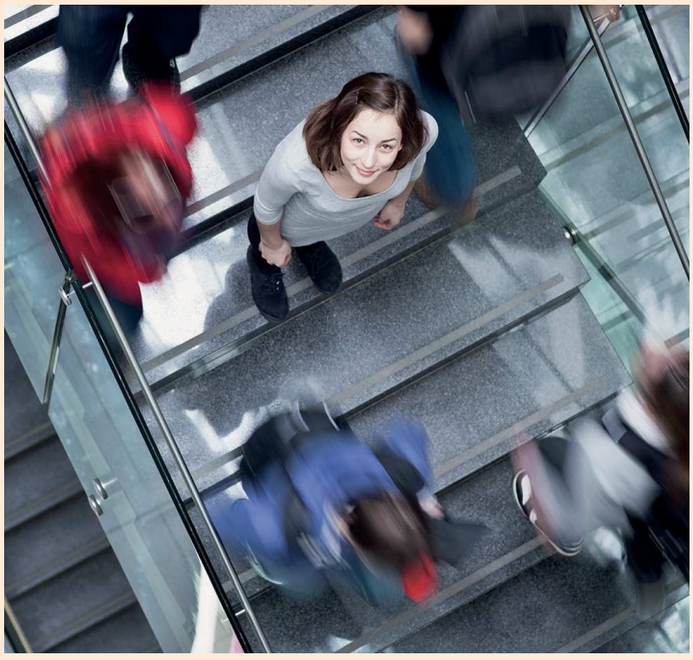
- **keskinopeus**
- **hetkellinen nopeus**
- **hetkellinen kiihtyvyys**

T Tutki

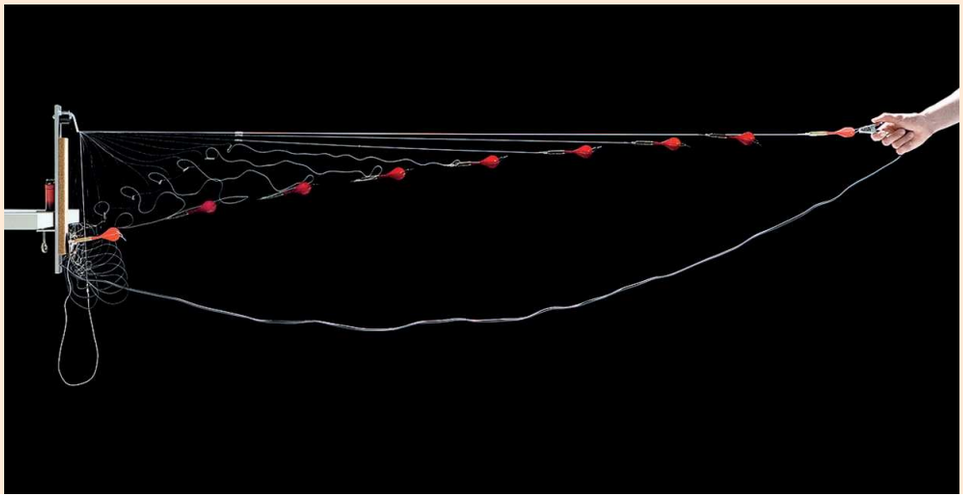
100 metrin juoksussa sijoitus määräytyy juoksuajan perusteella. Onko juoksijan nopeus vakio?

Kävely

Tutki mittausohjelmaan liitetyn paikka-anturin avulla kaverisi kävelyä, kun hän kävelee suoraviivaisesti eteenpäin vauhtiaan muuttaen. Selvitä mittausohjelman avulla, mitä tietoa kaverisi liikkeestä saadaan.



Fysiikassa todetaan, että liike on suhteellista. Mitä tällä tarkoitetaan?



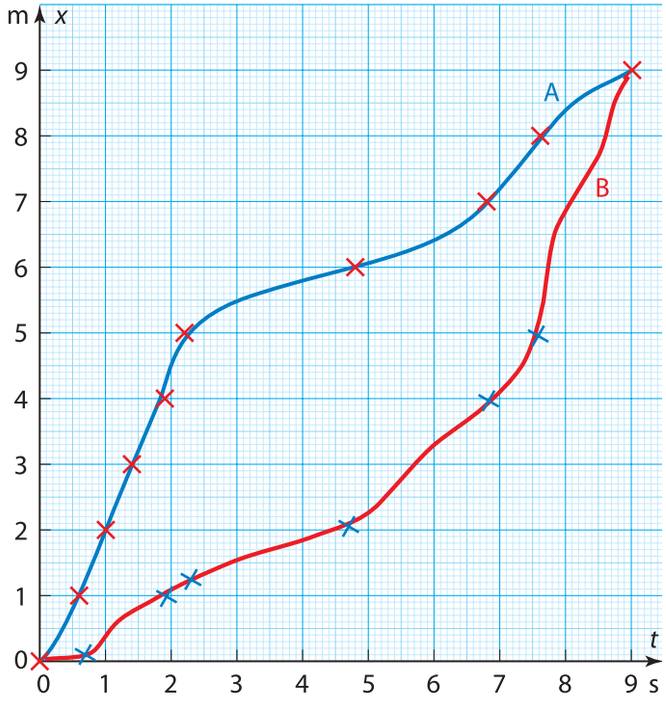
Kuvan laite koostuu kuminauhaan kiinnitetystä tikasta ja naruun kiinnitetystä maalitaulusta. Kun tikka lähtee kuminauhan avulla liikkeelle vaakatasossa, samalla hetkellä maalitaulu alkaa pudota. Miksi tikka osuu maalitauluun?

Auton ajotietokone kertoo keskivauhdin kuljetulla matkalla. Mikä ero on keskivauhdilla ja keskinopeudella?

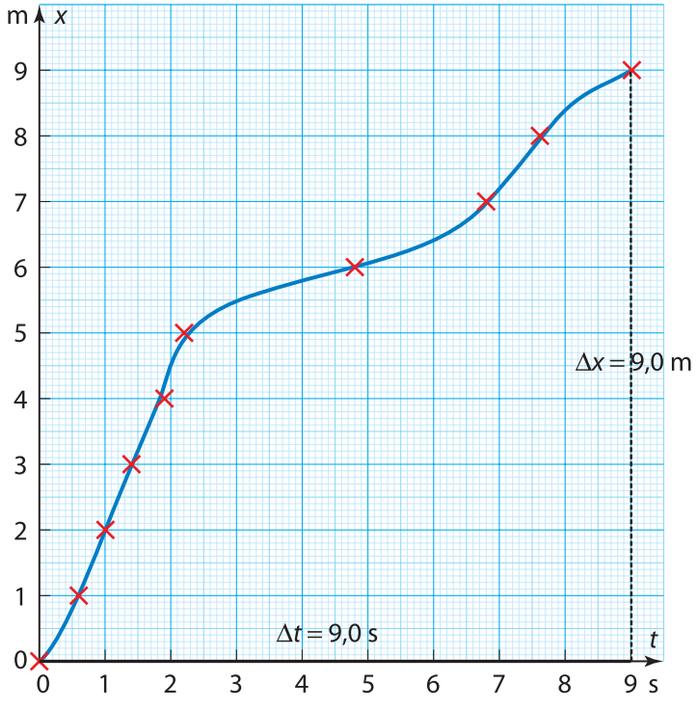
Keskinopeus

Alla olevat kuvaajat esittävät kahden suoraviivaisesti kävelevän henkilön paikkaa ajan funktiona. Kuvaajista havaitaan, että alussa Annen yhdessä sekunnissa kulkema matka on suurempi kuin lopussa, joten alussa Anne on kävellyt nopeammin kuin lopussa. Anne on kävellyt alussa nopeammin kuin Bea, mutta Annen kävelynopeus pienenee matkan aikana. Bea sen sijaan kävelee lopussa nopeammin kuin alussa.

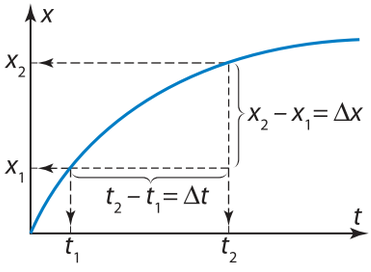
Käyrän jyrkkyydestä voidaan päätellä kävelijän kävelynopeus: mitä jyrkempi kuvaaja on, sitä nopeammin kävelijä on kävellyt.



Annen ja Bean paikan kuvaajat.



Keskinopeuden määritys aikavälillä 0,0...9,0 s.



Keskinopeus on $v_k = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.

Anne ja Bea lähtevät samasta paikasta ja kun he kohtaavat, kummankin siirtymä samassa ajassa on yhtä suuri. Siksi heidän keskinopeutensa ovat samat.

Annen ja Bean keskinopeus aikavälillä 0,0…9,0 s on

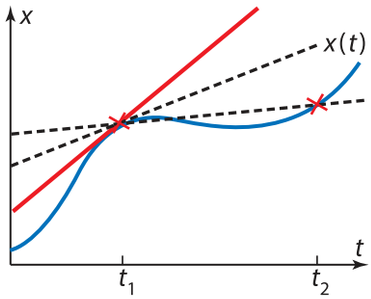
$$v_k = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{9{,}0\ \text{m}}{9{,}0\ \text{s}} = 1{,}0\ \text{m/s}.$$

Keskinopeus

Keskinopeus v_k kuvaa liikkuvan kappaleen keskimääräistä nopeutta suoraviivaisen liikkeen aikana:

$$v_k = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

jossa $\Delta x = x_2 - x_1$ on siirtymä eli paikan muutos paikasta x_1 paikkaan x_2 ja $\Delta t = t_2 - t_1$ on paikan muutokseen kulunut aika eli liikkeen kesto.



Paikan kuvaajan tangentti kertoo hetkellisen nopeuden.

!

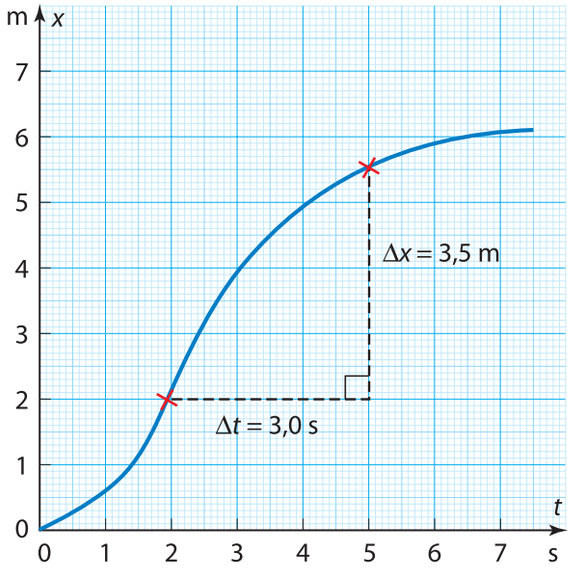
Menetelmää, jossa käyrälle piirretään tangentti ja määritetään sen kulmakerroin, kutsutaan graafiseksi derivoinniksi.

Hetkellinen nopeus

Kappaleen keskinopeus määritetään t,x-koordinaatistossa aina tietyltä aikaväliltä kahden pisteen kautta piirretyn suoran kulmakertoimen avulla, esimerkiksi aikaväliltä $t_1 \ldots t_2$. Jos aikaväliä $t_1 \ldots t_2$ lyhennetään, mutta aikavälin alkuhetki t_1 pidetään samana, siirtyy hetki t_2 kohti alkuhetkeä. Lopulta pisteet yhtyvät. Liikkeen alkukohdan ja loppukohdan kautta piirretty suora muuttuu silloin käyrän $x(t)$ tangentiksi hetkellä t_1.

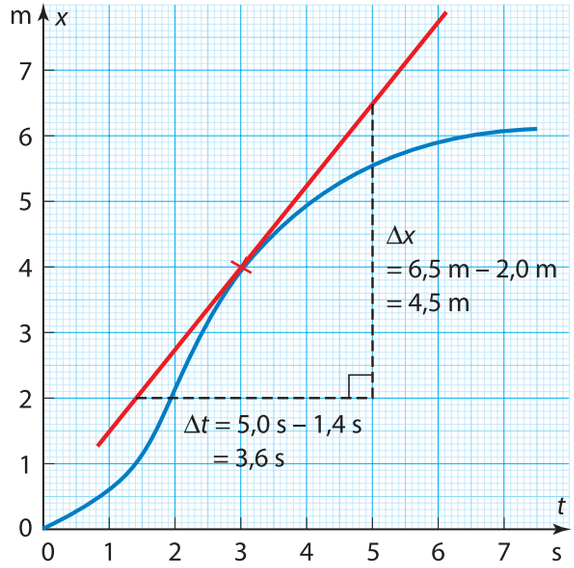
Paikan kuvaajan jyrkkyys ilmaisee kappaleen nopeuden tarkasteluhetkellä eli kappaleen hetkellisen nopeuden.

Alla olevat kuvaajat selventävät keskinopeuden ja hetkellisen nopeuden eroa. Auton nopeus hetkellä 3,0 s saadaan piirtämällä tangentti t,x-koordinaatiston käyrälle kohtaan 3,0 s.



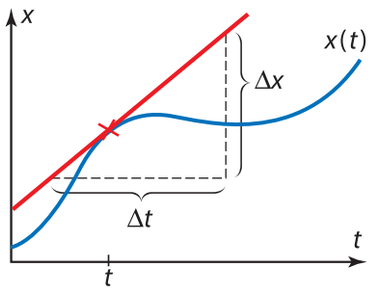
Auton keskinopeus välillä 2,0…5,0 s on

$$v_k = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{3{,}5\ \text{m}}{3{,}0\ \text{s}} \approx 1{,}2\ \text{m/s}.$$



Auton nopeus hetkellä 3,0 s saadaan tangentin fysikaalisesta kulmakertoimesta:

$$v(3{,}0\,\text{s}) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4{,}5\,\text{m}}{3{,}6\,\text{s}} \approx 1{,}3\,\text{m/s}.$$



Hetkellinen nopeus

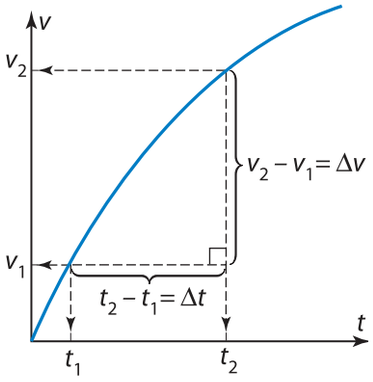
- Hetkellinen nopeus määritetään t,x-koordinaatiston kuvaajasta.
- Hetkellinen nopeus on paikan kuvaajalle hetkeä t vastaavaan kohtaan piirretyn tangentin fysikaalinen kulmakerroin eli

$$v(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Vauhti muuttuu pyöräillessä.

Keskikiihtyvyys

Kiihtyvyys kuvaa nopeuden muuttumisnopeutta. Edellisessä luvussa tarkastelimme tilanteita, joissa kiihtyvyys oli vakio, mutta usein kiihtyvyys muuttuu liikkeen aikana. Esimerkiksi kun liikut polkupyörällä, joudut välillä lisäämään vauhtiasi ja välillä jarruttamaan eli kiihtyvyytesi vaihtelee. Keskikiihtyvyys kuvaa nopeuden keskimääräistä muuttumista tietyllä aikavälillä.



Keskikiihtyvyys on $a_k = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Keskikiihtyvyys

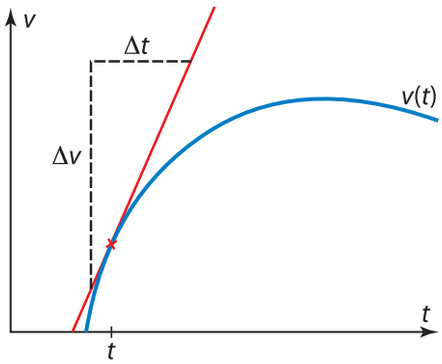
Suoraviivaisessa liikkeessä olevan kappaleen keskikiihtyvyys on

$$a_k = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

jossa $\Delta v = v_2 - v_1$ kappaleen nopeuden muutos ja $\Delta t = t_2 - t_1$ tarkasteltava aikaväli.

Hetkellinen kiihtyvyys

Hetkellinen kiihtyvyys kuvaa kappaleen kiihtyvyyttä tietyllä hetkellä. Se määritetään kuvaajasta vastaavalla tavalla kuin hetkellinen nopeus. Hetkellinen kiihtyvyys hetkellä t saadaan piirtämällä tangentti nopeuden kuvaajaan kohtaan t. Tangentin fysikaalinen kulmakerroin ilmaisee hetkellisen kiihtyvyyden.



Hetkellinen kiihtyvyys on $a(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Hetkellinen kiihtyvyys

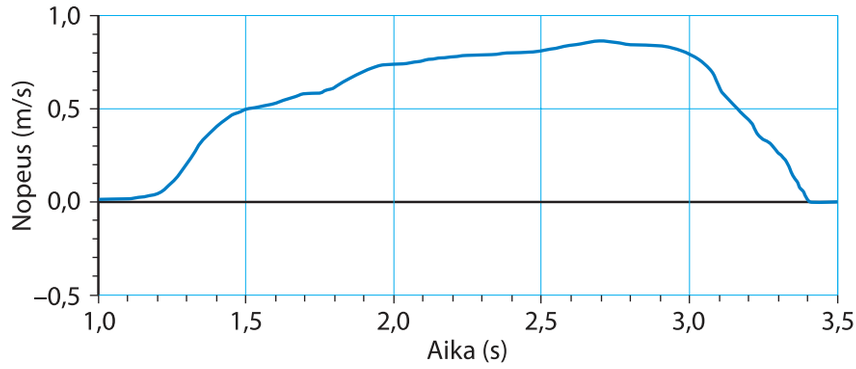
- Hetkellinen kiihtyvyys määritetään piirtämällä nopeuden kuvaajalle haluttuun kohtaan tangentti.
- Kappaleen hetkellinen kiihtyvyys hetkellä t on tangentin fysikaalinen kulmakerroin eli

$$a(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

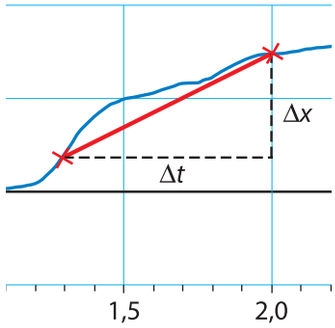
Kolaritilanteissa hetkellinen kiihtyvyys voi olla suuri.

E Esimerkki 1

Kuvaaja esittää opiskelijan suoraviivaista kävelyä. Kävelyä tutkittiin tietokoneeseen liitetyn paikka-anturin avulla.



a) Mikä on kävelynopeus hetkellä 1,50 s?
b) Milloin kävelynopeus on suurin?
c) Määritä opiskelijan keskikiihtyvyys aikavälillä 1,30…2,00 s ja 3,00…3,30 s.
d) Määritä opiskelijan kiihtyvyys hetkellä $t = 1{,}50$ s.
e) Määritä opiskelijan aikavälillä 1,00…3,00 s kulkema matka.
f) Laske opiskelijan keskinopeus aikavälillä 3,00…3,40 s.



Ratkaisu

a) Kävelynopeus hetkellä 1,50 s on 0,50 m/s.

b) Kävelynopeus on suurin hetkellä 2,7 s, koska hetkellä 2,7 s nopeuden kuvaaja saa suurimman arvonsa.

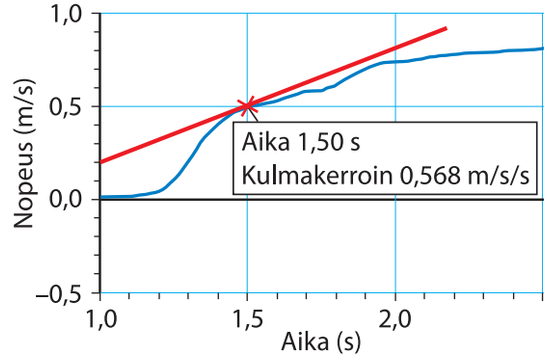
c) Keskikiihtyvyys aikavälillä 1,30…2,00 s on

$$a_k = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{0{,}72\ \text{m/s} - 0{,}20\ \text{m/s}}{2{,}00\ \text{s} - 1{,}30\ \text{s}} = \frac{0{,}52\ \text{m/s}}{0{,}70\ \text{s}} \approx 0{,}74\ \text{m/s}^2$$

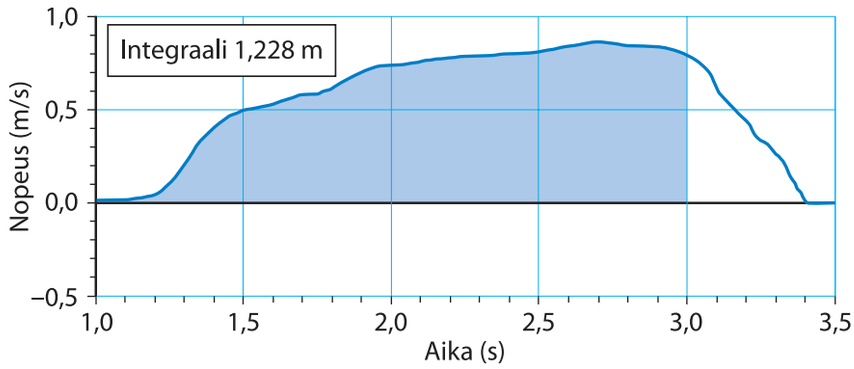
ja aikavälillä 3,00…3,30 s

$$a_k = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{0{,}30\ \text{m/s} - 0{,}80\ \text{m/s}}{3{,}30\ \text{s} - 3{,}00\ \text{s}} = \frac{-0{,}50\ \text{m/s}}{0{,}30\ \text{s}} \approx -1{,}7\ \text{m/s}^2.$$

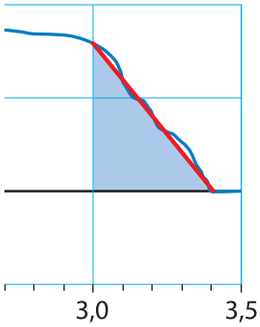
d) Mittausohjelman mukaan kohtaan 1,50 s piirretyn tangentin kulmakerroin on 0,568 m/s/s eli hetkellinen kiihtyvyys on $a(1{,}50\ \text{s}) \approx 0{,}57\ \text{m/s}^2$.



e) Mittausohjelman mukaan matka on 1,228 m. Opiskelijan aikavälillä 1,00…3,00 s kulkema matka on 1,2 m.



Huomaa, että matkan saa määritettyä myös ruutujen avulla: kuvaajassa yksi ruutu vastaa matkaa 0,50 m/s · 0,50 s = 0,25 m, ja aikavälillä 1,00…3,00 s kuvaajan ja aika-akselin välissä on noin 5 ruutua.



Fysikaalisen pinta-alan mallintaminen kolmion avulla.

f) Opiskelijan keskinopeus saadaan jakamalla kappaleen aikavälillä 3,00…3,40 s kulkema matka matkaan käytetyllä ajalla.

Opiskelijan kulkema matka saadaan nopeuden kuvaajasta fysikaalisen pinta-alan avulla joko mittausohjelmaa käyttämällä tai laskemalla kuvaajan ja aika-akselin väliin jäävä pinta-ala.
Arvioidaan opiskelijan kulkema matka kolmion avulla:

$$\text{matka} = \frac{0,40\ \text{s} \cdot 0,80\ \text{m/s}}{2} = 0,16\ \text{m}.$$

Opiskelijan keskinopeus on

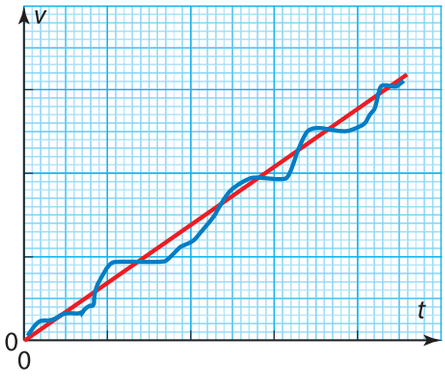
$$v_\text{k} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0,16\ \text{m}}{0,40\ \text{s}} = 0,40\ \text{m/s}.$$

Opiskelijan keskinopeus on todennäköisesti vähän suurempi, koska mallintaminen kolmion avulla antaa hieman liian pienen arvon kuljetulle matkalle.

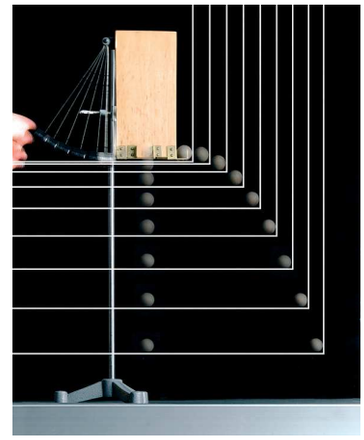
Vastaus

a) 0,50 m/s **b)** 2,7 s
c) 0,74 m/s^2, suunta on sama kuin nopeuden suunta ja 1,7 m/s^2, suunta nopeuden suunnalle vastakkainen
d) 0,57 m/s^2, suunta sama kuin nopeuden suunta
e) 1,2 m **f)** 0,40 m/s

Liikkeen mallintaminen



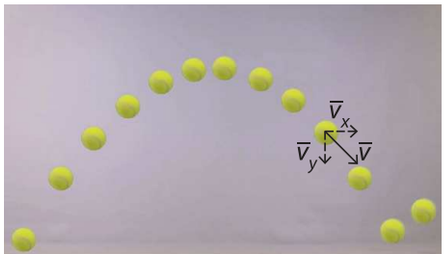
Kuvan tilanteessa nopeus muuttuu epäsäännöllisesti. Kun liikettä tarkastellaan kokonaisuutena, liikettä voidaan mallintaa tasaisesti kiihtyvän liikkeen mallilla.



Liike on harvoin tasaista tai tasaisesti kiihtyvää. Monia liikkeitä voidaan tutkia käyttämällä tasaisen liikkeen tai tasaisesti kiihtyvän liikkeen malleja.

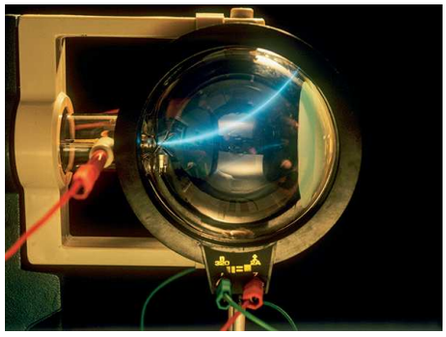
Kuvan laitteessa on kaksi samanlaista kuulaa ja moukari. Moukari lähettää toisen kuulan vaakasuoraan heittoliikkeeseen ja samanaikaisesti toinen kuula alkaa pudota. Mitä voit sanoa kuvan perusteella kuulien paikasta ajan suhteen? Onko kuulien liike tasaista vai tasaisesti kiihtyvää?

Vaakasuoran alkunopeuden saanut kuula etenee vaakasuorassa suunnassa yhtä pitkinä aikaväleinä aina yhtä pitkän matkan, joten kuulan vaakasuora etenemisnopeus on vakio, kun ilmanvastus on pieni. Vaakasuoraan tapahtuvan heittoliikkeen tapauksessa kappaleen liikettä voidaan tarkastella vaakasuoran tasaisen liikkeen ja pystysuoran tasaisesti kiihtyvän liikkeen yhdistelmänä.



Nopeusvektori kertoo pallon hetkellisen nopeuden.

Kun kappale heitetään vinosti ilmaan, puhutaan vinosta heittoliikkeestä. Tätä liikettä voidaan mallintaa käyttämällä tasaisen liikkeen ja tasaisesti kiihtyvän liikkeen yhtälöitä. Kun ilmanvastus on pieni, vinosti ylöspäin heitetyn kappaleen nopeus vaakasuunnassa on vakio eli liike on tasaista liikettä. Pystysuunnassa kappaleen liike on tasaisesti hidastuvaa lakikorkeuden saavuttamiseen asti. Tämän jälkeen kappale putoaa alaspäin tasaisesti kiihtyen. Kiihtyvyyden aiheuttaa kappaleeseen kohdistuva paino.



Kuvassa elektronin rata kaartuu sähkökentässä.

Jos varattu hiukkanen tulee homogeeniseen sähkökenttään kohtisuorasti kenttäviivoja vastaan, hiukkasen liikkeen radaksi tulee paraabelin kaari. Sähkökenttä vaikuttaa hiukkaseen koko ajan kentän suuntaisella vakiovoimalla, joten hiukkasen rata kaartuu sähkökentässä samalla tavalla kuin vaakasuoraan heitetyn kappaleen rata gravitaatiokentässä. Varatun hiukkasen liikettä homogeenisessa sähkökentässä voidaan mallintaa tasaisen liikkeen ja tasaisesti kiihtyvän liikkeen malleilla.

TEEMASIVU

Projektityö

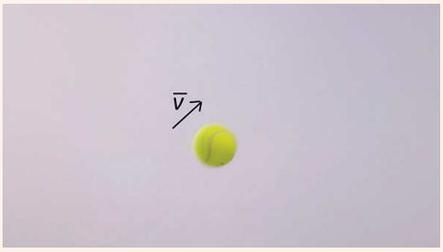
Suunnittele ja toteuta mittaus, jossa tutkit esimerkiksi ilmaan heitetyn tai putoamaan päästetyn pallon liikettä videon ja mittausohjelman avulla.

Määritä videolta mittausohjelmaa käyttäen
- pallon nopeus haluamallasi hetkellä pallon noustessa ylöspäin
- korkeus, jolla pallo käy
- pallon nopeus haluamallasi hetkellä pallon pudotessa alaspäin
- pallon kiihtyvyys haluamallasi hetkellä pallon pudotessa alaspäin
- pallon ilmassa kulkema matka.

Tee työstä työselostus.

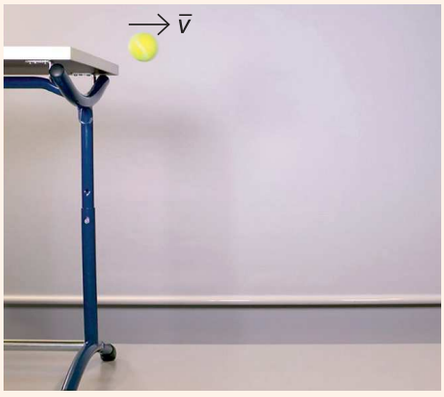
! Kertaa työselostusohjeet Fysiikka 2, s. 49.

Esimerkkejä projektityöaiheista:



Vino heittoliike
Heitä pallo vinosti lattiaan ja anna sen pompata ja pudota takaisin lattialle. Analysoi pallon liikettä.

Vaakasuora heittoliike
Anna pallon vieriä kohti pöydän reunaa ja pudota pöydältä. Analysoi pallon liikettä.

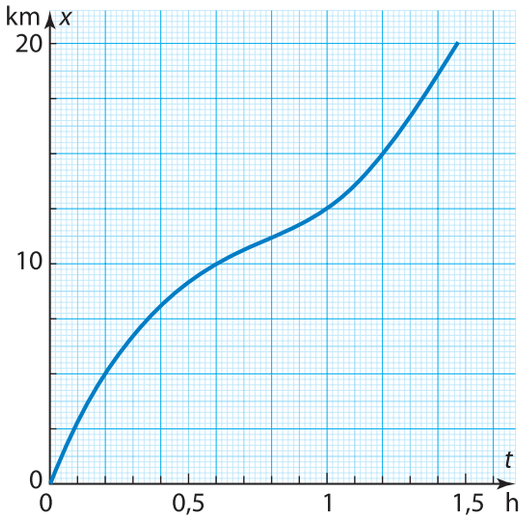


Pallon pudotus
Analysoi videolta pallon putoamista.

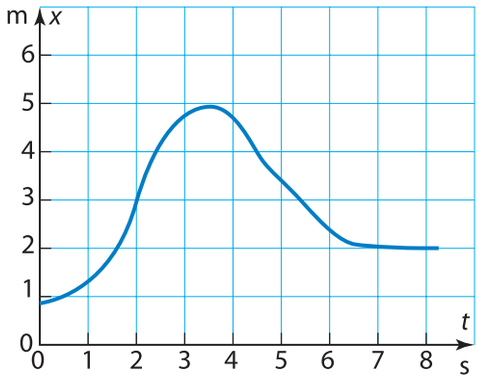
Kappale kaltevalla tasolla
Anna metallirullan vieriä pitkin kallistettua pöytää. Tutki rullan liikettä.

TEHTÄVÄT

3-1. Kuvaaja esittää pyöräilijän paikkaa ajan funktiona. Määritä pyöräilijän
a) paikka hetkillä 0,2 h ja 1,0 h
b) keskinopeus aikavälillä 0,2…1,0 h.
c) nopeus hetkellä 0,5 h.



3-2. Selvitä kuvaajan perusteella.



a) Millä hetkellä kappaleen nopeus on suurin?
b) Kuinka suuri on kappaleen suurin nopeus?
c) Mikä on kappaleen pienin nopeus?
d) Milloin kappaleen liikkeen suunta muuttuu?

3-3. Laboratoriokokeessa mitattiin suoraviivaisesti liikkuvan kappaleen nopeus ajan funktiona. Kopioi mittaustulokset palvelimelta.
a) Piirrä nopeuden kuvaaja.
b) Määritä kappaleen kulkema matka aikavälillä 0…16 s.
c) Määritä kappaleen keskinopeus aikavälillä 0…16 s. [DI fys. 2010/2]

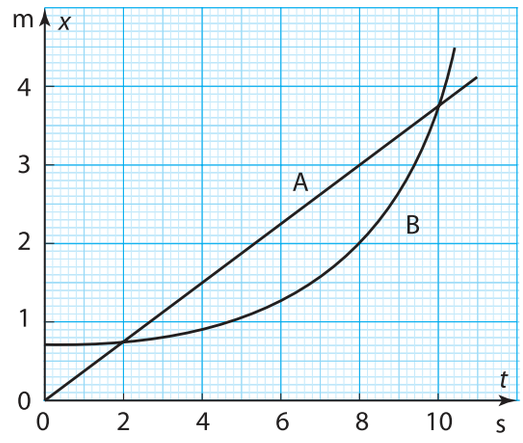
3-4. Lataa palvelimelta video Pallon pudotus. Videolla näkyvän oven korkeus on 2,2 m. Määritä pallon putoamiskiihtyvyys virherajoineen.

3-5. Saturn V -rakettia käytettiin Apollo-ohjelmassa kantorakettina. Heinäkuun 16. päivänä vuonna 1969 Saturn V lähetti ensimmäisen ihmisen Kuuhun Apollo 11 -lennolla. Taulukko esittää Saturn V -raketin lentokorkeuden ja nopeuden juuri laukaisun jälkeen.

***h* (m)**	0	4	13	32	55	83	103
***v* (m/s)**	0	4	7	12	16	20	23

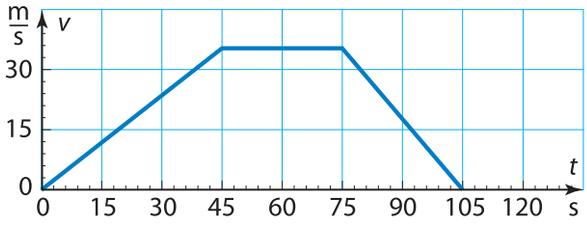
a) Piirrä raketin nopeuden kuvaaja lentokorkeuden funktiona.
b) Määritä raketin nopeus, kun sen lentokorkeus on 76 m.
c) Määritä raketin keskikiihtyvyys aikavälillä 4,0...6,0 s, jolloin raketti nousee korkeudelta 25 m korkeuteen 48 m. [S2015,2]

3-6. Oheisessa kuvaajassa esitetään suoraviivaisessa liikkeessä olevien kappaleiden A ja B paikka ajan funktiona.
a) Määritä kappaleiden aikavälillä 0,0…8,0 s kulkema matka.
b) Määritä kappaleiden keskinopeus aikavälillä 2,0…10,0 s.
c) Milloin kappaleilla on sama nopeus?



3-7. Kuvaaja esittää metrojunan nopeutta kahden aseman välillä.

a) Mikä on junan suurin nopeus?
b) Kuinka pitkä on junan kiihdytysaika?
c) Kuinka pitkä on junan jarrutusaika?
d) Kuinka kauan junan liike on tasaista?
e) Määritä junan keskikiihtyvyys asemalta lähdettäessä ja jarrutettaessa ennen seuraavaa asemaa.
f) Kuinka pitkä on metroasemien välinen etäisyys?



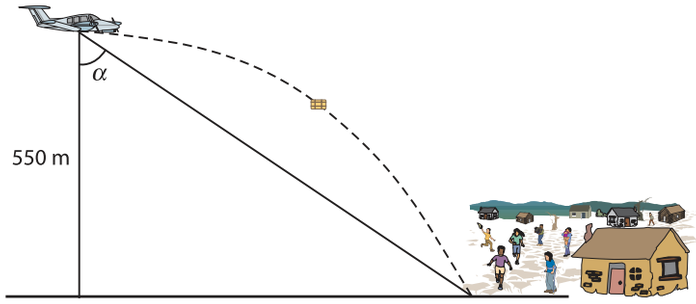
3-8. F1-auton kiihtyvyyttä tutkittiin mittaamalla auton nopeutta suoralla radalla. Kopioi mittaustulokset palvelimelta.

a) Piirrä auton nopeuden kuvaaja $v = v(t)$.
b) Määritä kuvaajan perusteella auton suurin kiihtyvyys.
c) Kuinka pitkän matkan kuljettuaan auto on saavuttanut nopeuden 180 km/h? [S2004, 2]

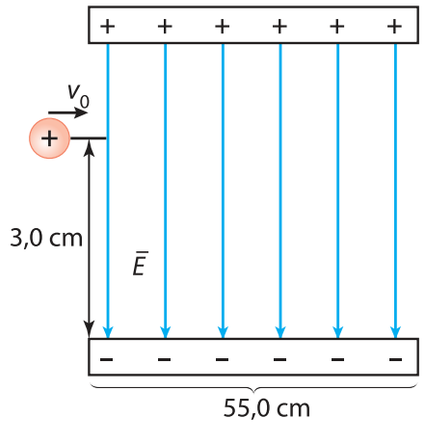
3-9. Fysiikan kurssilla annettiin tehtäväksi mitata putoamiskiihtyvyys. Lukiolainen kuvasi videokameralla putoavaa palloa, määritti videolta pallon nopeuksia ja kirjasi ne oheisen taulukon mukaisesti. Määritä tuloksista graafisesti pallon putoamiskiihtyvyys. [S2012/2]

***t* (s)**	1,48	1,52	1,56	1,60	1,64
***v* (m/s)**	0,22	0,64	1,04	1,40	1,79
***t* (s)**	1,68	1,72	1,76		
***v* (m/s)**	1,57	2,57	2,95		

3-10. Avustuslentokone lähestyy kohdettaan. Lentokone lentää 550 m:n korkeudella vakiovauhdilla 198 km/h. Avustuspaketti halutaan pudottaa mahdollisimman lähelle kohdetta. Milloin ja kuinka monta metriä ennen kohdetta lentäjän tulee pudottaa paketti? Ratkaise, missä kulmassa lentäjä näkee kohteen tuolla hetkellä. Pakettiin kohdistuvaa ilmanvastusta ei oteta huomioon.

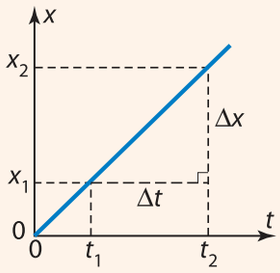


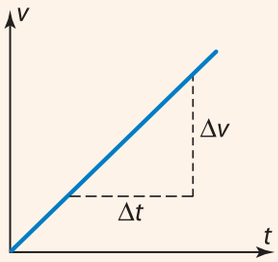
3-11. Protoni ammutaan tyhjiössä kohtisuorasti homogeeniseen sähkökenttään kenttäviivoja vastaan nopeudella 6,5 Mm/s. Kun protoni tulee sähkökenttään, sen kohtisuora etäisyys negatiivisesta levystä on 3,0 cm. Kentän leveys on 55,0 cm. Sähkökentässä protoniin kohdistuvan, kenttäviivojen suuntaisen kiihtyvyyden suuruus on $1{,}2 \cdot 10^{13}$ m/s^2.



a) Hahmottele protonin rata.
b) Kuinka kauan kestää, että protoni osuu homogeenisen sähkökentän negatiiviseen levyyn?
c) Kuinka pitkän matkan protoni etenee vaakasuunnassa?
d) Laske protonin nopeuden suuruus sen osuessa negatiiviseen levyyn.

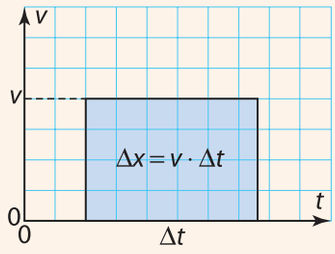
Tiivistelmä





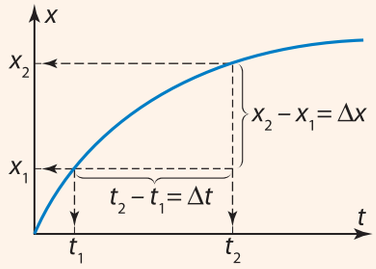
Tasainen liike

- Kappaleen nopeus on $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.
- Kappaleen siirtymä on $\Delta x = v\Delta t$.
- Kappaleen paikka hetkellä t on $x = x_0 + vt$, kun $t_0 = 0$ s.
- Kappaleen aikana 0...t kulkema matka on $s = vt$.



Tasaisesti kiihtyvä liike

- Kappaleen liike on tasaisesi kiihtyvää, jos kappaleen nopeus muuttuu yhtä pitkinä aikaväleinä aina yhtä paljon.
- Kiihtyvyys kuvaa nopeuden muutosnopeutta, $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.
- Nopeus hetkellä t on $v = v_0 + at$, kun $t_0 = 0$ s.
- Kappaleen keskinopeus tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä on $v_k = \frac{v_0 + v}{2}$, jossa v_0 on kappaleen alkunopeus ja v loppunopeus.
- Kappaleen paikka hetkellä t on $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, kun $t_0 = 0$ s.



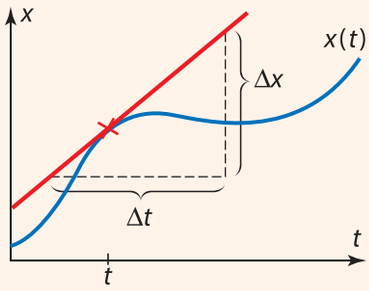
Keskinopeus

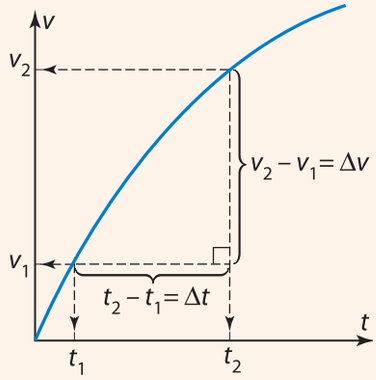
Keskinopeus on $v_k = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.

Hetkellinen nopeus

Paikan kuvaajan jyrkkyys ilmaisee kappaleen hetkellisen nopeuden. Se saadaan tangentin fysikaalisen kulmakertoimen avulla:

$v(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.





Keskikiihtyvyys

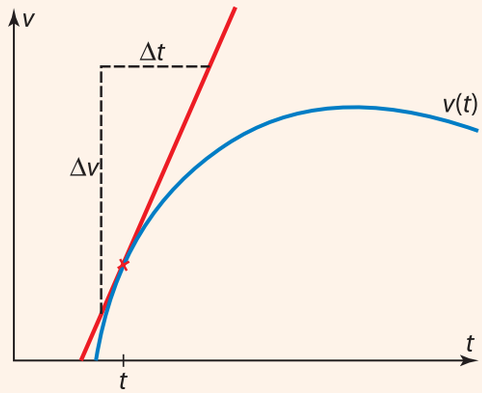
Kappaleen keskikiihtyvyys on

$a_k = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Hetkellinen kiihtyvyys

Hetkellinen kiihtyvyys on t,v-koordinaatiston kohtaan t piirretyn tangentin fysikaalinen kulmakerroin.

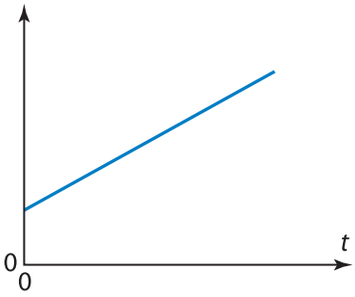
$a(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.



TESTAA, OSAATKO

Oikeita vastausvaihtoehtoja voi olla yksi tai useampi.

1. Kappaleen liikettä havainnollistetaan oheisella kuvaajalla. Jos pystyakselilla on
a) paikka, kappaleen liike on tasaista
b) nopeus, kappaleen liike on tasaista
c) nopeus, kappaleen liike on tasaisesti kiihtyvää.



2. Mitkä seuraavista ovat tasaista liikettä:
a) vaakasuoralla ilmatyynyradalla liikkeelle tönäistyn vaunun liike
b) kaltevalla ilmatyynyradalla liikkeelle tönäistyn vaunun liike
c) ilmakuplan liike kaltevassa asennossa olevassa lasiputkessa?

3. Hiukkasen paikka on esitetty oheisessa kuvaajassa. Hiukkasen nopeus on
a) nolla
b) vakio ($\neq 0$)
c) muuttuva.

4. Miten voidaan määrittää edellisessä tehtävässä kuvatun hiukkasen nopeus hetkellä $t = 2{,}0$ s:
a) laskemalla yhtälöstä $v = s/t$
b) kuvaajaan piirretyn tangentin avulla
c) kuvaajasta määritetyn pinta-alan avulla?

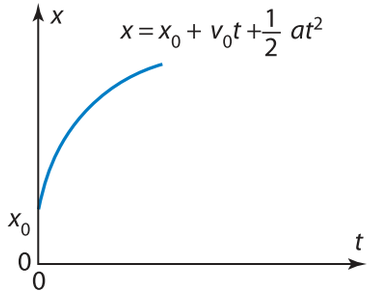
5. Keskinopeus v_k voidaan laskea alkunopeuden v_0 ja loppunopeuden v avulla yhtälöstä $v_k = \frac{v_0 + v}{2}$, kun kyseessä on

a) tasaisesti kiihtyvä liike
b) tasaisesti hidastuva liike
c) tasainen liike.

6. Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä
a) kiihtyvyyden suuruus on vakio, mutta suunta voi vaihdella
b) kiihtyvyyden suuruus voi vaihdella, mutta suunta ei muutu.
c) kiihtyvyyden suuruus ja suunta pysyvät vakiona.

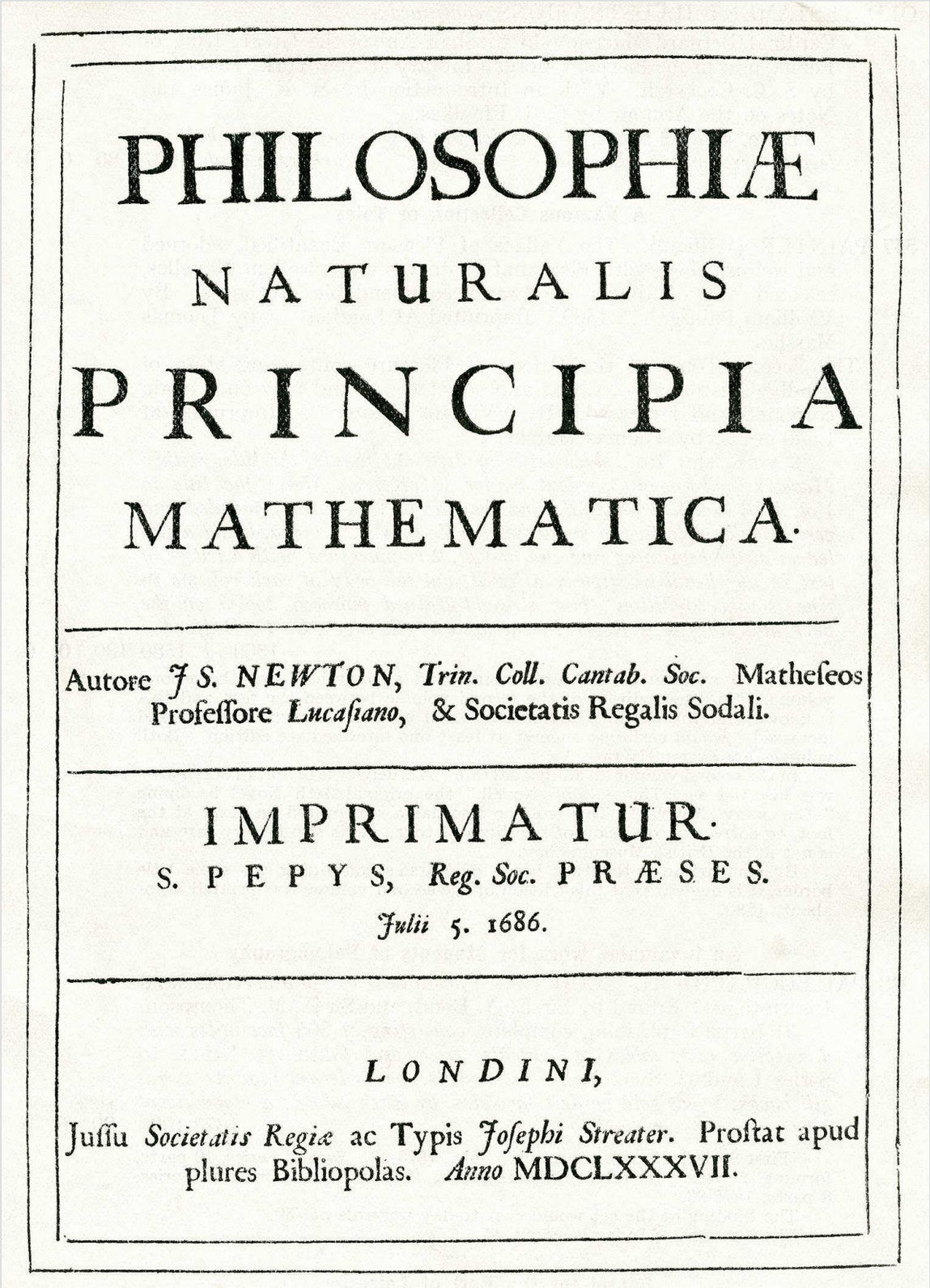
7. Tasaisessa liikkeessä
a) kappaleen paikan yhtälö ilmoittaa myös kappaleen kulkeman matkan
b) kappaleen paikan yhtälö ei välttämättä ilmoita kappaleen kulkemaa matkaa
c) kappaleen paikka ja kuljettu matka tarkoittavat samaa asiaa.

8. Piirroksessa
a) on esitetty kappaleen paikan kuvaaja
b) kappale on kiihtyvässä liikkeessä
c) kappaleen kiihtyvyys on positiivinen.



9. Mitkä yhtälöistä liittyvät muuttuvaan liikkeeseen?
a) $x = x_0 + vt$
b) $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$
c) $v = v_0 + at$

Newton ja Principia



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheſeos Profeſſore *Lucaſiano,* & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,

Juſſu *Societatis Regiæ* ac Typis *Joſephi Streater.* Proſtat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Lector honorabilis

Hoc est opus meum principale, quod edidi anno MDCLXXXVI. Eo tempore lingua litterarum et scientiae erat Latina. Propterea librum sermone patrio non scripsi.

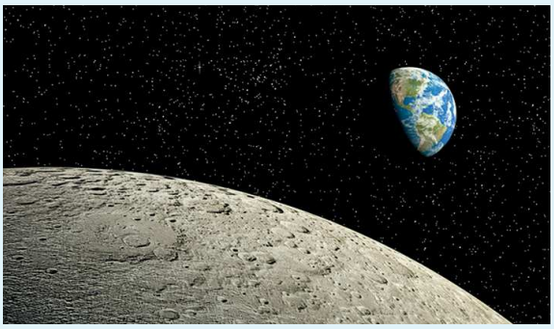
In hoc libro tres leges ad vires pertinentes expono, quas, cum naturam gravitationis et ceterarum virium considerarem, intellexi. Maximi momenti etiam vestris temporibus esse dicuntur, si quis vult intelligere effectum, quem vires ad corpus physicale habent, et motum, quem vires faciunt.

Spero fore, ut lectio operis mei tibi sit iucundissima. In hoc quoque cursu poteris leges Newtonianas in variis rerum condicionibus formandis considerare.

Secundam fortunam et ardorem animi tibi exopto, physice tiro!

amicissime
Sir Isaac Newton

4 Vuorovaikutus ja voima



! Keskeisiä asioita

- **vuorovaikutus**
- **voima ja vastavoima**
- **massa ja paino**

T Tutki

1. Voima ja vastavoima

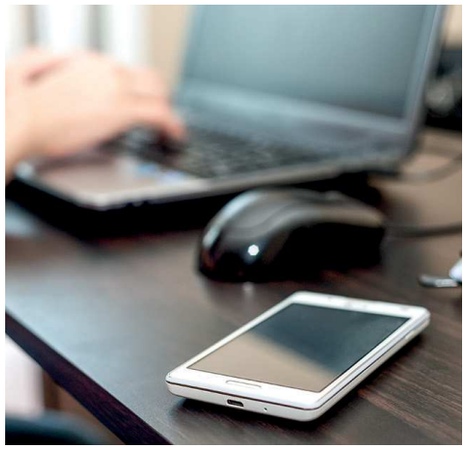
a) Vedä jousivaa'alla kaverisi pitämää toista jousivaakaa. Tarkkaile jousivaakojen lukemia. Miten tilanne muuttuisi, jos seisoisitte rullalautojen päällä?

b) Kiinnitä jousivaa'at toisiinsa ja toinen jousivaaka kiinteään kohteeseen, esimerkiksi ovenkahvaan. Vedä toista vaakaa ja vertaa vaakojen lukemia.

2. Kappaleen hitaus

Aseta paperin päälle muovimuki, joka on täytetty esimerkiksi hiekalla. Vedä paperi nopealla liikkeellä. Mitä havaitset? Toista koe muuttamalla hiekan määrää. Videoi työ.

Vuorovaikutus



Minkä kanssa a) mailassa kiinni oleva tennispallo b) ilmassa oleva koripallo c) kuvan puhelin ovat vuorovaikutuksessa?

! Kertaa Fysiikka 1, s. 75 ja 76.

Kun lyöt tennismailalla palloa, maila ja pallo koskettavat toisiaan: ne ovat kosketusvuorovaikutuksessa keskenään. Pallo on kosketusvuorovaikutuksessa myös ilman kanssa, kuten mailakin. Kun pallo lentää ilmassa, pallo ei ole kosketuksessa maanpinnan kanssa, mutta Maan vetovoima vaikuttaa sen lentorataan. Pallo on etävuorovaikutuksessa Maan kanssa.

Fysiikka tutkii kappaleiden vuorovaikutuksia. Kun tutkitaan makroskooppisia ilmiöitä, vuorovaikutukset voidaan jakaa **kosketus-** ja **etävuorovaikutuksiin**.

Ilmaan heitetty pallo putoaa maanpinnalle, koska Maa vetää palloa puoleensa. Maan ja pallon välillä on gravitaatiovuorovaikutus.

Kappaleen ja Maan välistä etävuorovaikutusta sanotaan gravitaatiovuorovaikutukseksi.

Pöydällä oleva puhelin on kosketusvuorovaikutuksessa sekä pöydän että ilman kanssa ja gravitaatiovuorovaikutuksessa Maan kanssa. Gravitaatiovuorovaikutus on etävuorovaikutus.

Kappaleen vuorovaikutuksen voimakkuus toisten kappaleiden ja ympäristön välillä voi vaihdella. Tennispallon liike muuttuu enemmän, jos sitä lyödään voimakkaammin. **Voima** on suure, joka kuvaa **vuorovaikutuksen vaikutusta kappaleeseen**. Kosketusvuorovaikutukseen liittyvää voimaa sanotaan **kosketusvoimaksi** ja etävuorovaikutukseen liittyvää voimaa **etävoimaksi**.

Vuorovaikutus ja voima

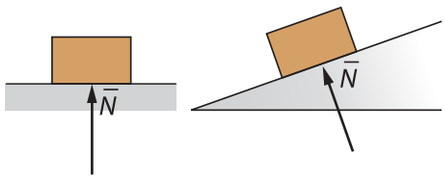
- Voima kuvaa vuorovaikutuksen vaikutusta kappaleeseen.
- Voima liittyy aina kappaleiden väliseen vuorovaikutukseen.

Erilaisia voimia

Veden pinta muodostaa tukivoiman ja kannattelee hyönteisiä.

Omenaan kohdistuva paino on gravitaatiovuorovaikutukseen liittyvä voima.

Palkkien, pintojen ja vaijerien jännitys- ja tukivoimat pitävät rakenteet lujina.



Tukivoima on aina kohtisuorassa pintaa vasten. Huomaa, että kuviin ei ole merkitty kaikkia kappaleeseen vaikuttavia voimia.

Kun kappale on kosketuksessa toiseen kappaleeseen, tämä toinen kappale kohdistaa siihen **tukivoiman**. Tukivoima on aina kohtisuorassa kosketuspintaa vasten. Tukivoima on kosketusvoima. Kosketusvoimat aiheutuvat viime kädessä atomien ja molekyylien välisestä sähkömagneettisesta vuorovaikutuksesta.

Monilla aloilla, esimerkiksi rakennustekniikassa ja lääketieteessä, on tunnettava ja osattava laskea tukivoimien suuruudet. Lujuuslaskelmien avulla varmistetaan, että esimerkiksi rakennukset, sillat ja koneet ovat kestäviä ja turvallisia käyttää.

Muita voimia ovat mm. nesteessä tai kaasussa olevaan kappaleeseen kohdistuva noste, vaijerissa tai köydessä vaikuttava **jännitysvoima** sekä **kitka**. Esimerkiksi polkupyörän liikkellelähdön ja pysähtymisen aiheuttaa tienpinnan ja renkaiden välinen kitka.

Kun ihmiselle asennetaan keinoniveliä, on otettava huomioon painon vaikutus nivelpinnoissa esiintyviin tukivoimiin. Kuvassa on keinonivel polvessa.

Paino on gravitaatiovuorovaikutukseen liittyvä voima. Se on etävoima. Kappaleisiin kohdistuva paino aiheuttaa kappaleiden putoamisen kohti Maan pintaa.

Kahden sähköisesti varatun hiukkasen tai kappaleen välillä on **sähköinen voima**. Sähköiset voimat määräävät aineen rakenteen ja ominaisuudet. Atomi pysyy koossa protonien ja elektronien välisen sähkömagneettisen vuorovaikutuksen ansiosta. Sähköiset ja magneettiset voimat ovat gravitaatiovoiman tapaan etävoimia.

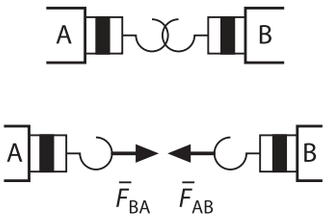
Voima ja vastavoima

Meloja kohdistaa melalla voiman veteen. Newtonin III lain mukaan vesi työntää melaa yhtä suurella mutta vastakkaissuuntaisella voimalla – tämä veden aiheuttama voima liikuttaa kajakkia.

!

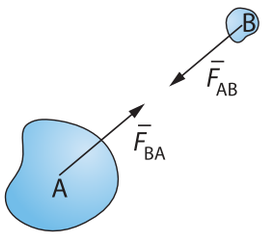
Kertaa Fysiikka 1, s. 75–77.

Kun kahden kappaleen välillä on vuorovaikutus, se vaikuttaa molempiin kappaleisiin yhtä voimakkaana ja samanaikaisesti. Siksi vuorovaikutukseen liittyy aina kaksi voimaa, **voima** ja **vastavoima**. Voima vaikuttaa tutkittavaan kappaleeseen ja vastavoima vaikuttaa vuorovaikutuksen toisen osapuoleen. Voimat esiintyvät aina pareittain; yksittäistä voimaa ei ole olemassa.



Voima on vektorisuure eli sillä on suuruus ja suunta.

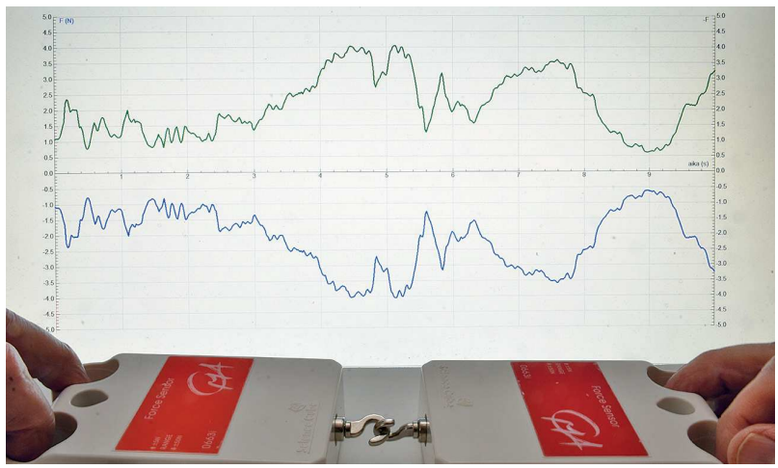
Tutkimuksen kaikissa mittauksissa molemmat jousivaa'at näyttävät samaa lukemaa. Jousivaaka B siis vetää jousivaakaa A yhtä suurella voimalla kuin jousivaaka A vetää jousivaakaa B. Jousivaa'at A ja B kohdistavat toisiinsa yhtä suuret, mutta vastakkaissuuntaiset voimat, $\overline{F}_{BA} = -\overline{F}_{AB}$. Voima $\overline{F}_{BA}$ aiheutuu kappaleesta B ja kohdistuu kappaleeseen A. Voima $\overline{F}_{AB}$ aiheutuu kappaleesta A ja kohdistuu kappaleeseen B.



Voima ja vastavoima. Huomaa, että voima ja vastavoima vaikuttavat eri kappaleisiin, joten ne eivät kumoa toisiaan.

Newtonin III laki eli voiman ja vastavoiman laki

Kun kappale A vaikuttaa kappaleeseen B voimalla $\overline{F}_{AB}$, kappale B vaikuttaa kappaleeseen A yhtä suurella mutta vastakkaissuuntaisella voimalla $\overline{F}_{BA}$.



Voima-antureita vedetään vastakkaisiin suuntiin. Kuinka Newtonin III laki ilmenee kuvan *t*,*F*-koordinaatistosta?

Voimakuvio

Voimakuvioilla kuvataan sitä, miten kuinka voimat työntävät, vetävät, tukevat tai kuormittavat kappaleita. Voimakuviossa tarkastellaan yhteen kappaleeseen kohdistuvia voimia.

!

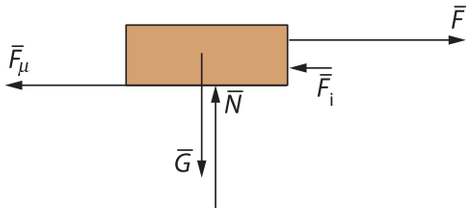
Kertaa Fysiikka 1, s. 78.

!

Voimakuviota nimitetään myös vapaakappalekuvaksi.

!

Huomaa, voimakuvioon ei merkitä voimien vastavoimia.



Laatikkoa vedetään vakionopeudella lattialla.

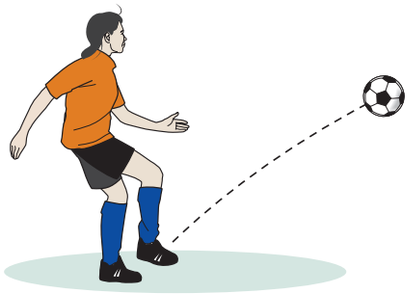
Voimakuvion piirtäminen

1. Piirrä kuva tilanteesta.
2. Piirrä kaikki systeemiin kuuluvat kappaleet erilleen toisistaan.
3. Piirrä kaikki yksittäiseen kappaleeseen vaikuttavat voimat.
4. Koska voima on vektorisuure, piirrä voimat oikeassa suhteessa: vektorin pituus kuvaa voiman suuruutta, ja nuolen suunta kuvaa voiman suuntaa.
5. Sovi laskujen yhteydessä positiiviset suunnat. Usein kappaleen liikkeen suunta alkutilanteessa kannattaa valita positiiviseksi suunnaksi.
6. Merkitse kunkin kappaleen viereen sen nopeuden tai kiihtyvyyden suunta, jos se tiedetään tai voidaan helposti päätellä asiayhteydestä. Ratkaistaviksi tarkoitettujen suureiden suuntia ei tarvitse tietää ennakolta, sillä ne selviävät, kun tehtävä ratkaistaan.

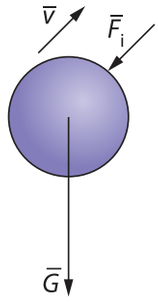
Kuvan voimakuviossa vetävä voima $\overline{F}$ on suurempi kuin ilmanvastus $\overline{F}_i$. Kitka $\overline{F}_\mu$ ja ilmanvastus $\overline{F}_i$ vaikuttavat vastakkaiseen suuntaan kuin vetävä voima $\overline{F}$. Paino $\overline{G}$ on yhtä suuri kuin pinnan tukivoima $\overline{N}$, mutta vastakkaissuuntainen. Paino $\overline{G}$ piirretään alkamaan kappaleen painopisteestä. Tukivoima $\overline{N}$ piirretään tavallisesti niin, että vektorin kärki on kiinni siinä pinnassa, johon tukivoima kohdistuu.

E Esimerkki 1

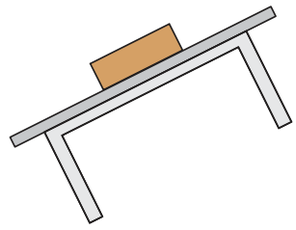
Tutkitaan ilmaan potkaistun pallon ja kallistetulla tasolla liukuvan kirjan voimakuvioita.



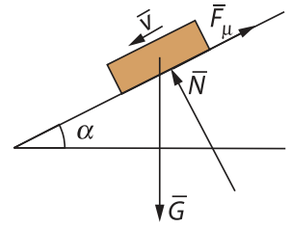
Palloon vaikuttavat voimat ovat paino $\overline{G}$ ja ilmanvastus $\overline{F}_i$.



Pallon voimakuvio.

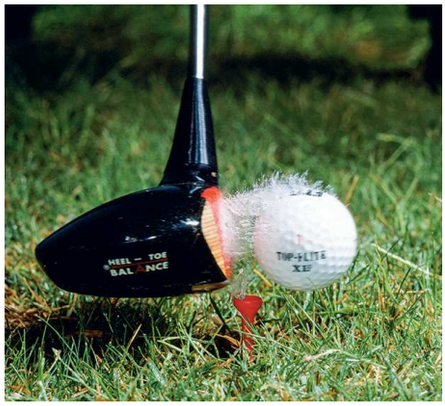


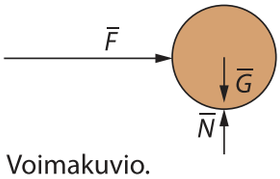
Kirjaan vaikuttavat voimat ovat paino $\overline{G}$, pinnan tukivoima $\overline{N}$ ja kitka $\overline{F}_\mu$.



Kirjan voimakuvio.

E Esimerkki 2





Voimakuvio.

Golfmailalla lyödään palloa.

a) Minkä kanssa pallo on vuorovaikutuksessa silloin, kun maila osuu palloon? Entä kun pallo lentää ilmassa?

b) Mitkä voimat vaikuttavat palloon juuri sillä hetkellä, kun maila koskettaa palloa? Piirrä tilanteesta voimakuvio.

c) Mitkä voimat vaikuttavat palloon sen ilmalennon aikana?

Ratkaisu

a) Kun maila osuu palloon, se on kosketusvuorovaikutuksessa mailan, ilman ja maanpinnan (tai tiin) kanssa. Lisäksi pallo on etävuorovaikutuksessa Maan kanssa. Kun pallo lentää ilmassa, se on kosketusvuorovaikutuksessa ilman kanssa ja etävuorovaikutuksessa Maan kanssa.

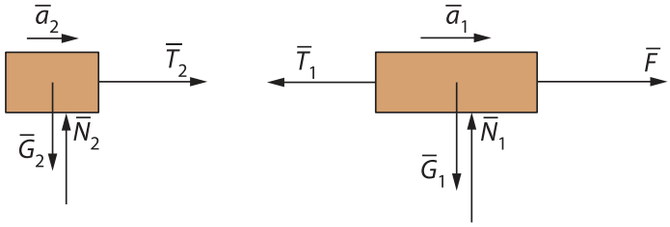
b) Palloon vaikuttavat voimat ovat palloon kohdistuva paino $\overline{G}$, maanpinnan tukivoima $\overline{N}$ ja mailan kosketusvoima $\overline{F}$.

c) Kun pallo on ilmassa, siihen vaikuttavat voimat ovat paino ja ilmanvastus.

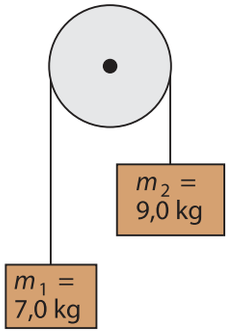
E Esimerkki 3

Kappaleita a ja b vedetään voimalla $\overline{F}$ kitkattomalla alustalla. Kappaleet on yhdistetty venymättömällä langalla.

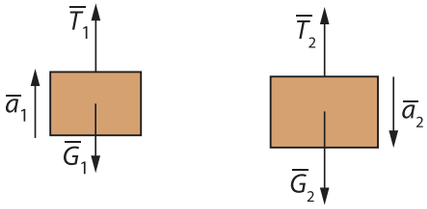
Tutkitaan toisiinsa kytkettyjen kappaleiden voimakuvioita. Kappaleita voidaan tarkastella erillisinä systeemeinä.



Jos lanka on venymätön, molempiin kappaleisiin vaikuttaa yhtä suuri langan suuntainen voima, joten $|\overline{T}_1| = |\overline{T}_2| = T$. Koska kappaleet on yhdistetty venymättömällä langalla, kappaleiden kiihtyvyydet ovat yhtä suuret eli $|\overline{a}_1| = |\overline{a}_2| = a$.



Kappaleet on ripustettu kuvan mukaisesti. Vastusvoimat ja rullan massa ovat pienet.



Kun kaksi kappaletta on liitetty toisiinsa kireäksi jännitetyllä venymättömällä langalla, lanka aiheuttaa molempiin kappaleisiin yhtä suuren, langan suuntaan vaikuttavan voiman eli $|\overline{T}_1| = |\overline{T}_2| = T$. Koska kappaleet liikkuvat langan takia yhdessä, kummankin kiihtyvyys on samansuuruinen eli $|\overline{a}_1| = |\overline{a}_2| = a$.

Miksi rekka-auton nopeutta on vaikeampi muuttaa kuin henkilöauton nopeutta?

Massa ja paino

Kappaleilla on taipumus vastustaa liikkeensä muuttumista. Tätä ominaisuutta kutsutaan **hitaudeksi** eli inertiaksi. Massa kuvaa kappaleen hitautta. Massan tunnus SI-järjestelmässä on m ja yksikkö kilogramma (kg).

Kappaleen liikkeen muuttamiseen tarvitaan aina ulkoinen voima. Raskaan kappaleen liikkeen muuttaminen vaatii suuremman voiman kuin kevyen kappaleen liikkeen muuttaminen.

Massaksi sanotaan myös sitä kappaleen ominaisuutta, joka kuvaa kappaleen gravitaatiovuorovaikutuksen suuruutta. Kaikki massalliset kappaleet aiheuttavat gravitaatiolain mukaisen vetovoiman ja tuntevat muiden kappaleiden aiheuttaman vetovoiman. Maan pinnalla Maan gravitaatiovaikutus ilmenee **painona**, joka kohdistuu kaikkiin massallisiin kappaleisiin, myös ihmisiin. Paino ei ole kappaleen ominaisuus, vaan se liittyy kappaleiden väliseen gravitaatiovuorovaikutukseen.

! Kertaa Fysiikka 1, s. 91.

Massa ja paino

- Massa ilmaisee kappaleen ominaisuutta, joka ilmenee
  – kappaleen taipumuksena vastustaa liikkeensä muuttumista
  – kykynä aiheuttaa ja kokea gravitaatiovuorovaikutus.
- Paino on gravitaatiovuorovaikutuksen aiheuttama voima.
- Kappaleeseen kohdistuvan painon suuruus on $G = mg$, jossa m on kappaleen massa ja g putoamiskiihtyvyys.

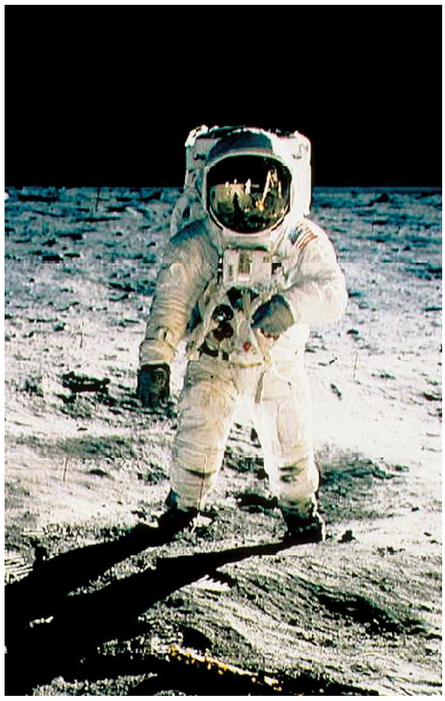
Maata kiertävällä avaruusasemalla astronautit ovat vapaassa putoamisliikkeessä. Vapaassa putoamisliikkeessä gravitaatiovuorovaikutuksesta aiheutuva gravitaatiovoima on ainoa kappaleeseen vaikuttava voima. Muiden taivaankappaleiden aiheuttama gravitaatiovoima on avaruusasemalla vähäinen Maan aiheuttamaan painoon verrattuna.

Putoamiskiihtyvyys

Kun seisot henkilövaa'alla, painat vaa'an pintaa alemmas, koska Maa vetää sinua puoleensa. Vaaka mittaa sinuun kohdistuvan painon suuruuden, mutta muuntaa sen massaasi vastaavaksi lukemaksi.

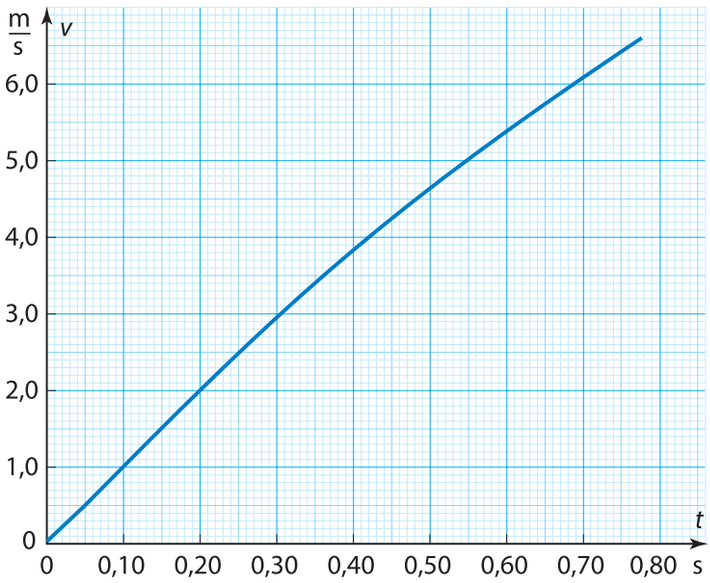
Kappaleilla, joiden ilmanvastus on pieni, on pudotessaan massasta riippumatta sama kiihtyvyys, joka on likimain yhtä suuri kuin gravitaation aiheuttama putoamiskiihtyvyys g. Putoamiskiihtyvyyden arvo vaihtelee maapallolla sijainnin mukaan välillä 9,78…9,83 m/s^2. Laskuissa käytetään arvoa g = 9,81 m/s^2. Putoamiskiihtyvyyden arvo on suurin navoilla ja pienin päiväntasaajalla.

Putoamiskiihtyvyyden suuruuteen vaikuttaa se, että maapallo ei ole täysin pyöreä vaan pyörimisakselinsa suunnassa litistynyt sekä se, että Maa pyörii akselinsa ympäri. Putoamiskiihtyvyys on hieman pienempi suurten merien kohdalla kuin samalla kohtaa rannikolla, koska vesi on harvempaa kuin kiviaines. Esimerkiksi maanalaisia luolia voidaan etsiä mittaamalla putoamiskiihtyvyys maanpinnalta oletetun luolan kohdalta. Myös öljy- ja maakaasuesiintymiä on etsitty putoamiskiihtyvyyden arvoja mittaamalla ja vertailemalla.



Astronautin massa on sama Maassa ja Kuussa, mutta Kuussa häneen kohdistuva paino on pienempi kuin Maassa, koska Kuussa putoamiskiihtyvyys on pienempi kuin Maassa.

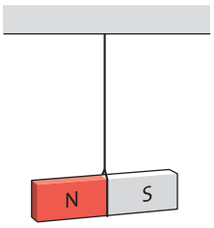
Kuvaaja esittää putoavan pallon nopeutta.

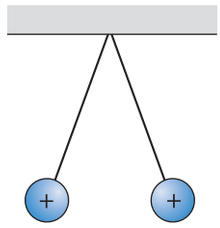


Kuvaajasta havaitaan, että liikkeen alussa aikavälillä 0,0…0,25 s kuvaaja on nouseva suora, joten pallo on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä; kiihtyvyys on vakio. Sen jälkeen kuvaaja hieman loivenee eikä pallon nopeus enää kasva samalla tavalla kuin alussa (kiihtyvyys pienenee). Mistä kuvaajan loiveneminen johtuu?

TEHTÄVÄT

4-1. Minkä kanssa tutkittava kappale on vuorovaikutuksessa seuraavissa tilanteissa ja mistä vuorovaikutuksista on kyse:
a) langassa riippuva tankomagneetti
b) asiakkaan työntämä ostoskärry
c) varattu kevyt pallo, joka on ripustettu lankaan toisen samanlaisen pallon lähelle?



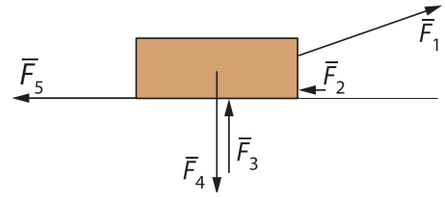


4-2. Mainitse tilanne, jossa kappale on
a) etävuorovaikutuksessa vähintään kahden eri kappaleen kanssa
b) kosketusvuorovaikutuksessa kahden eri kappaleen kanssa.

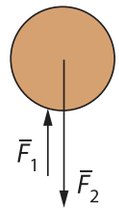
4-3. Katso palvelimelta video Newtonin III laki ja vastaa videolla olevaan kysymykseen.

4-4. **a)** Sami ja Simo vetävät köydestä vastakkaisiin suuntiin kumpikin 150 N:n voimalla. Pojat pysyvät paikoillaan. Köysi katkaistaan keskeltä ja väliin asetetaan jousivaaka. Pojat vetävät edelleen kumpikin 150 N:n voimalla köyden päistä. Mitä lukemaa jousivaaka näyttää?
b) Simo sitoo köyden päässä olevan jousivaa'an seinässä olevaan koukkuun. Sami vetää köydestä 150 N:n voimalla. Mitä lukemaa jousivaaka näyttää?
c) Siimaa valmistavan yrityksen mukaan siima kestää 200 N:n vetovoiman. Siimaa vedetään kummastakin päästä 150 N:n voimalla. Kestääkö siima?

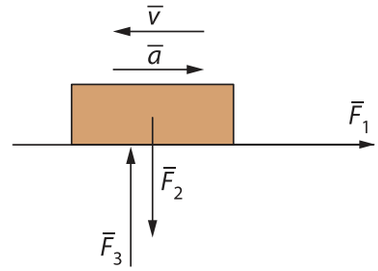
4-5. Nimeä voimat.
a) Kappaletta vedetään lattialla.



b) Pallo putoaa.



c) Kappale liukuu lattialla.



4-6. **a)** Jannika laskeutuu köyden varassa kiipeilyseinämää alas. Minkä kanssa hän on vuorovaikutuksessa? Mitä voimia häneen kohdistuu?

b) Lumilautailija lähestyy hyppyriä. Mitkä voimat vaikuttavat häneen ennen hyppyriä, ilmalennon aikana sekä hypyn jälkeen?

4-7. Piirrä kursivoidun kappaleen voimakuvio seuraavista tilanteista ja nimeä voimat.

a) Pöydällä oleva *kirja*.

b) *Pulkkaa* vedetään vaakasuoralla tiellä vaakasuorassa olevalla narulla niin, että pulkka etenee vakionopeudella. Ilmanvastus on pieni.

c) Vakionopeudella ylöspäin nouseva *raketti*.

d) Seinää työntävä *henkilö*.

e) Seinää vastaan nojaavat *tikapuut*.

4-8. Jääkiekko liukuu jäähallin jäällä.

a) Minkä kanssa jääkiekko on vuorovaikutuksessa?

b) Mitä voimia kiekkoon kohdistuu?

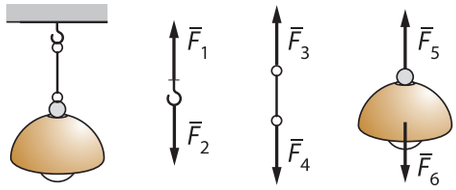
c) Piirrä kiekon voimakuvio.

d) Mitkä ovat kiekkoon kohdistuvien voimien vastavoimat?

4-9. Kun bussi jarruttaa, tunnet ikään kuin jokin voima vetäisi sinua kohti bussin etuosaa. Bussin kiihdyttäessä tunnet vastaavan ilmiön, mutta nyt voima tuntuu suuntautuvan taaksepäin. Kun bussin kulkusuunta muuttuu kaarteessa, tunnet kuin jokin voima vetäisi sinua ulkokaarteen suuntaan. Mistä havaitsemasi ilmiöt johtuvat?

Miten sanonta ”et voi koskea tulematta kosketetuksi” liittyy Newtonin III lakiin?

4-10. Lamppu riippuu kattoon kiinnitetystä koukusta narun varassa. Kuvaan on piirretty koukkuun, naruun ja lamppuun vaikuttavat voimat.



a) Miksi voimat $\vec{F}_3$ ja $\vec{F}_4$ eivät ole voima ja vastavoima?

b) Mikä on voiman $\vec{F}_2$ vastavoima?

c) Mikä on voiman $\vec{F}_6$ vastavoima?

d) Mistä voimat $\vec{F}_5$ ja $\vec{F}_6$ johtuvat?

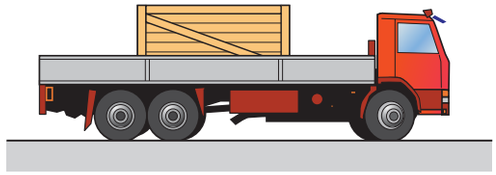
4-11. Kuorma-auton lavalla on laatikko. Piirrä voimat, jotka vaikuttavat laatikkoon seuraavissa tapauksissa. Laatikko ei liu’u lavalla.

a) Auto lähtee liikkeelle kiihdyttäen.

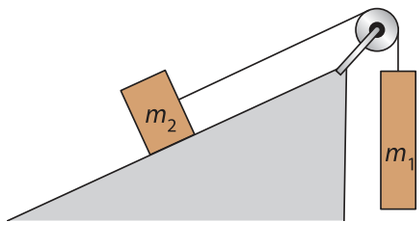
b) Auto liikkuu tasaisella nopeudella eteenpäin.

c) Auton nopeus pienenee.

Merkitse kuviin myös auton nopeuden ja kiihtyvyyden suuntaa ilmaisevat vektorit.



4-12. Piirrä kuvan tilanteessa kappaleiden ($m_1 > m_2$) voimakuviot. Kappaleita yhdistävä lanka on venymätön.



5 Newtonin I ja II laki

! Keskeisiä asioita

- **Newtonin I ja II laki**
- **kokonaisvoima**
- **liikeyhtälö**

T Tutki

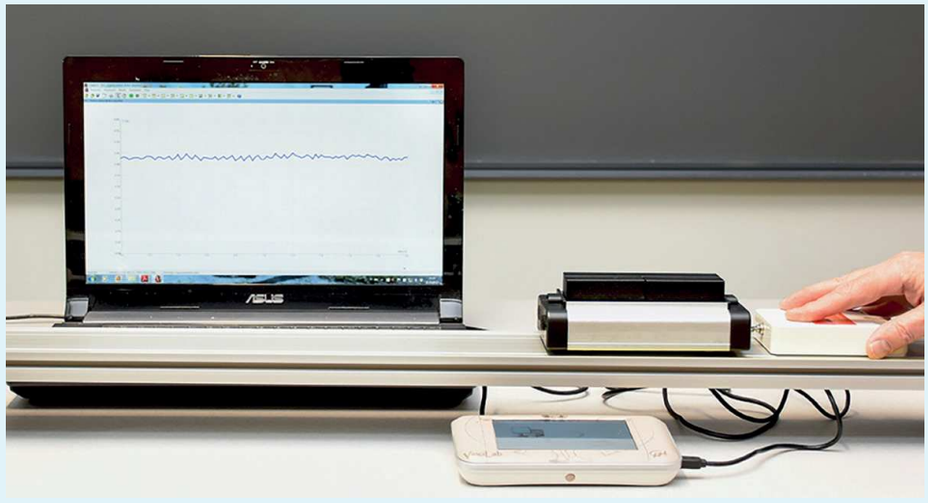
1. Liikkeen jatkuvuus

a) Aseta vaunun päälle magneettipunnus siten, että sen magneettinen pää on ylöspäin. Anna vaunun törmätä kaltevalla tasolla olevaan esteeseen. Tarkkaile punnusta.

b) Käännä magneettipunnus ylösalaisin ja toista koe.

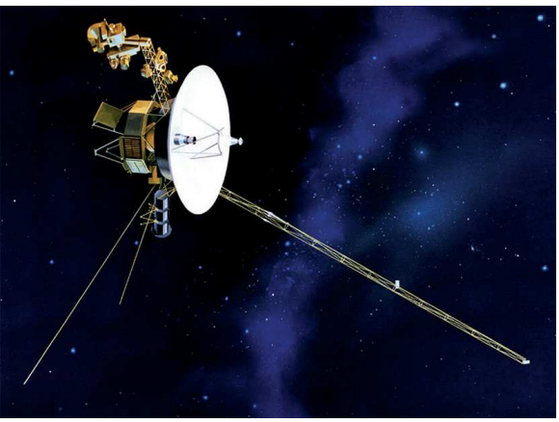
2. Kiihtyvyyden riippuvuus massasta ja voimasta

Tutki vaunuradalla olevan vaunun massan ja vaunuun kohdistuvan kokonaisvoiman vaikutusta vaunun kiihtyvyyteen.



Miten omena liittyy Isaac Newtoniin?

Miksi laivan pysäyttäminen vaatii paljon pidemmän matkan kuin moottoriveneen pysäyttäminen?



Avaruusluotain Voyager I on poistunut Aurinkokunnastamme. Koska Aurinkokunnan ulkopuolella siihen vaikuttaa vain häviävän pieni gravitaatiovoima, se jatkaa liikettään suoraviivaisesti eteenpäin.

Newtonin I laki

Ensimmäisessä tutkimuksessa vaunu pysähtyi nopeasti törmätessään esteeseen. Törmäyksen seurauksena vaunun päällä ollut punnus sinkoutui eteenpäin. Punnus jatkoi liikettä, joka sillä oli ennen törmäystä.

Galileo Galilei totesi, että kappaleen liike jatkuu muuttumattomana, jos kappaleeseen ei vaikuta mikään voima eli jos kappale ei ole vuorovaikutuksessa toisten kappaleiden kanssa. Isaac Newton esitti Galilein ajatuksen tarkemmassa muodossa liikkeen jatkavuuden laissa eli Newtonin I laissa.

Newtonin I laki eli jatkavuuden laki
Jos kappale ei ole vuorovaikutuksessa muiden kappaleiden kanssa, se pysyy paikallaan tai jatkaa liikettään suoraviivaisesti muuttumattomalla nopeudella.

! Kertaa Fysiikka 1, s. 92.

Newtonin I laki kuvaa vuorovaikutuksetonta tilannetta. Luonnossa sellaista tilannetta ei ole koskaan tarkasti olemassa, koska kaikki kappaleet ovat vuorovaikutuksessa aina jonkin kappaleen kanssa. Jatkavuus on kuitenkin likimääräisenä havaittavissa monissa arkielämän tapahtumissa, esimerkiksi liikenteessä.

Liikkuvat kappaleet pyrkivät luonnostaan jatkamaan liikettään ja paikallaan olevat kappaleet pysymään paikallaan. Kun auto pysähtyy nopeasti esimerkiksi törmätessään esteeseen, irtonaiset tavarat sinkoutuvat kohti tuulilasia, samoin matkustaja, joka ei ole kiinnittänyt turvavyötä. Ne jatkavat sitä liikettä, joka niillä oli ennen törmäystä.

Napakelkassa istuva henkilö liikkuu ympyrärataa pitkin. Jos napakelkan aisa irtoaa kelkasta, kelkan liike muuttuu jatkavuuden lain mukaan suoraviivaiseksi (radan tangentin suuntaiseksi).

Newtonin I laki: liike jatkuu, ellei sitä estetä.

Newtonin II laki

!

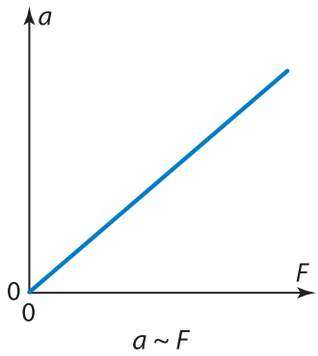
Kertaa kokonaisvoima, Fysiikka 1, s. 84.

Newtonin I lain seuraus on, että kappaleen liikkeen muuttamiseen tarvitaan aina voima. Kappaleen on siis oltava vuorovaikutuksessa ainakin yhden tai useamman kappaleen kanssa. Kappaleen liikkeen muuttuminen riippuu kappaleeseen kohdistuvasta **kokonaisvoimasta**.

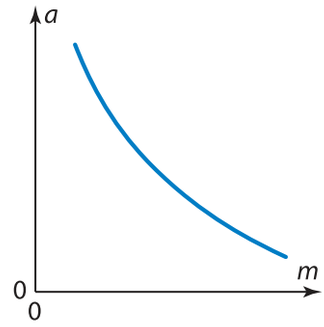
Frisbee on kevyt, ja siksi sen pysäyttäminen onnistuu pienellä voimalla (Newtonin II laki).

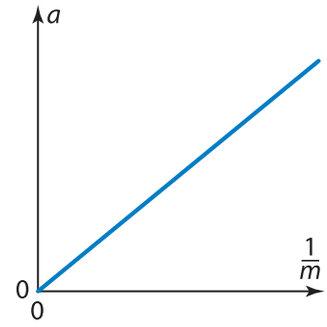
Toisessa tutkimuksessa tutkittiin kappaleen massan, kappaleeseen kohdistuvan voiman ja kiihtyvyyden yhteyttä. Koska alustalla kitka oli pieni ja ilmanvastus vähäinen, vetävä voima oli vaakasuunnassa ainut kappaleeseen vaikuttava voima, eli se oli kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoima.

Kun kappaleen massa m oli vakio, vetävän voiman $\overline{F}$ kasvaessa kiihtyvyys $\overline{a}$ kasvoi. Kappaleen kiihtyvyyden suuruus on suoraan verrannollinen kappaleeseen vaikuttavan voiman suuruuteen eli $a \sim F$. Kun voima kolminkertaistuu, kiihtyvyys kolminkertaistuu.



$a \sim F$





$a \sim \frac{1}{m}$

Kun kappaletta vedettiin vakiovoimalla $\overline{F}$, havaittiin, että kappaleen massan m kasvaessa kiihtyvyys pieneni. Kappaleen kiihtyvyys on käänteen verrannollinen kappaleen massaan eli $a \sim \frac{1}{m}$. Kun kokonaisvoima on vakio, massan kaksinkertaistuessa kiihtyvyys pienenee puoleen.

Newtonin II lain mukaan raskas kappale on vaikeampi saada liikkeelle kuin kevyt kappale.

Newtonin II laki eli dynamiikan peruslaki

- Kappaleen kiihtyvyys $\overline{a}$ on suoraan verrannollinen kappaleeseen vaikuttavaan kokonaisvoimaan $\Sigma\overline{F}$, ja kääntäen verrannollinen kappaleen massaan m:
  $\overline{a} = \frac{\Sigma\overline{F}}{m}$.
- Kiihtyvyyden suunta on sama kuin kokonaisvoiman suunta.

Kokonaisvoiman vaikutus kappaleen liikkeeseen

Kiihtyvässä liikkeessä olevaan lumilautailijaan kohdistuva kokonaisvoima eroaa nollasta.

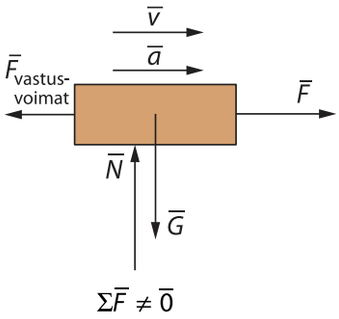
Kappaleeseen kohdistuvalla kokonaisvoimalla tarkoitetaan kaikkien kappaleeseen vaikuttavien voimien yhteisvaikutusta.

Newtonin II laista seuraa, että jos tunnetaan kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima, voidaan päätellä, onko kappaleen liike kiihtyvää vai ei. Vastaavasti kappaleen liikkeestä voidaan päätellä kokonaisvoiman suuruus ja suunta.

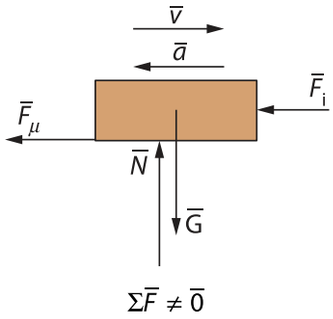
Kokonaisvoima ja liike

Jos kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoima

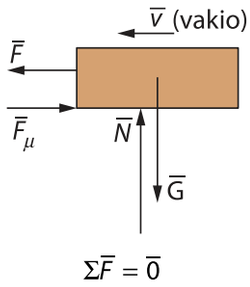
- eroaa nollasta, kappale on Newtonin II lain mukaan kiihtyvässä liikkeessä
- on nolla, kappale on levossa tai tasaisessa liikkeessä.



Kappaleen nopeus kasvaa.

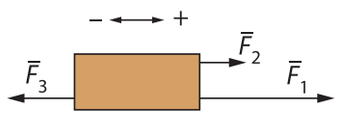


Kappaleen nopeus pienenee.



Kappaleen nopeus on vakio.

E Esimerkki 1



$F_1 = 20$ N, $F_2 = 5$ N, $F_3 = 10$ N

Kuvassa on kappaleeseen vaikuttavat voimat. Oletetaan, että kappale on aluksi levossa. Laske kokonaisvoima ja päättele, pysyykö kappale levossa vai lähteekö se liikkeelle.

Ratkaisu

Kokonaisvoima on $\Sigma\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3$. Koska voimat vaikuttavat vastakkaisiin suuntiin, niiden suunta ilmaistaan etumerkillä. Valitaan suunta oikealle positiiviseksi, jolloin suunta vasemmalle on negatiivinen. Kappaleeseen vaikuttavan kokonaisvoiman suuruus on

$\Sigma F = F_1 + F_2 - F_3 = 20\text{ N} + 5\text{ N} - 10\text{ N} = 15\text{ N}$,

ja koska se on positiivinen, sen suunta on kuvassa oikealle.

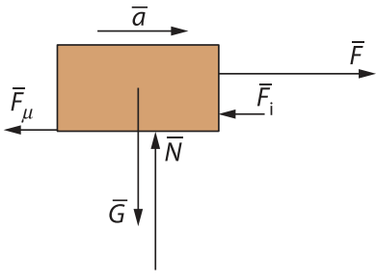
Koska kokonaisvoima eroaa nollasta, kappale lähtee kiihtyvään liikkeeseen oikealle.

Vastaus

Kokonaisvoima on 15 N, suunta oikealle. Kappale lähtee kiihtyvään liikkeeseen.

Voiman ja liikkeen muutoksen yhteys

Kun kappale on kiihtyvässä liikkeessä, Newtonin II lain mukaan kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoima $\sum \overline{F}$ antaa kappaleelle kiihtyvyyden $\overline{a}$ siten, että $\sum \overline{F} = m\overline{a}$. Kun tätä lakia sovelletaan esimerkiksi kappaleeseen kohdistuvien voimien tai kappaleen kiihtyvyyden tutkimiseen, saatua yhtälöä kutsutaan kappaleen liikeyhtälöksi.



Kiihtyvyyden suunta on kokonaisvoiman suunta.

Viereisen kuvan kappale on kiihtyvässä liikkeessä ja kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoima on $\sum \overline{F} = \overline{F} + \overline{F}_\mathrm{i} + \overline{F}_\mu + \overline{N} + \overline{G}$. Newtonin II lakia soveltaen yhtälö $\sum \overline{F} = m\overline{a}$ saadaan muotoon $\overline{F} + \overline{F}_\mathrm{i} + \overline{F}_\mu + \overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}$. Tämä on kappaleen liikeyhtälö.

Kaikki kappaleeseen kohdistuvat voimat vaikuttavat kappaleen liikkeeseen. Voimien suuruuksia laskettaessa liikeyhtälö kirjoitetaan tarvittaessa erikseen esimerkiksi vaakasuuntaisille tai pystysuuntaisille voimille.

Dynamiikassa tutkitaan liikkeen muutoksia ja niiden aiheuttajia.

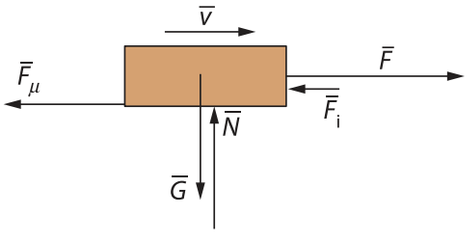
Ohjeita dynamiikan tehtävän ratkaisuun

Pyri noudattamaan seuraavia ohjeita dynamiikan tehtävää ratkaistessasi:

- Pohdi, mitkä **ilmiöt** liittyvät tehtävään.
- Ilmoita ratkaisun alussa tehtävässä annetut lähtöarvot ja mahdolliset taulukosta saatavat (vakio)arvot.
- Esitä ja selitä tehtävässä käyttämäsi lait. Kirjoita käyttämäsi lait vektorimuodossa.
- Piirrä tilanteesta voimakuvio.
- Kirjoita kappaleen liikeyhtälö **vektorimuodossa**.
- Kirjoita vektorimuotoinen yhtälö **skalaarimuotoon** ottamalla huomioon tekemäsi **suuntasopimus**.
- Ratkaise yhtälö tuntemattoman suureen suhteen ja sijoita numeroarvot yksiköineen.
- Käytä laskun välituloksissa riittävästi merkitseviä numeroita vältyäksesi pyöristysvirheiltä.
- Tarkista, että vastauksessa on oikea yksikkö.
- Ilmoita **vastaus** oikealla tarkkuudella.
- Vektorisuureelle, kuten voimalle $\overline{F}$ ja nopeudelle $\overline{v}$, tulee vastauksessa ilmoittaa aina suuruus (eli itseisarvo) ja suunta. Suunnan ilmaisee skalaariyhtälöstä saadun ratkaisun etumerkki.

$\overline{F} + \overline{F}_\mu + \overline{F}_\mathrm{i} = m\overline{a}$
vektorimuoto

$F - F_\mu - F_\mathrm{i} = ma$
skalaarimuoto



Kappale etenee vakionopeudella, koska oikealle ja vasemmalle vaikuttaa yhtä suuri voima, samoin ylös ja alas.

Kun kappale liikkuu vakionopeudella tai on paikallaan, sen kiihtyvyys on $\overline{a} = \overline{0}$. Tällöin yhtälö $\sum \overline{F} = m\overline{a}$ saa muodon $\sum \overline{F} = \overline{0}$. Tässä tilanteessa kappaleeseen voi vaikuttaa useita voimia, mutta ne kumoavat toisensa.

E Esimerkki 2

Moottorikelkkaan vaikuttaa painon ja tukivoiman lisäksi kaksi voimaa

- 1350 N:n suuruinen liikkeen suuntainen työntövoima, jonka lumihanki kohdistaa telaketjuun
- 750 N:n suuruinen vastusvoima (kitka ja ilmanvastus).

Kelkan kokonaismassa (kelkka ja kuljettaja) on 250 kg.

a) Piirrä tilanteesta voimakuvio.

b) Laske moottorikelkan kiihtyvyys.

!

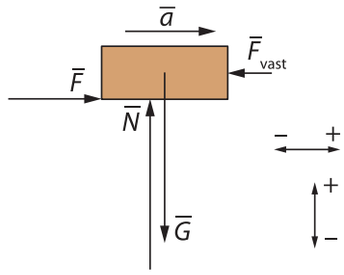
Huomaa, että voimat kirjoitetaan aluksi vektorimuodossa!

Ratkaisu

$F = 1350\ \text{N}$, $F_{\text{vast}} = 750\ \text{N}$, $m = 250\ \text{kg}$

a) Moottorikelkkaan kohdistuvat voimat ovat paino $\overline{G}$, pinnan tukivoima $\overline{N}$, lumen telaketjuun kohdistama työntävä voima $\overline{F}$ ja vastusvoima $\overline{F}_{\text{vast}}$. Kelkkaan kohdistuva kokonaisvoima on

$$\sum \overline{F} = \overline{F} + \overline{F}_{\text{vast}} + \overline{N} + \overline{G}.$$



Voimakuvio.

b) Newtonin II lakia soveltaen $\sum \overline{F} = m\overline{a}$ saadaan muotoon $\overline{F} + \overline{F}_{\text{vast}} + \overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}$.

Koska kelkka ei liiku pystysuunnassa, Newtonin II lain mukaan on $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{N} + \overline{G} = \overline{0}$. Skalaariyhtälö on $N - G = 0$, josta $N = G$ eli vastakkaisiin suuntiin vaikuttavat paino $\overline{G}$ ja pinnan tukivoima $\overline{N}$ ovat yhtä suuret ja kumoavat toisensa.

$$\overline{F} + \overline{F}_{\text{vast}} = m\overline{a}$$

Kirjoitetaan liikeyhtälö vaakasuunnassa.

$$F - F_{\text{vast}} = ma$$

Valitaan suunta oikealle positiiviseksi ja kirjoitetaan skalaariyhtälö.

$$a = \frac{F - F_{\text{vast}}}{m}$$

Ratkaistaan kiihtyvyys.

$$= \frac{1350\ \text{N} - 750\ \text{N}}{250\ \text{kg}} = 2{,}4\ \text{m/s}^2.$$

Sijoitetaan lukuarvot yksiköiden kanssa.

Vastaus

Moottorikelkan saama kiihtyvyys on $2{,}4\ \text{m/s}^2$ työntövoiman suuntaan.

Kirjoitetaan vastaus.

E Esimerkki 3

Pekka astuu hissiin. Pekan massa on 55 kg ja hissin kiihtyvyyden suuruus 2,0 m/s^2. Kuinka suurella tukivoimalla hissin lattia vaikuttaa Pekkaan, kun hissi

a) lähtee levosta liikkeeseen ylöspäin

b) hidastaa vauhtiaan ennen pysähtymistään ylhäällä?

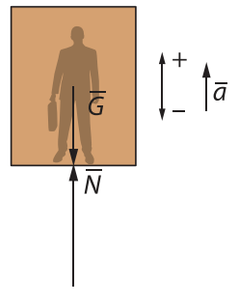
Ratkaisu

$m = 55$ kg, $a = 2{,}0$ m/s^2, $g = 9{,}81$ m/s^2

!

Huomaa, että vaikka voimakuviota ei erikseen pyydetä, se on piirrettävä. Voimakuvio on oleellinen osa ratkaisua.

a) Piirretään voimakuvio. Hissi nousee ylöspäin. $\overline{G}$ on Pekkaan kohdistuva paino ja $\overline{N}$ hissin lattian tukivoima. Valitaan hissin liikesuunta eli suunta ylös positiiviseksi suunnaksi.



!

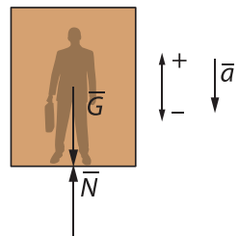
Jos Pekka seisoisi hississä henkilövaa'an päällä, mitä vaaka näyttäisi?

Pekkaan kohdistuva kokonaisvoima on $\Sigma\overline{F} = \overline{N} + \overline{G}$. Newtonin II lakia soveltaen $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ saadaan muotoon $\overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}$. Skalaariyhtälöstä $N - G = ma$ saadaan lattian aiheuttaman tukivoiman suuruudeksi

$N = ma + G = ma + mg = m(a + g)$

$= 55 \text{ kg} \cdot (2{,}0 \text{ m/s}^2 + 9{,}81 \text{ m/s}^2) \approx 650 \text{ N}.$

b) Piirretään voimakuvio. Nyt hissi jarruttaa eli kiihtyvyyden suunta on liikkeen vastainen eli alas. Paino on suurempi kuin tukivoima. Valitaan suunta ylös positiiviseksi.



!

Jos Pekka seisoisi hississä henkilövaa'an päällä, mitä vaaka näyttäisi?

Newtonin II lakia soveltaen $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ saadaan muotoon $\overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}$. Skalaariyhtälöstä $N - G = -ma$ saadaan lattian tukivoimaksi

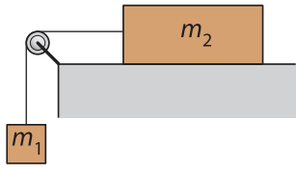
$N = -ma + mg = m(-a + g)$

$= 55 \text{ kg} \cdot (-2{,}0 \text{ m/s}^2 + 9{,}81 \text{ m/s}^2) \approx 430 \text{ N}.$

Vastaus

Tukivoiman suuruus on **a)** 650 N **b)** 430 N.

E Esimerkki 4



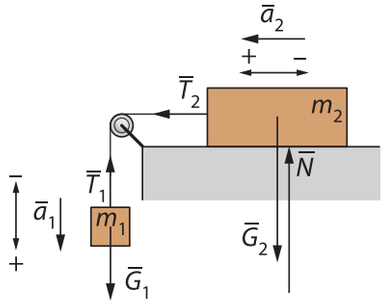
Punnus on kiinnitetty kuvan mukaisesti venymättömän langan välityksellä vaakasuoralla alustalla olevaan puupalaan. Punnuksen massa on 55 g ja puupalan 125 g. Punnus päästetään putoamaan langan varassa. Oletetaan liikevastukset pieniksi. Laske

a) punnuksen ja puupalan kiihtyvyydet

b) langan jännitysvoiman suuruus.

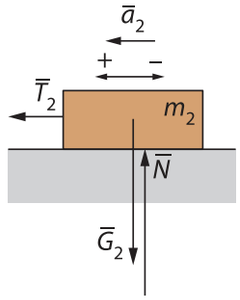
Ratkaisu

$m_1 = 0{,}055$ kg, $m_2 = 0{,}125$ kg, $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$



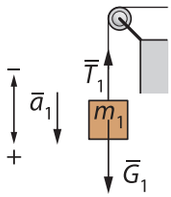
Kun liikevastukset ovat pieniä, punnukseen kohdistuvat voimat ovat paino $\bar{G}_1$ ja langan jännitysvoima $\bar{T}_1$. Puupalaan kohdistuvat voimat ovat paino $\bar{G}_2$, alustan tukivoima $\bar{N}$ ja langan jännitysvoima $\bar{T}_2$.

Koska lanka on venymätön, se kohdistaa molempiin kappaleisiin yhtä suuren jännitysvoiman, joten $|\bar{T}_1| = |\bar{T}_2| = T$. Koska punnus ja puupala liikkuvat langan takia yhdessä, kummankin kiihtyvyys on yhtä suuri eli $|\bar{a}_1| = |\bar{a}_2| = a$. Kappaleita voidaan tarkastella erillisinä systeemeinä.



Tutkitaan ensin puupalaa: vaakasuorassa suunnassa Newtonin II lakia soveltaen saadaan $\Sigma\bar{F} = m_2\bar{a}_2$, josta $\bar{T}_2 = m_2\bar{a}_2$. Sovitaan suunta vasemmalle positiiviseksi, jolloin saadaan skalaariyhtälö $T = m_2a$.

Punnus: pystysuunnassa Newtonin II lakia soveltaen saadaan $\Sigma\bar{F} = m_1\bar{a}_1$, josta $\bar{T}_1 + \bar{G}_1 = m_1\bar{a}_1$. Valitaan suunta alas positiiviseksi.



Skalaariyhtälö on $-T + m_1g = m_1a$. Sijoitetaan tähän yhtälöön $T = m_2a$:

$$-m_2a + m_1g = m_1a$$
$$m_1g = m_1a + m_2a$$
$$m_1g = a(m_1 + m_2).$$

Punnuksen ja puupalan kiihtyvyyden suuruus liikesuunnissaan on

$$a = \frac{m_1g}{m_1 + m_2} = \frac{0{,}055\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{0{,}055\,\text{kg} + 0{,}125\,\text{kg}} = 2{,}9975\,\text{m/s}^2 \approx 3{,}0\,\text{m/s}^2.$$

b) Langan jännitysvoiman suuruus on

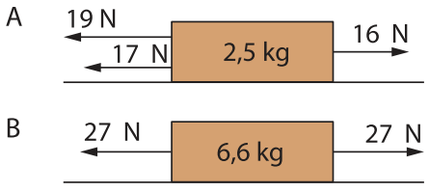
$$T = m_2a = 0{,}125\,\text{kg} \cdot 2{,}9975\,\text{m/s}^2 \approx 0{,}37\,\text{N}.$$

Vastaus

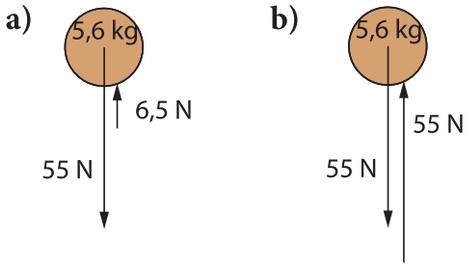
a) Kiihtyvyys on 3,0 m/s^2. **b)** Jännitysvoima on 0,37 N.

TEHTÄVÄT

5-1. Määritä kummassakin tilanteessa A ja B
a) kappaleeseen kohdistuva alustan suuntainen kokonaisvoima
b) kappaleen kiihtyvyys.
Kuviin ei ole piirretty kappaleen painoa eikä pinnan tukivoimaa.



5-2. Laske kummankin pallon kiihtyvyys.



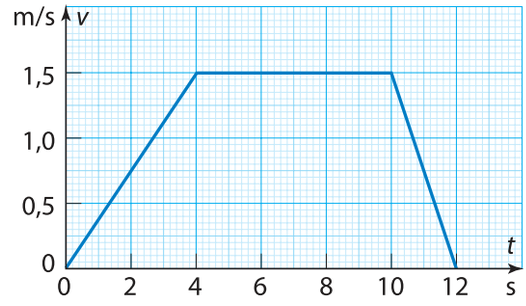
5-3. Vaakasuoraan liikkuvaan kappaleeseen vaikuttavan liikkeen suuntaisen vetovoiman suuruus on 755 N. Liikettä vastustaa kitka, jonka suuruus on 620 N. Kappaleen massa on 35 kg.
a) Piirrä tilanteeseen liittyvä voimakuvio.
b) Kuinka suuri on kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoima?
c) Laske kappaleen kiihtyvyys.

5-4. Abiturientti mittasi hissin kiihtyvyyttä digitaalisen henkilövaa'an avulla. Kun hän seisoi vaa'alla hissin ollessa levossa, vaaka näytti lukemaa 62,0 kg. Hissin liikkuessa alaspäin vaa'an lukema oli 73,4 kg. Mikä oli hissin kiihtyvyys sillä hetkellä?

5-5. Elsa seisoo kuumailmapallon korissa, joka lähtee alaspäin kiihtyvyydellä 1,5 m/s^2.
a) Mitkä voimat vaikuttavat Elsaan?
b) Kuinka suurella voimalla Elsa, jonka massa on 55 kg, painaa korin pohjaa?

5-6. Nosturilla ylöspäin nostettavan betonielementin massa on 480 kg ja nopeus riippuu ajasta oheisen kuvion mukaisesti.

Laske kannatinvaijeria jännittävä voima liikkeen eri vaiheissa.

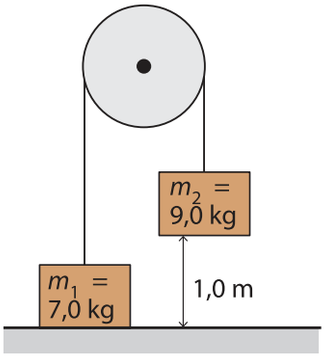


5-7. Hissin ja siinä olevien ihmisten kokonaismassa on 850 kg. Hissin maksimikiihtyvyys on 2,4 m/s^2. Laske hissivaijeria jännittävä voima, kun hissi
a) lähtee levosta maksimikiihtyvyydellä liikkeeseen ylöspäin
b) jarruttaa maksimikiihtyvyydellä ennen pysähtymistään ylhäällä.

5-8. Henkilöautoon on kytketty perävaunu. Vaakasuoralla tiellä perävaunua vetäen henkilöauton kiihtyvyys on 0,50 m/s^2. Perävaunun liikettä vastustava voima on 190 N, ja auton liikettä vastustaa 35 N:n voima. Auton massa on 1450 kg ja perävaunun massa 1050 kg. Voima, jolla auto vetää perävaunua on
a) 750 N **b)** 1480 N **c)** 720 N.

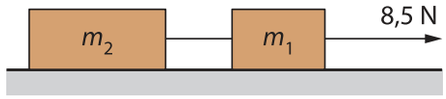
5-9. Moottorikelkka vetää vaakasuoralla alustalla 250 N:n suuruisella voimalla rekeä, jonka kokonaismassa on 65 kg. Reen perään on kiinnitetty vaakasuoralla narulla pulkka, jonka kokonaismassa kuorma mukaan lukien on 8,5 kg. Kuinka suuri on naruun vaikuttava voima? Reen ja pulkan liikevastukset ovat pienet.

5-10. Kaksi kappaletta on ripustettu venymättömällä langalla kuvan mukaisesti. Vastusvoimat ja rullan massa ovat pienet.



a) Laske kappaleiden kiihtyvyys ja langan jännitysvoima, kun systeemi päästetään liikkumaan vapaasti.
b) Millä nopeudella raskaampi kappale törmää lattiaan?

5-11. Vaakasuoralla vaunuradalla on kaksi toisiinsa venymättömällä langalla kytkettyä vaunua. Oletetaan kitka pieneksi, samoin vaunuihin kohdistuva ilmanvastus. Vaunujen massat ovat $m_1 = 230$ g ja $m_2 = 330$ g. Oikeanpuoleiseen vaunuun kohdistuu radan suuntainen 8,5 N:n suuruinen voima.



a) Laske systeemin kiihtyvyys.
b) Laske vaunujen välisen langan jännitysvoima.

6 Voimien yhteisvaikutus

! Keskeisiä asioita

- **voiman komponentit**
- **voimien yhteisvaikutus eli resultantti**

T Tutki

1. Lankojen jännitysvoimat

a) Aseta punnus kahteen pystysuuntaiseen jousivaakaan. Väännä jousivaa'at vähitellen kuvan asentoon. Mitä huomaat jousivaakojen lukemista?

b) Lue jousivaakojen lukemat ja mittaa vaakojen suuntakulmat. Piirrä tilanteesta vektorikuvio ja määritä voimien resultantti.

c) Toista mittaus epäsymmetrisessä tilanteessa. Nosta esimerkiksi toisen jousivaa'an kiinnityskohta korkeammalle.

2. Tukivoima ja kalteva taso

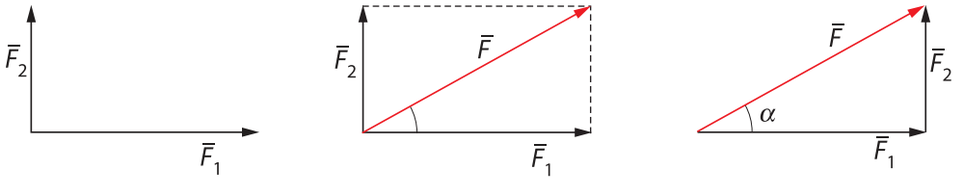
Aseta (digitaalinen) vaaka pöydälle ja teippaa vaakaan kiinni punnus. Kallista vaakaa tai pöytää. Vertaa vaa'an lukemaa vaakasuoralla ja hieman kallistetulla alustalla.

Kuvissa köysien ja ketjujen jännitysvoimat ovat vinot. Palauta mieleen suorakulmaisen kolmion trigonometria sekä vinokulmaisen kolmion sini- ja kosinilause.

Mihin suuntaan koirat vetävät isäntäänsä?

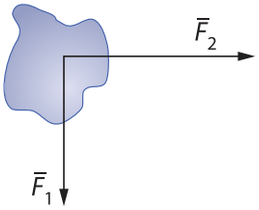
Voimien yhdistäminen

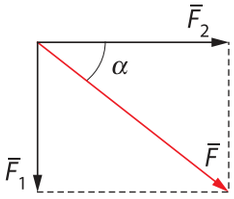
Usein tarkastellaan tilannetta, jossa kappaleeseen vaikuttaa eri suuntiin suuntautuvia voimia. Tavoitteena on selvittää voimien yhteisvaikutus.



Jos yhdistettävät voimat $\overline{F}_1$ ja $\overline{F}_2$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, voimien yhteisvaikutuksen eli **resultantin** suuruus lasketaan Pythagoraan lauseen avulla. Resultantin **suuruus** on $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$ ja sen **suuntakulma** α saadaan yhtälöstä $\tan\alpha = \dfrac{F_2}{F_1}$. Resultantin merkintä voi olla $\overline{F}$ tai $\Sigma\overline{F}$.

E Esimerkki 1





Aluksi levossa olevaan kappaleeseen vaikuttaa kuvan mukaisesti 170 N:n suuruinen voima alas ja 210 N:n suuruinen voima oikealle. Laske voimien resultantti. Oletetaan, että muita kappaleeseen kohdistuvia voimia ei ole.

Ratkaisu

$F_1 = 170\ \text{N}$, $F_2 = 210\ \text{N}$

Koska voimat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, voimien resultantin suuruus on

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{(170\ \text{N})^2 + (210\ \text{N})^2} \approx 270\ \text{N}.$$

Resultantin suuntakulma saadaan yhtälöstä

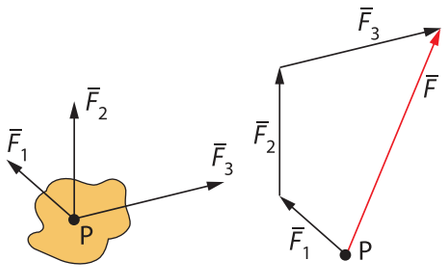
$$\tan\alpha = \frac{F_1}{F_2} = \frac{170\ \text{N}}{210\ \text{N}}, \text{ josta kulma } \alpha \approx 39°.$$

Vastaus

Resultantin suuruus on 270 N, suuntakulma 39°.

!

Huomaa, että kappaleella on resultantin suuntainen kiihtyvyys.

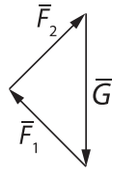


Kuvan kappaleeseen vaikuttavat voimat $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ ja $\overline{F}_3$.

Viereisessä kuvassa kappaleeseen kohdistuu kolme eri suuntiin osoittavaa voimaa. Voimien yhteisvaikutus (vektorisumma) saadaan, kun piirretään voimavektorit peräkkäin ja yhdistetään alkupiste viimeisen vektorin kärkeen. Jos vektorisummana muodostunut resultantti eroaa nollavektorista ($\Sigma\overline{F} \neq \overline{0}$), kappale on kiihtyvässä liikkeessä. Jos vektorisummana muodostunut resultantti on nollavektori $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$, kappale on levossa tai liikkuu vakionopeudella.

Tasapaino

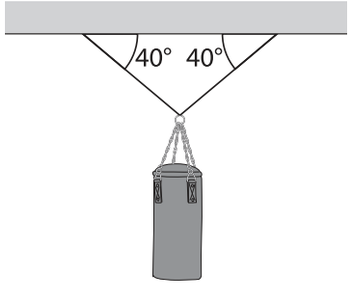
Tutkimuksessa kahden jousivaa'an varaan ripustettu punnus pysyi paikoillaan eli sen kiihtyvyys oli nolla. Newtonin II lain mukaan punnukseen vaikuttavien voimien vektorisumma eli kokonaisvoima on silloin nolla. Yhtälöä $\sum \overline{F} = \overline{0}$ sanotaan voimien **tasapainoehdoksi**. Täydellinen tasapaino vaatii myös, ettei voimilla ole kappaleeseen vääntövaikutusta, joka saisi kappaleen pyörimään. Tähän palataan luvussa 10.



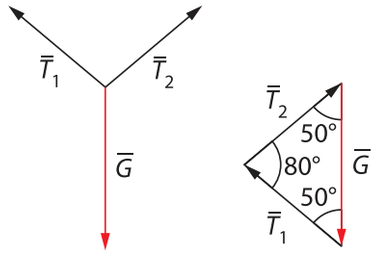
Vektorisummana muodostuu nollavektori: $\Sigma\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{G} = \overline{0}$.

Viereisen kuvan tapaista voimakolmiota kannattaa käyttää, kun voimia on kolme ja voimien vektorisumma on nollavektori. Jos kolmio on suorakulmainen, ratkaisussa voi käyttää apuna sini-, kosini- tai tangenttifunktiota.

E Esimerkki 2



Nyrkkeilysäkin massa on 45 kg. Se on ripustettu kattoon kahden köyden varaan kuvan mukaisesti. Laske kummankin köyden jännitysvoiman suuruus. Köysien massa on pieni.

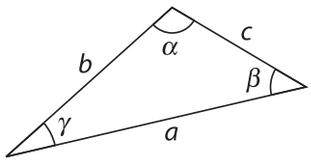


Voimakuvio.

Ratkaisu

$m = 45$ kg, $\alpha = 50°$, $g = 9{,}81$ m/s^2

Säkki on paikallaan, joten köysien yhtymäkohdassa vaikuttavien voimien summa on nolla ($\sum \overline{F} = \overline{0}$). Koska köysien massat ovat pienet, niitä ei tarvitse ottaa huomioon. Köysien jännitysvoimat $\overline{T}_1$ ja $\overline{T}_2$ ovat köysien suuntaiset ja symmetrian perusteella suuruudeltaan yhtä suuret eli $|\overline{T}_1| = |\overline{T}_2| = T$.



Sinilause:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

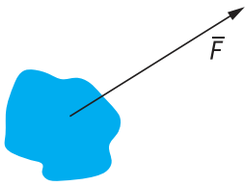
Jännitysvoiman suuruus voidaan laskea sinilauseen avulla. Sinilausetta soveltaen saadaan $\frac{T}{\sin 50°} = \frac{G}{\sin 80°}$, josta köyden jännitysvoiman suuruus on

$$T = \frac{mg\sin 50°}{\sin 80°} = \frac{45\text{ kg} \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 \cdot \sin 50°}{\sin 80°} \approx 340\text{ N}.$$

Vastaus

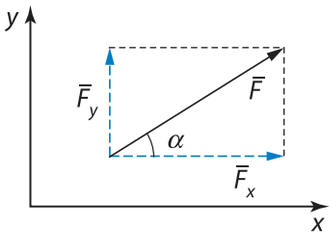
Kummassakin köydessä vaikuttaa 340 N:n suuruinen jännitysvoima.

Voiman jakaminen komponentteihin



Voiman komponentit ovat matemaattisia apusuureita, ne eivät ole todellisia voimia; siksi voiman komponentit piirretään voimakuvioihin usein katkoviivoilla.

Kun tarkastellaan vinon voiman vaikutusta kappaleeseen, voima jaetaan usein koordinaattiakselien suuntaisiin komponentteihin tai kaltevan tason suuntaiseen ja sitä vastaan kohtisuoraan komponenttiin.



$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}, \text{ joten } F_x = F\cos\alpha.$$

$$\sin\alpha = \frac{F_y}{F}, \text{ joten } F_y = F\sin\alpha.$$

$$\tan\alpha = \frac{F_y}{F_x}$$

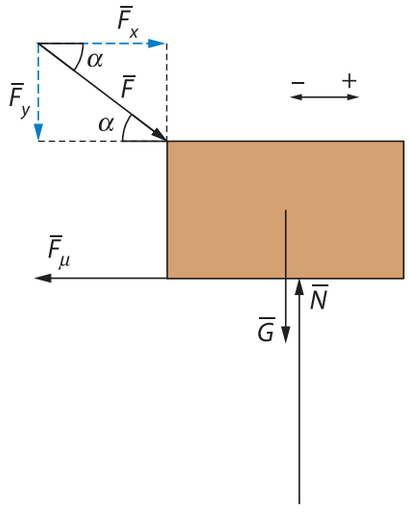
Huomaa, että kulman α paikka määrää F_x:n ja F_y:n muodon: nyt $F_x = F\cos\alpha$ ja $F_y = F\sin\alpha$.

Voiman komponentit

- Voima $\overline{F}$ on komponenttiensa summa: $\overline{F} = \overline{F}_x + \overline{F}_y$.
- Voiman $\overline{F}$ suuruus on $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$.

E Esimerkki 3

Muuttomies työntää laatikkoa 210 N:n voimalla vaakasuoralla alustalla suoraan eteenpäin vakionopeudella. Laatikkoon kohdistuva voima muodostaa 35°:n kulman vaakatason kanssa. Ilmanvastus on pieni.
a) Laske voiman vaakasuoran ja pystysuoran komponentin suuruus.
b) Kuinka suuri on liikettä vastustava kitka?



Ratkaisu

$F = 210$ N, $\alpha = 35°$

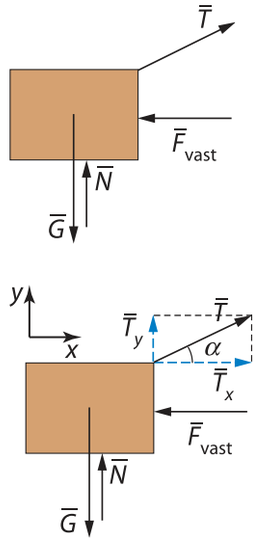
a) Voiman $\overline{F}$ komponenttien suuruudet ovat
$F_x = F\cos\alpha = 210\text{ N} \cdot \cos 35° \approx 170\text{ N}$
$F_y = F\sin\alpha = 210\text{ N} \cdot \sin 35° \approx 120\text{ N}.$

b) Koska laatikko liikkuu vakionopeudella, Newtonin II lain mukaan kitkan suuruus on yhtä suuri kuin työntävän voiman vaakasuoran komponentin suuruus, mutta vastakkaissuuntainen. Kitkan suuruus on $F_\mu = 170$ N ja suunta kuvassa vasemmalle.

Vastaus

a) $F_x = 170$ N, $F_y = 120$ N **b)** $F_\mu = 170$ N, suunta vasemmalle.

E Esimerkki 4



Voimakuvio. Huomaa *x*- ja *y*-akselien käyttö suuntasopimuksessa.

!

Huomaa, että paino ja pinnan tukivoima ovat nyt erisuuruiset. Tämä johtuu siitä, että myös vetävä voima $\overline{T}$ kannattelee pulkkaa.

Isä vetää lastaan vakionopeudella pulkassa, jonka kokonaismassa (pulkka ja lapsi) on 26 kg. Pulkkaan vaikuttaa 31 N:n suuruinen vastusvoima, joka koostuu kitkasta ja ilmanvastuksesta. Vetävä voima muodostaa 43°:n kulman vaakatason kanssa. Laske

a) vetävän voiman suuruus

b) pinnan tukivoiman suuruus.

Ratkaisu

$m = 26$ kg, $\alpha = 43°$, $g = 9{,}81$ m/s^2, $F_{vast} = 31$ N

a) Piirretään voimakuvio. Koska pulkan liike on tasaista, Newtonin II lain mukaan on $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{T} + \overline{F}_{vast} + \overline{N} + \overline{G} = \overline{0}$.

Koska vetävä voima $\overline{T}$ on vino, jaetaan voima $\overline{T}$ vaaka- ja pystykomponentteihin. Kirjoitetaan liikeyhtälö tason suunnassa ja tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa.

Koska liike on tasaista, Newtonin II lain mukaan tason suunnassa on $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{T}_x + \overline{F}_{vast} = \overline{0}$. Kun suunta oikealle valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $T_x - F_{vast} = 0$.

Vetävän voiman suuruus saada yhtälöstä

$T_x = F_{vast}$ eli $T \cos \alpha = F_{vast}$, joten voiman $\overline{T}$ suuruus on

$$T = \frac{F_{vast}}{\cos \alpha} = \frac{31\,\text{N}}{\cos 43°} = 42{,}3872\,\text{N} \approx 42\,\text{N}.$$

b) Koska pulkka liikkuu tason suuntaisesti, sillä ei ole kiihtyvyyttä tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa. Siksi tässä suunnassa Newtonin II lain mukaan on $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{T}_y + \overline{N} + \overline{G} = \overline{0}$. Kun suunta ylös valitaan positiiviseksi, saadaan skalaarimuoto

$T_y + N - G = 0$.

Tukivoiman suuruus on

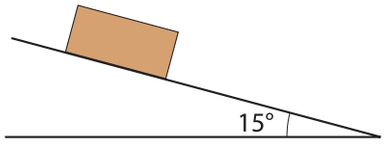
$N = G - T_y = mg - T \sin \alpha$

$= 26\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 - 42{,}3872\,\text{N} \cdot \sin 43° \approx 230\,\text{N}.$

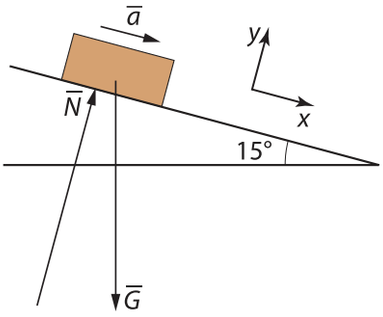
Vastaus

a) Vetävän voiman suuruus on 42 N. **b)** Tukivoiman suurus on 230 N.

E Esimerkki 5



Vaunurataa on kallistettu 15°:n kulmaan vaakatasosta. Radan yläpäähän asetettu vaunu päästetään liikkumaan sitä pitkin. Vaunun massa on 320 g. Vaunuradalla kitka on hyvin pieni, samoin vaunuun kohdistuva ilmanvastus. Laske vaunun kiihtyvyys.



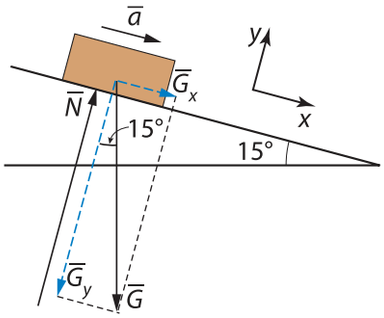
Vaunuun kohdistuvat voimat.

Ratkaisu

$\alpha = 15°$, $m = 320$ g, $g = 9{,}81$ m/s^2

Piirretään vaunuun kohdistuvat voimat. Koska kitka ja ilmanvastus ovat hyvin pieniä, niitä ei oteta huomioon. Valitaan koordinaatisto siten, että x-akseli on tason suunnassa ja y-akseli on kohtisuorassa tasoa vastaan.

Jaetaan vaunuun kohdistuva paino $\bar{G}$ radan suuntaiseen komponenttiin $\bar{G}_x$ ja rataa vastaan kohtisuoraan komponenttiin $\bar{G}_y$.



Koska painon $\bar{G}$ komponentti $\bar{G}_y$ on kohtisuorassa kaltevaa tasoa vastaan ja paino $\bar{G}$ on kohtisuorassa vaakatasoa vastaan, painon $\bar{G}$ ja sen komponentin $\bar{G}_y$ välinen kulma on yhtä suuri kuin tason kaltevuuskulma.

Newtonin II lain mukaan kaltevan tason suunnassa on

$$\sum \bar{F} = m\bar{a} \text{ eli } \bar{G}_x = m\bar{a},$$

jossa $\bar{a}$ on kallistetun vaunuradan tason suuntainen kiihtyvyys.

!

Huomaa, että vaunun massa m supistuu.

Valitaan tason suunta alas positiiviseksi. Skalaariyhtälöstä $G_x = ma$ saadaan vaunun kiihtyvyyden suuruudeksi

$$a = \frac{G_x}{m} = \frac{G\sin\alpha}{m} = \frac{mg\sin\alpha}{m} = g\sin\alpha$$
$$= 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot \sin 15° \approx 2{,}5 \text{ m/s}^2.$$

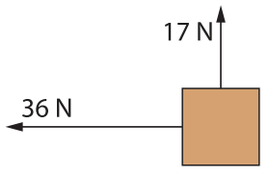
Kiihtyvyys on vaunuradan tason suuntainen.

Vastaus

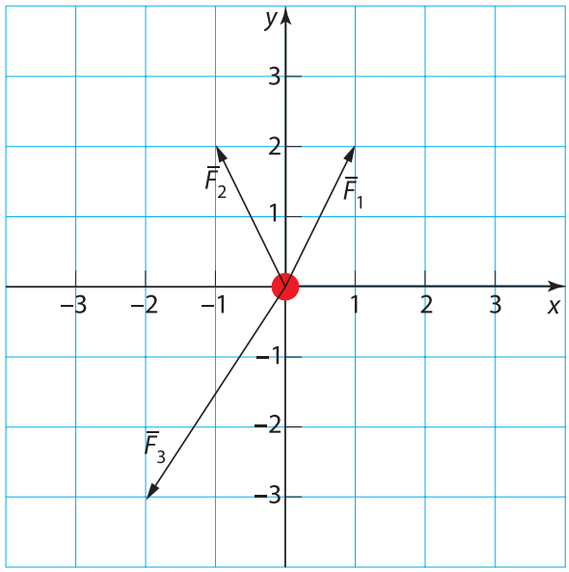
Kiihtyvyys on 2,5 m/s^2 vaunuradan suuntaan.

TEHTÄVÄT

6-1. Kuvan kappaleen massa on 25 kg. Kuvaan on merkitty kaikki kappaleeseen vaikuttavat voimat. Laske kappaleen kiihtyvyys.



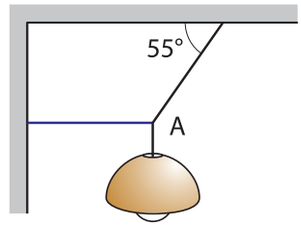
6-2. Origossa olevaan kappaleeseen vaikuttaa kolme voimaa kuvan mukaisesti. Kappaleen massa on 0,50 kg. Yksikkövektori vastaa 1,0 N:n suuruista voimaa. Jaa kukin voima vaaka- sekä pystykomponentteihin ja laske kappaleen kiihtyvyys.



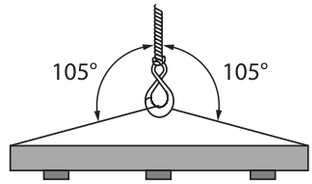
6-3. Varsaa vedetään suosta kahdella köydellä. Köysien välinen kulma on 15° ja vetävien voimien suuruudet ovat 350 N ja 250 N. Määritä voimien resultantin suuruus graafisesti ja laskemalla.

6-4. Nostokurjen köydessä riippuu sementtisäkki, jonka massa on 120 kg. Säkki työnnetään vaakasuoralla voimalla sivulle niin, että köysi muodostaa 25°:n kulman pystysuuntaan nähden. Tarvittavan voiman suuruus on
a) 56 kg **b)** 550 N **c)** 56 N.

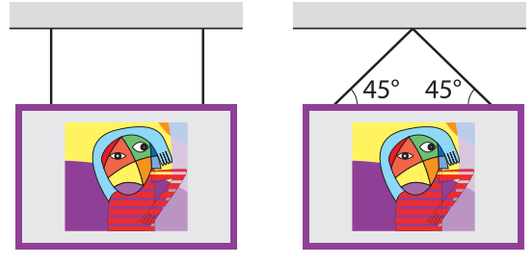
6-5. Ravintolan kattolamppu halutaan asettaa pöydän yläpuolelle vetämällä lamppua seinää kohti vaakasuoran nailonsiiman avulla. Tällöin lampun sähköjohto muodostaa kattoon nähden 55°:n kulman. Ravintolasta löytyy ohutta nailonsiimaa, jonka vetolujuus on valmistajan mukaan 40 N. Kestääkö nailonsiima, kun lampun massa on 7,5 kg? Sähköjohdon ja nailonsiiman massaa ei oteta huomioon.



6-6. Nostolavan siirtämiseksi sen reunoihin on kiinnitetty vaijeri kuvan mukaisesti. Vaijeri kestää 12 kN:n voiman. Kuinka suuri lavan ja kuorman massa saa korkeintaan olla, jotta vaijeri kestäisi noston?

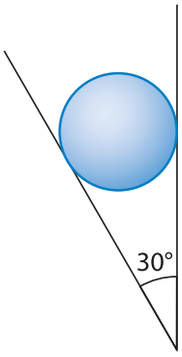


6-7. Taulu voidaan ripustaa seinälle kuvan mukaisesti kahdella eri tavalla. Taulun massa on 6,3 kg. Kummassa tapauksessa taulun kiinnitysnarujen jännitysvoimat ovat suuremmat?



6-8. Katulamput on ripustettu kuvan mukaisesti. Vaijerin osa AB on vaakasuorassa, ja kummankin lampun massa on 7,50 kg. Laske vaijerin jännitysvoima eri kohdissa.

6-9. V-muotoisen kourun toinen seinä on pystysuora ja toinen muodostaa 30°:n kulman pystysuoran kanssa. Kourussa on pallo, jonka massa on 4,7 kg. Kuinka suurilla voimilla pallo vaikuttaa seiniin?

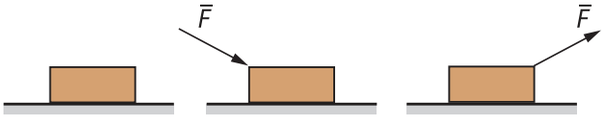


6-10. Kelkkailussa käytettävän kelkan jalasten luisto-ominaisuuksia testattiin hyvin sileäksi jäädytetyssä rinteessä. Rinteen korkeusero oli 17 m ja pituus 39 m. Kelkka lähti liikkeelle levosta. Kitkan voi olettaa hyvin pieneksi. Kelkan massa on 42 kg. Laske

a) kelkkaan kohdistuvan painon rinteen suuntaisen komponentin suuruus

b) kelkan nopeus rinteen alaosassa.

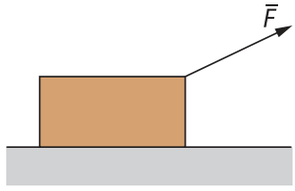
6-11. Vertaa kappaleeseen kohdistuvaa painoa ja pinnan tukivoiman suuruutta kuvien tilanteissa. Piirrä voimakuvio kussakin tilanteessa.



6-12. Laatikko, jonka massa on 4,0 kg, on levossa vaakasuoralla pöydällä. Siihen vaikuttaa 35 N:n suuruinen vetävä voima, joka muodostaa 25°:n kulman vaakatason kanssa.

a) Laske vetovoiman komponenttien suuruudet.

b) Laske pöydän tukivoiman suuruus.



6-13. Kalle työntää pahvilaatikkoa vakionopeudella vaakasuoralla pihalla vastatuuleen. Työnnössä käytettävä voima suuntautuu vinosti alas ja se muodostaa vaakasuunnan kanssa 39 asteen kulman. Voiman suuruus on 350 N. Laatikkoon kohdistuvan ilmanvastuksen suuruus on 25 N. Laatikon massa on 47 kg. Laske

a) laatikkoon kohdistuvan kitkan suuruus

b) pinnan tukivoiman suuruus.

6-14. Sähköjunassa matkustava abiturientti päätti mitata junan kiihtyvyyden langassa riippuvan avainnipun avulla. Junan kiihdyttäessä hän arvioi ripustuslangan muodostavan 15 asteen kulman pystysuoraan nähden. Kuinka suuri oli tämän perusteella junan kiihtyvyys? Piirrä selkeä voimakuvio, josta ilmenevät myös nopeuden ja kiihtyvyyden suunnat. [K2010/5]

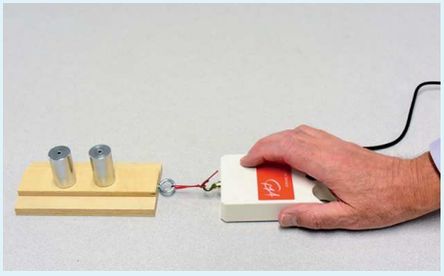
7 Kitka

Miten kitka liittyy hiihtämiseen?

! Keskeisiä asioita

- **kitka**
- **lepokitka**
- **lähtökitka**
- **liukukitka**
- **kitkakerroin**

T Tutki



1. Kitkan määrittäminen

Aseta kappaleen päälle punnus. Kiinnitä tietokoneeseen kytketty voima-anturi kappaleeseen. Vedä voima-anturilla kappaletta ja kasvata varovasti koko ajan vetävää voimaa. Kun kappale lähtee liikkeelle, jatka vetämistä vielä hetken aikaa siten, että kappaleen liike on tasaista. Tutki tietokoneen ruudulle syntynyttä kuvaajaa.

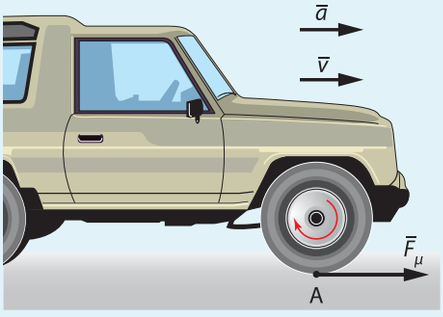
2. Liukukitkakerroin

Vedä kappaletta pöydällä jousivaa'an avulla vakionopeudella vaakasuoran alustan suuntaisesti. Lisää kappaleen päälle punnuksia. Merkitse kappaleeseen kohdistuva paino (kappale + kuorma) ja jousivaa'an lukema muistiin. Tee mittaustuloksista taulukko ja esitä mittaustulokset N,F_μ -koordinaatistossa.
Toista mittaukset erilaisilla alustoilla.

!

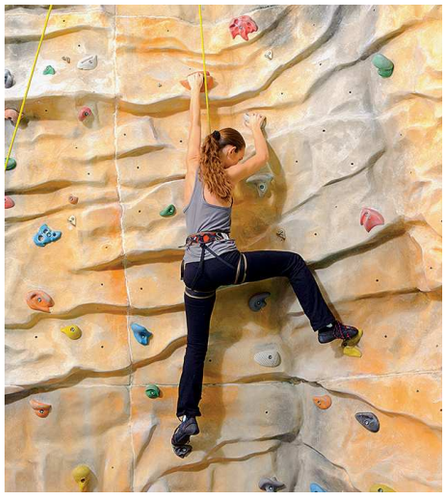
Kertaa Fysiikka 1, s. 83.

Kuvan auto liikkuu oikealle.

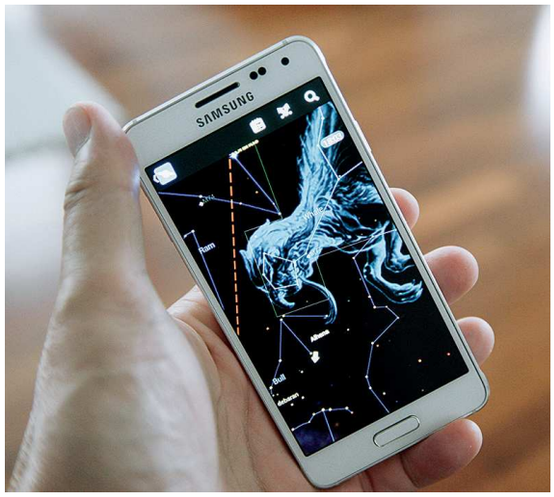


Alla olevissa kuvissa kauko-ohjattava auto on pyöreiden sauvojen päälle asetetulla levyllä. Oikeanpuoleisessa kuvassa auton pyörät pyörivät. Mihin perustuu väite: auton liikkeellelähtö ja kiihdytys perustuvat kitkaan?

Kitka



Seinäkiipeilyssä kitkan merkitys on suuri.



Kännykkä pysyy kädessä kitkan ansiosta.

Miksi mekaanisissa koneissa koneen osia voidellaan? Kuvassa on moottorin mäntä.

! Kertaa Fysiikka 1, s. 97–99.

Liukuminen muutetaan vierimiseksi kuulalaakereiden avulla.

Kitka on välttämätön kaikessa liikkumisessa. Liikkeelle lähteminen, pysähtyminen ja suunnan muuttaminen on mahdollista kitkan ansioista. Kitka vaikuttaa myös levossa oleviin kappaleisiin ja on oleellinen niiden paikallaan pysymisen kannalta. Esimerkiksi taulujen ripustamisessa käytetyt ruuvit tai naulat pysyvät seinissä kitkan ansiosta.

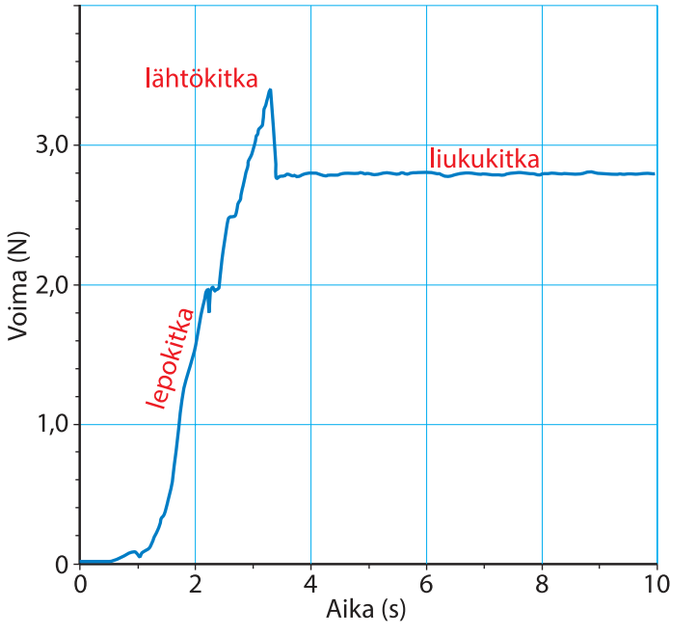
Moottoreissa pintojen hankautuminen toisiaan vasten kuluttaa koneen osia. Mekaaninen energia muuntuu hankauksessa pintojen sisäenergiaksi ja aiheuttaa osien lämpenemisen takia energiahäviöitä. Kitkaa pienennetään silottamalla tai voitelemalla pintoja, jolloin pintojen välille syntyy ohut voiteluainekerros ja ne eivät pääse koskettamaan toisiaan. Liukuminen voidaan muuttaa vierimiseksi kuulalaakereiden avulla.

Kitka on kappaleiden pintojen välinen kosketusvoima, joka pyrkii estämään tai hidastamaan kappaleiden liukumista toisiaan vasten.

Kitka aiheutuu toisiaan koskettavien pintojen mikroskooppisella tasolla tapahtuvista vuorovaikutuksista. Kitkan suuruuteen vaikuttavat mm. pintojen tasaisuus ja pintojen materiaali. Kitkan suuruus ei juuri riipu hankaavien pintojen kosketuspinnan alasta.

Kitka
Kitka on kosketusvoima, joka vastustaa kahden pinnan liukumista toistensa suhteen.

Lepokitka, lähtökitka ja liukukitka

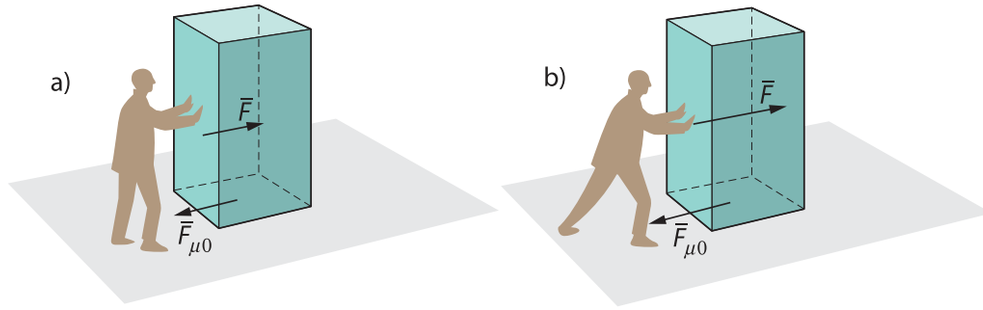


Tutkimuksen mukaan kappaleen liikkeelle saaminen vaatii suuremman voiman kuin kappaleen pitäminen liikkeessä.

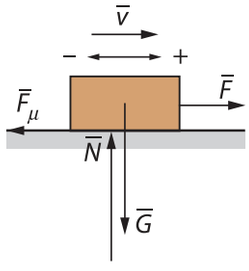
Viereinen kuva esittää ensimmäisessä tutkimuksessa saatua kuvaajaa *t*,*F*-koordinaatistossa. **Lepokitka** $\overline{F}_{\mu 0}$ estää kappaleen liukumisen lattialla. Lepokitkalla ei ole vakioarvoa, vaan se muuttuu kappaleeseen vaikuttavien muiden voimien muuttuessa. Sen suurinta arvoa sanotaan **täysin kehittyneeksi lepokitkaksi** tai **lähtökitkaksi** $\overline{F}_{\mu 0,\max}$. Kuvan esittämässä tapauksessa lähtökitkan suuruus on $F_{\mu 0,\max} \approx 3{,}4\ \text{N}$.

Kappaleen pitäminen tasaisessa liikkeessä vaatii noin 2,8 N:n voiman. Liukuvaan kappaleeseen vaikuttava kitka on **liukukitkaa** $\overline{F}_{\mu}$. Tutkimuksessa 1 liukukitkan suuruus on $F_{\mu} \approx 2{,}8\ \text{N}$.

Lähtökitkan suuruus saadaan määrittämällä suurin vetävä (tai työntävä) voima, jonka vaikuttaessa kappale vielä pysyy paikallaan.



Paikallaan pysyvää laatikkoa työnnetään. Huomaa, että lepokitka kasvaa, kun työntävä voima kasvaa.



Kappale etenee vakionopeudella, $\sum \overline{F} = \overline{0}$.

Tarkastellaan vaakasuoralla pinnalla olevaan kappaleeseen vaikuttavia voimia, kun kappale on tasaisessa liikkeessä. Koska liike on tasaista, Newtonin II lain mukaan on $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli liikkeen suunnassa $\overline{F} + \overline{F}_{\mu} = \overline{0}$. Sovitaan liikkeen suunta positiiviseksi suunnaksi. Skalaariyhtälöstä $F - F_{\mu} = 0$ saadaan $F = F_{\mu}$. Liukukitkan suuruus F_{μ} saadaan mittaamalla kappaletta vetävän (tai työntävän) voiman suuruus silloin, kun kappale on tasaisessa liikkeessä. Tutkimusten mukaan nopeus ei vaikuta liukukitkan suuruuteen, ei myöskään hankaavien pintojen pinta-ala.

Liukukitka, lepokitka ja lähtökitka

- Liukukitka on kappaleen liukumista estävä voima.
- Lepokitka on kappaleen liikkeellelähtöä estävä voima.
- Lepokitka on muuttuva voima.
- Lähtökitka (täysin kehittynyt lepokitka) on lepokitkan suurin arvo.

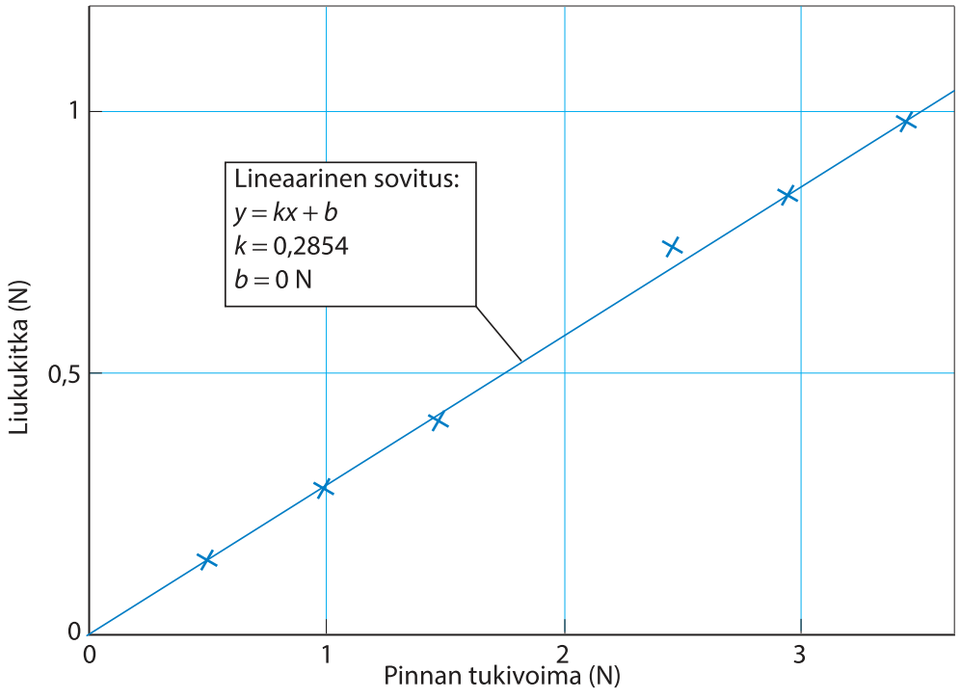
Kitkakerroin

Mittaustulokset

m (kg)	$N = G$ (N)	F_μ (N)
0,050	0,4905	0,14
0,100	0,981	0,28
0,150	1,4715	0,41
0,250	2,4525	0,74
0,300	2,943	0,84
0,350	3,4335	0,98

Koska tutkimuksen 2 mittaukset tehtiin vaakasuoralla pinnalla, kappaleeseen kohdistuvan tukivoiman suuruus on yhtä suuri kuin kappaleeseen kohdistuva paino eli $N = G$. Koska kappaletta vedettiin vakionopeudella, liukukitka on yhtä suuri kuin vetävä voima eli $F = F_\mu$.

Tutkimuksessa havaittiin, että kuorman lisääminen lisäsi kitkan suuruutta. Mittaustulokset siirrettiin N,F_μ-koordinaatistoon. Koska pisteet asettuvat mittaustarkkuuden rajoissa peräkkäin, pistejoukkoon sovitetaan suora.



Suoran fysikaalinen kulmakerroin on hankaaville pinnoille ominainen vakio, liukukitkakerroin μ. Mittausohjelman mukaan $\mu = 0{,}29$. Huomaa, että kitkakertoimella ei ole yksikköä.

$F_\mu \sim N$

$F_\mu = \mu N$

μ on liukukitkakerroin.

ainepari	μ_0	μ
kumi ja kuiva asfaltti	0,8	0,7
kumi ja kuiva jää	0,2	0,15
puu ja kivi	0,7	0,3
teräs ja teräs	0,15	0,12
teflon ja teflon	0,04	0,04

Eräitä lähtö- ja liukukitkakertoimia.

Liukukitka ja lähtökitka

- Kitka on suoraan verrannollinen kappaleen pintaan kohdistuvaan tukivoimaan.
- Liukukitkan $\overline{F}_\mu$ suuruus on $F_\mu = \mu N$.
  Liukukitkakerroin μ on hankaaville pintapareille ominainen vakio.
- Lähtökitkan $\overline{F}_{\mu 0,\max}$ suuruus on $F_{\mu 0,\max} = \mu_0 N$.
  Lähtökitkakerroin μ_0 on koskettaville pintapareille ominainen vakio.

Kitkakertoimen suuruuteen vaikuttavat hankaavien pintojen materiaali, lämpötila ja kosteus. Kitkakerroin kuvaa kitkan riippuvuutta hankaavista pinnoista.

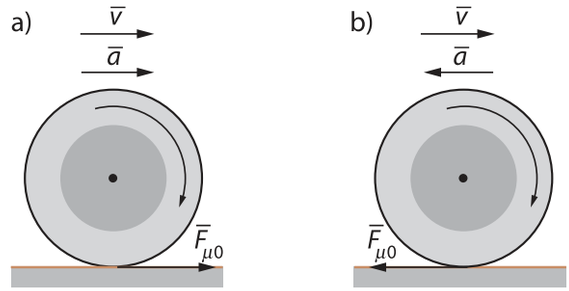
Kitka ja liike

Moottoripyörä pysyy kaarteessa lepokitkan ansioista.

Ajoneuvojen liikkeellelähtö, kiihdytys ja jarrutus perustuvat kitkaan. Pyörivään pyörään kohdistuva lepokitka voi olla esimerkiksi auton liikettä hidastava, ylläpitävä tai kiihdyttävä voima. Kun auto ajaa vaakasuorassa kaarteessa, renkaiden ja tienpinnan välinen lepokitka pitää auton kaarteessa. Auton ulosajo kaarteessa johtuu siitä, että kitka ei ole riittävän suuri muuttamaan tarpeeksi auton nopeuden suuntaa.

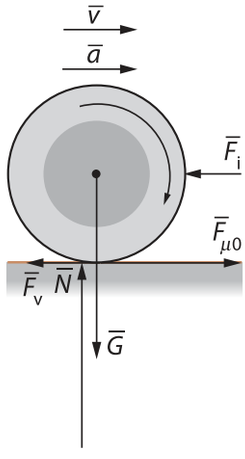
Liikkeellelähdössä skootterin takarengas pyrkii pyörimään paikallaan, mutta lepokitka estää tämän. Renkaan ja tien pinnan välinen lepokitka työntää skootteria eteenpäin: lepokitka on skootteria kiihdyttävä voima. Lepokitkan suunta on skootterin liikkeen suunta eli eteenpäin.

Levyjarruja käytetään myös polkupyörissä. Jarrupalat kohdistavat levyn pintaan kitkan, joka hidastaa pyörän pyörimistä. Samalla tienpinta kohdistaa renkaaseen liikettä vastustavan voiman, joka hidastaa polkupyörän liikettä.



Pyörivään pyörään kohdistuva lepokitka a) kiihdytyksessä b) jarrutuksessa.

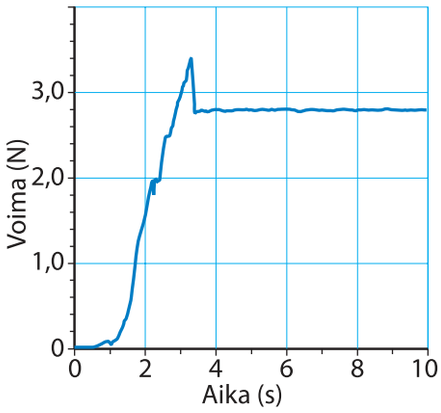
Jarruttaminen perustuu kitkaan. Jarrutettaessa jarrupalat hidastavat pyörän pyörimistä kitkan avulla, ja renkaan ja tien pinnan välinen kitka aiheuttaa nopeuden pienenemisen. Jos renkaat eivät pääse liukumaan, kitka on lepokitkaa. Jos renkaat lukkiutuvat, kitka on liukukitkaa. Tällöin jarrutusmatka pitenee, koska liukukitka on pienempi kuin lepokitka. Jarrutettaessa kitkan suunta on liikkeen suunnalle vastakkainen eli taaksepäin.



Kiihtyvässä liikkeessä olevaan vierivään kappaleeseen kohdistuvat voimat. $\overline{F}_{\mathrm{v}}$ on vierimisvastus.

Kappaleen liikettä sanotaan vierimiseksi, kun kappale etenee pyörimällä niin, että se ei luista alustan suhteen. Kappaleen vierimistä hidastaa vierimisvastus (ks. Fysiikka 1, s. 100). Kappaleen kuten renkaan tai pallon vieriminen ei ole aina esteetöntä, koska kappaleen alusta voi painua kappaleen kosketuskohdassa tai kappale itse voi muuttaa muotoaan. Vierimisvastus aiheuttaa auton renkaiden lämpenemistä ajon aikana. Huomaa, että vierimisvastus ei ole sama kuin kitka. Vierimisvastus on yleensä huomattavasti pienempi voima kuin kitka.

E Esimerkki 1



Ensimmäisessä tutkimuksessa kappaleen ja punnuksen kokonaismassa oli 950 g. Laske kappaleen ja alustan välinen
a) liukukitkakerroin
b) lähtökitkakerroin.

Ratkaisu

$m = 0{,}95$ kg, $g = 9{,}81$ m/s^2

a) Kuvaajan mukaan liukukitkan suuruus on $F_\mu = 2{,}8$ N. Liukukitkan yhtälöstä $F_\mu = \mu N$ saadaan liukukitkakertoimeksi

$$\mu = \frac{F_\mu}{N} = \frac{F_\mu}{G} = \frac{F_\mu}{mg} = \frac{2{,}8\ \text{N}}{0{,}95\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} \approx 0{,}30.$$

b) Kuvaajan mukaan lähtökitkan suuruus on $F_{\mu 0,\max} = 3{,}4$ N. Lähtökitkan yhtälöstä $F_{\mu 0,\max} = \mu_0 N$ saadaan lähtökitkakertoimeksi

$$\mu_0 = \frac{F_{\mu 0,\max}}{mg} = \frac{3{,}4\ \text{N}}{0{,}95\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} \approx 0{,}36.$$

Vastaus

a) Liukukitkakerroin on 0,30. **b)** Lähtökitkakerroin on 0,36.

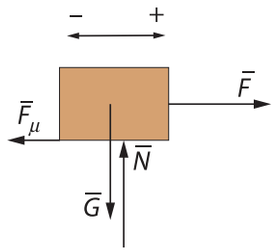
E Esimerkki 2

Vaakasuoralla pinnalla olevaan laatikkoon vaikuttaa vaakasuora 8,0 N:n suuruinen vetävä voima. Laatikon massa on 2,0 kg, lähtökitkakerroin 0,30 ja liukukitkakerroin 0,20.
a) Lähteekö laatikko liikkeelle vetävän voiman vaikutuksesta?
b) Jos laatikko lähtee liikkeelle, mikä on sen kiihtyvyys?

Ratkaisu

$F = 8{,}0$ N, $m = 2{,}0$ kg, $\mu_0 = 0{,}30$, $\mu = 0{,}20$

a) Lasketaan, saako 8,0 N:n suuruinen voima laatikon liikkeelle.
Lähtökitka on $F_{\mu 0,\max} = \mu_0 N = \mu_0 mg = 0{,}30 \cdot 2{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \approx 5{,}9$ N.
Koska vetävä voima 8,0 N on suurempi kuin lähtökitka 5,9 N, laatikko lähtee liikkeelle.



Laatikon voimakuvio.

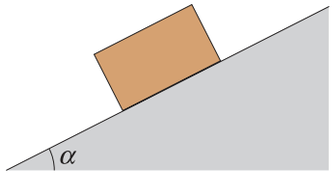
b) Laatikkoon kohdistuva kokonaisvoima on $\Sigma\bar{F} = \bar{F} + \bar{F}_\mu + \bar{G} + \bar{N}$.
Newtonin II lain mukaan vaakasuunnassa on $\Sigma\bar{F} = m\bar{a}$ eli $\bar{F} + \bar{F}_\mu = m\bar{a}$.
Valitaan suunta oikealle positiiviseksi. Skalaariyhtälöstä $F - F_\mu = ma$ kiihtyvyydeksi saadaan

$$a = \frac{F - F_\mu}{m} = \frac{F - \mu mg}{m} = \frac{8{,}0\ \text{N} - 0{,}20 \cdot 2{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{2{,}0\ \text{kg}} \approx 2{,}0\ \text{m/s}^2.$$

Vastaus

a) Kyllä. **b)** Kiihtyvyys on 2,0 m/s^2 kuvassa oikealle.

E Esimerkki 3



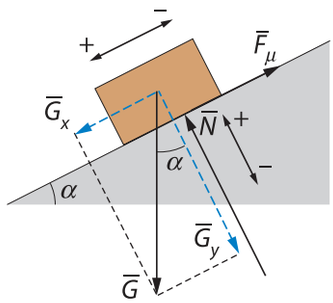
Tunnilla tutkittiin puukappaleen liukumista kaltevalla tasolla. Tason kaltevuuskulma säädettiin ultraäänitutkan ja tietokoneen avulla sellaiseksi, että kappale liukui vakionopeudella. Tällöin tason kaltevuuskulma oli 21°. Puukappaleen massa oli 275 g.

a) Laske liukukitkan suuruus.

b) Laske puukappaleen ja tason välinen kitkakerroin.

Ratkaisu

$\alpha = 21°$, $m = 0{,}275$ kg, $g = 9{,}81$ m/s^2



Puukappaleeseen kohdistuvat voimat.

a) Koska puukappale liukuu vakionopeudella, Newtonin II lain mukaan on $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{G} + \overline{N} + \overline{F}_\mu = \overline{0}$.

Tarkastellaan ensin puukappaleen liikettä tason suunnassa. Newtonin II lain mukaan on $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{G}_x + \overline{F}_\mu = \overline{0}$. Kun tason suunta alas valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö
$G_x - F_\mu = 0$ eli $G \sin\alpha - F_\mu = 0$.

Liukukitkan suuruus on
$F_\mu = G \sin\alpha = mg \sin\alpha$
$= 0{,}275 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot \sin 21° = 0{,}966787 \text{ N} \approx 0{,}97 \text{ N}$.

b) Koska kitkakerroin saadaan yhtälöstä $F_\mu = \mu N$, ennen kitkakertoimen laskemista on selvitettävä tukivoiman N suuruus.

Newtonin II lain mukaan kaltevaa tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa on $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{N} + \overline{G}_y = \overline{0}$. Kun suunta tasosta kohtisuorasti ylös valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $N - G_y = 0$.

Tukivoiman suuruus on
$N = G_y = G \cos\alpha = mg \cos\alpha$
$= 0{,}275 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot \cos 21° \approx 2{,}51857 \text{ N}$.

Kitkakertoimeksi saadaan $\mu = \dfrac{F_\mu}{N} = \dfrac{0{,}966787 \text{ N}}{2{,}51857 \text{ N}} \approx 0{,}38$.

Vastaus

a) Liukukitkan suuruus on 0,97 N. **b)** Kitkakerroin on 0,38.

E Esimerkki 4

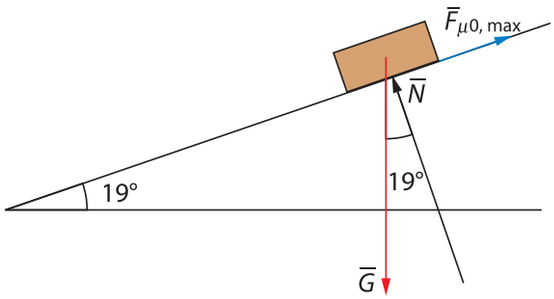
Millan kotitehtävänä oli määrittää oppikirjan ja pöydänpinnan välisen lähtökitkakertoimen suuruus. Milla asetti kirjan pöydälle ja kallisti pöytää hitaasti. Kun kirja nytkähti liikkeelle, pöydän kaltevuuskulma oli 19°. Kuinka suuri oli tällöin pintojen välinen lähtökitkakerroin?

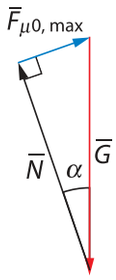
Ratkaisu

$\alpha = 19°$

Kirjaan vaikuttavat voimat ovat paino, pinnan tukivoima ja lepokitka. Ilmanvastus on vähäinen. Juuri ennen kun kirja nytkähtää liikkeelle, kirja on paikallaan ja Newtonin II lain mukaan on $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{G} + \overline{N} + \overline{F}_{\mu 0,\max} = \overline{0}$, jossa $\overline{F}_{\mu 0,\max}$ on lähtökitka (täysin kehittynyt lepokitka).

Koska kirjaan kohdistuu kolme voimaa, ja lähtökitka ja pinnan tukivoima ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, käytetään voimakolmiota. Siinä voimien vektorisumma on nolla. Tukivoiman ja painon välinen kulma on yhtä suuri kuin pöydän kaltevuuskulma.





Voimakolmiosta saadaan $\tan\alpha = \dfrac{F_{\mu 0,\max}}{N}$.

Koska lähtökitkan suuruus on $F_{\mu 0,\max} = \mu_0 N$, saadaan

$$\tan\alpha = \frac{F_{\mu 0,\max}}{N} = \frac{\mu_0 N}{N} = \mu_0 .$$

Pintojen välinen lähtökitkakerroin on

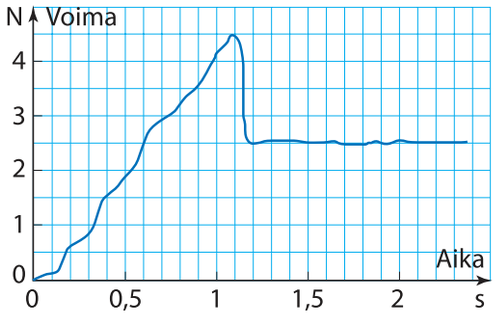
$\mu_0 = \tan\alpha = \tan 19° \approx 0{,}34.$

Vastaus

Lähtökitkakerroin on 0,34.

TEHTÄVÄT

7-1. Kappaleen ja alustan välistä kitkaa tutkittiin mittaamalla kappaleeseen kohdistetun vetovoiman suuruus tietokoneeseen kytketyn voima-anturin avulla. Voimaa kasvatettiin tasaisesti, kunnes kappale lähti liikkeelle, minkä jälkeen pyrittiin säilyttämään vakionopeus. Kuva esittää eräässä kokeessa saatua $F(t)$ -kuvaajaa. Kappaleen massa on 1,8 kg.



Määritä kuvaajan perusteella

a) millä hetkellä kappale lähti liikkeelle

b) kappaleen ja alustan välinen liukukitkakerroin

c) kappaleen ja alustan välinen lähtökitkakerroin.

7-2. **a)** Kuinka suuri tien suuntainen voima tarvitaan vetämään vaakasuoralla tiellä massaltaan 2400 kg:n rekeä tasaisella nopeudella, kun kitkakerroin on 0,040?

b) Piirrä reen voimakuvio.

7-3. Kappale, jonka massa on 24 kg, on vaakasuoralla pinnalla.

a) Kuinka suuri on lähtökitkan ja liukukitkan ero, kun vastaavat kitkakertoimet ovat 0,30 ja 0,20?

b) Kuinka suuren kiihtyvyyden kappale saa, kun vetoa jatketaan lähtökitkan suuruisella voimalla?

7-4. Vastaa lyhyesti perustellen.

a) Auto etenee suoraviivaisesti ja kiihdyttää. Auton renkaat pyörivät kuivalla asfaltilla sutimatta. Onko kitka lepokitkaa vai liukukitkaa?

b) Juna kulkee nopeudella 65 km/h ja alkaa jarruttaa. Mikä voima pysäyttää junan?

c) Miksi formula 1 -kilpailuissa autojen renkaat lämmitetään ennen lähtöä?

d) Katso palvelimelta video Auton etu- ja takapyörät lukossa ja vastaa seuraaviin kysymyksiin.
Miksi on vaarallista, jos auton etupyörät vierivät ja takapyörät lukkiutuvat?
Miksi auton etujarrut ovat tehokkaammat kuin takajarrut?

7-5. Kitkaa tutkittaessa pöydällä olevaa kappaletta (m = 1,2 kg) alettiin vetää vaakasuoraan jousivaa'alla. Kappaleen ja pöydän väliseksi lepokitkakertoimeksi saatiin 0,26 ja liukukitkakertoimeksi 0,21.

a) Kuinka suuri oli kappaleeseen vaikuttava kitkavoima, kun jousivaa'an lukema oli 2,2 N?

b) Kuinka suuri oli jousivaa'an lukema, kun kappale liukui vakionopeudella? [S2004, 3]

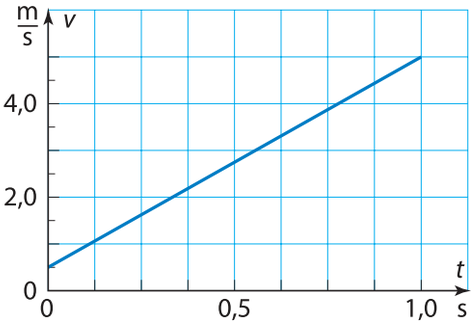
7-6. Jääkiekko lyödään liukumaan jäätä pitkin. Kiekon massa on 170 g ja alkunopeus on 1,6 m/s. Kiekko pysähtyy 8,0 sekunnin kuluttua. Kuinka suuri on liikettä hidastava kitka?

7-7. Rekeä vedetään jäällä jään suuntaisella 750 N:n voimalla. Reki lähtee liikkeelle ja liikkuu kiihtyvyydellä 0,10 m/s^2. Reen kokonaismassa on 420 kg. Määritä reen jalasten ja jään välinen liukukitkakerroin.

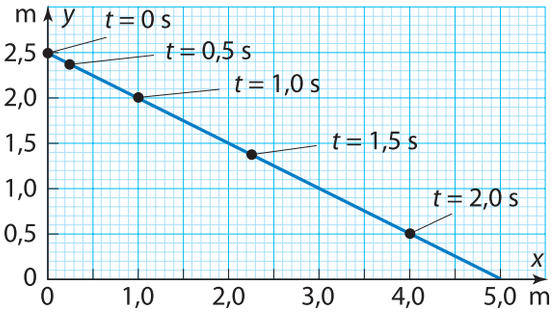
7-8. Kitkakerroin määritettiin vetämällä kappaletta vakionopeudella vaakasuoralla alustalla. Määritä mittaustulosten avulla kitkakerroin. Kopioi mittaustulokset palvelimelta.

7-9. Laskettelijan kokonaismassa on 85 kg. Hän laskee rinnettä, jonka kaltevuuskulma on 25°. Lumen ja suksien välinen kitkakerroin on 0,15. Laske laskettelijan kiihtyvyys laskun alussa, jolloin ilmanvastus ei vielä vaikuta merkittävästi hänen kiihtyvyyteensä.

7-10. Laatikkoa, jonka massa on 4,0 kg, vedetään lattian suuntaisella 35,0 N:n vakiovoimalla. Laatikko liikkuu suoraviivaisesti eteenpäin, ja sen nopeus muuttuu oheisen kuvaajan mukaisesti. Määritä laatikon ja lattian välinen liukukitkakerroin.



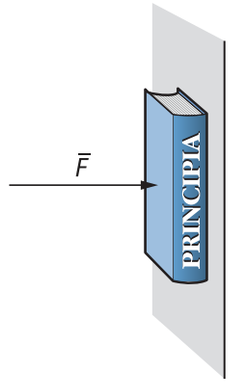
7-11. Laatikon annetaan liukua kaltevaa tasoa (ramppia) pitkin kellariin. Kuvassa näkyy laatikon paikka tällä 2,5 metriä korkealla rampilla 0,5 sekunnin välein. Laatikko lähtee liukumaan levosta hetkellä $t = 0$ s. Oletetaan kiihtyvyys likimain vakioksi.



a) Laske laatikon saama kiihtyvyys.
b) Laske liukukitkan suuruus, kun laatikon massa on 25 kg.

7-12. Laatikkoa vedetään vakionopeudella ylös lastauslaiturille kaltevaa tasoa käyttäen. Tason kaltevuuskulma vaakatasoon nähden on 41°. Laatikon massa on 75 kg. Liukukitkakerroin tason ja laatikon pohjan välillä on 0,45. Kuinka suuri on tason suuntainen vetävä voima?

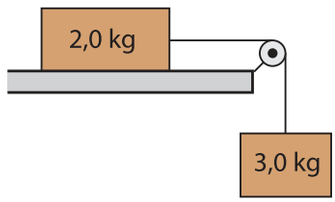
7-13. Seinässä kiinni olevaa kovakantista kirjaa painetaan seinää vasten 12 N:n suuruisella kohtisuoralla voimalla. Lepokitkakerroin seinän ja kirjan välillä on 0,60 ja liukukitkakerroin 0,40. Kirjan massa on 510 g. Pysyykö kirja paikallaan? Kirja on alussa levossa.



7-14. Pakettiauton lavalla on laatikko, jonka massa on 165 kg. Laatikon ja lavan välinen lepokitkakerroin on 0,37. Pakettiauto lähtee liikkeelle kiihtyvyydellä 1,8 m/s^2.
a) Mitkä voimat vaikuttavat laatikkoon?
b) Liukuuko laatikko lavalla?

7-15. Autoa aletaan kiihdyttää paikaltaan liukkaalla tiellä, jolloin 58 % painosta tulee vetäville pyörille. Renkaiden ja tien välinen lepokitkakerroin on 0,18. Laske auton maksimikiihtyvyys. Minkä vuoksi käytännössä on erittäin vaikea saavuttaa maksimikiihtyvyyttä? Miksi kiihtyvyys pienenee auton nopeuden kasvaessa, vaikkei moottorin teho aseta rajoitusta?

7-16. Mikä on kappaleiden kiihtyvyys, kun alustan ja 2,0 kg:n massaisen kappaleen välinen liukukitkakerroin on 0,20?



8 Noste ja väliaineen vastus

! Keskeisiä asioita

- **noste**
- **Arkhimedeen laki**
- **väliaineen vastus**

T Tutki

1. Arkhimedeen laki

a) Mittaa punnukseen kohdistuva paino. Upota punnus ylivuotoastiaan. Kerää ylimennyt vesi mittalasiin. Vertaa ilmassa ja vedessä saamiasi jousivaa'an lukemia. Laske niiden erotus.

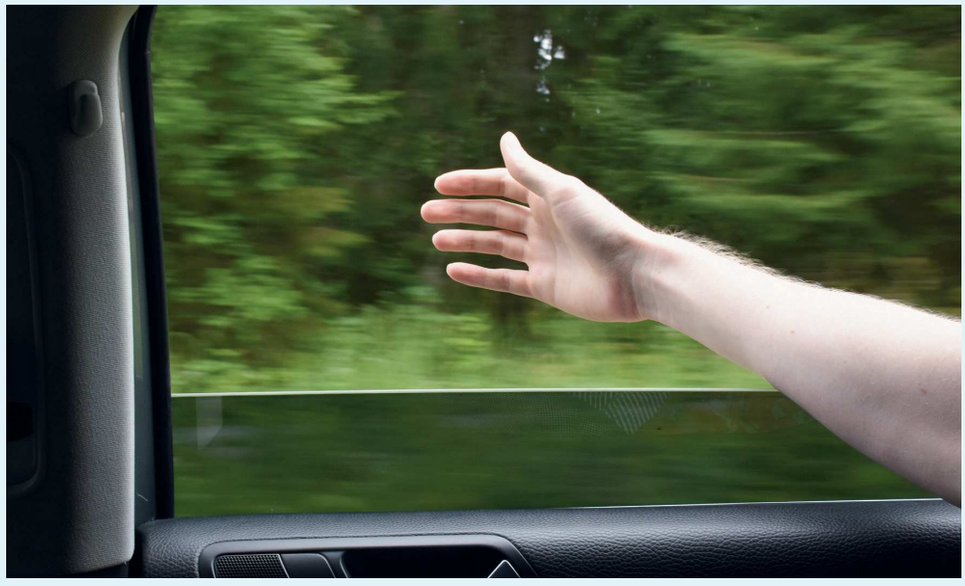
b) Laske ylivuotoastiaan valuneeseen veteen kohdistuva paino. Vertaa a-kohdassa saatua tulosta b-kohdan tulokseen. Toista työ useilla erikokoisilla kappaleilla.

c) Tee samat mittaukset vedessä, johon on lisätty runsaasti suolaa. Miten mittaustulokset eroavat a-kohdan tuloksista?

2. Väliaineen vastus

a) Kaada toiseen mittalasiin vettä ja toiseen ruokaöljyä. Pudota samanlaiset kuulat veteen ja öljyyn yhtä aikaa. Mitä havaitset?

b) Pudota samalta korkeudelta samanmassaisia paperiarkkeja vaaka-asennossa, suorassa ja rutattuna. Vertaa paperiarkkien putoamista.



Kun istut auton takapenkillä ja työnnät käden ulos ikkunasta, havaitset käteen kohdistuvan ilmanvastuksen. Miten käden asento vaikuttaa ilmanvastuksen suuruuteen? Entä auton nopeus?

Satama-alueella ohjataan liikennettä kelluvien poijujen avulla. Miksi rautainen poiju voi kellua veden pinnalla?

Arkhimedeen laki

Tutkimuksessa havaittiin, että punnukseen kohdistuva paino oli vedessä pienempi kuin ilmassa. Vesi siis kannatteli punnusta tietyn suuruisella voimalla. Suolavedessä vedestä aiheutuva kannatteleva voima oli suurempi kuin suolattomassa vedessä. Mittausten mukaan veteen upotetun kappaleen paino pieneni mittaustarkkuuden rajoissa yhtä paljon kuin oli sen syrjäyttämään vesimäärään kohdistuva paino.

Kappaleeseen kohdistuu nesteessä ja kaasussa **väliaineesta aiheutuva voima**, **noste**. Se aiheutuu hydrostaattisen paineen erosta kappaleen ala- ja yläpinnan välillä. Paine on kappaleen alapinnan korkeudella suurempi kuin yläpinnan korkeudella, koska hydrostaattinen paine kasvaa alaspäin mentäessä.

Koska kaasujen tiheys on huomattavasti pienempi kuin nesteiden, noste on kaasuissa pienempi kuin nesteissä.

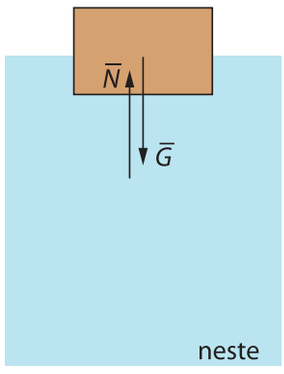
Tutkimus osoitti, että punnukseen kohdistuva veden noste on yhtä suuri kuin punnuksen syrjäyttämään vesimäärään kohdistuva paino. Tätä lakia kutsutaan keksijänsä mukaan Arkhimedeen laiksi.

Arkhimedeen laki
Kun kappale on väliaineessa, siihen kohdistuu noste, joka on yhtä suuri kuin kappaleen syrjäyttämän väliainemäärän paino.

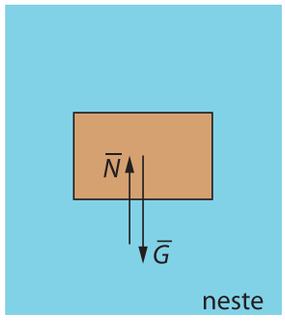
Kun kappale kelluu, osa kappaleesta on vedenpinnan alla. Tällöin kappale syrjäyttää vähemmän vettä kuin jos se olisi kokonaan vedessä. Kelluvan kappaleen tiheys on pienempi kuin nesteen tiheys.

Voimakuvioissa nostevektorin $\overline{N}$ kärki piirretään osoittamaan kappaleen vedenpinnan alapuolella olevan osan keskipisteeseen. Kun kappale on kokonaan väliaineessa, nostevektorin kärki on kappaleen keskipisteessä.

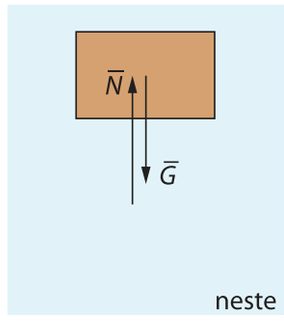
Veneeseen kohdistuva noste riippuu siitä, miten paljon vettä vene syrjäyttää.



Kappale kelluu, $N = G$.



Kappale uppoaa, $N < G$.

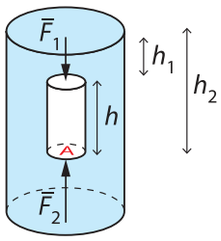


Kappale nousee pintaan, $N > G$.

Nosteen suuruus

!

Kertaa Fysiikka 2, s. 20.



Paine on $p = \frac{F}{A}$.

Tarkastellaan nesteeseen upotettua sylinterin muotoista kappaletta, jonka korkeus on h, pohjan pinta-ala A ja tilavuus V.

Kappaleen yläpintaan vaikuttavat paine $p_1 = p_0 + \rho g h_1$ ja voima $F_1 = p_1 A$, jossa p_0 on ilmanpaine ja $\rho g h_1$ hydrostaattinen paine syvyydellä h_1. Kappaleen alapintaan vaikuttavat paine $p_2 = p_0 + \rho g h_2$ ja voima $F_2 = p_2 A$.

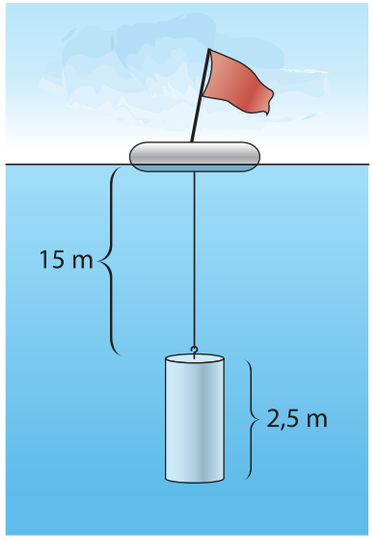
Nosteen N suuruus on voimien F_2 ja F_1 suuruuksien erotus:

$$\begin{aligned} F_2 - F_1 &= p_2 A - p_1 A = (p_2 - p_1)A \\ &= (p_0 + \rho g h_2 - (p_0 + \rho g h_1))A = (\rho g h_2 - \rho g h_1)A \\ &= \rho g (h_2 - h_1)A = \rho g h A = \rho g V. \end{aligned}$$

Noste

- Kappaleeseen kohdistuvan nosteen suuruus on $N = \rho V g$, jossa V on kappaleen upoksissa olevan osan tilavuus ja ρ nesteen (tai kaasun) tiheys.
- Noste aiheutuu hydrostaattisen paineen erosta kappaleen ylä- ja alapinnoilla.
- Kappaleeseen kohdistuvan nosteen suuruus ei riipu siitä, mistä aineesta kappale on tehty.

E Esimerkki 1



Tsunamitutkimuksissa käytettävä sylinterin muotoinen mittalaite on upotettu 15 m:n syvyydelle merenpinnasta kuvan mukaisesti. Laitteen kannen ja pohjan pinta-ala on 0,82 m^2. Meriveden tiheys tällä alueella on 1015 kg/m^3.

a) Laske hydrostaattisesta paineesta aiheutuvien voimien suuruudet, jotka kohdistuvat mittalaitteen ylä- ja alapintaan.

b) Laske laitteeseen kohdistuvan nosteen suuruus.

Ratkaisu

$\rho = 1\,015$ kg/m^3, $g = 9{,}81$ m/s^2, $A = 0{,}82$ m^2

a) Voiman suuruus laatikon yläpinnalla on

$$\begin{aligned} F_1 &= p_1 A = \rho g h_1 A \\ &= 1\,015 \text{ kg/m}^3 \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 15 \text{ m} \cdot 0{,}82 \text{ m}^2 \\ &= 122{,}473 \text{ kN} \approx 120 \text{ kN} \end{aligned}$$

ja alapinnalla

$$\begin{aligned} F_2 &= p_2 A = \rho g h_2 A \\ &= 1\,015 \text{ kg/m}^3 \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 17{,}5 \text{ m} \cdot 0{,}82 \text{ m}^2 \\ &= 142{,}885 \text{ kN} \approx 140 \text{ kN}. \end{aligned}$$

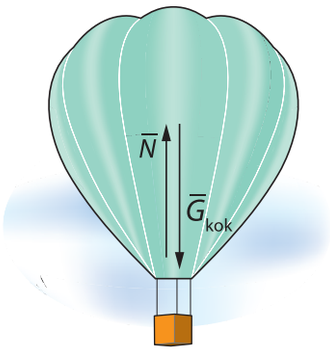
b) Laitteeseen kohdistuvan nosteen suuruus on

$N = F_2 - F_1 = 142{,}885 \text{ kN} - 122{,}473 \text{ kN} \approx 20 \text{ kN}.$

Vastaus

a) 120 kN ja 140 kN **b)** Nosteen suuruus on 20 kN.

E Esimerkki 2



Ohutseinäisen vetykaasupallon maksimitilavuus on 0,85 m^3. Palloon on kiinnitetty mittari. Ilman tiheys on 1,250 kg/m^3. Palloon, vetyyn ja mittariin kohdistuva kokonaispaino on 11 N. Pystyykö kaasupallo kannattelemaan mittaria ilmassa?

Ratkaisu

$\rho_{ilma} = 1{,}250\ \text{kg/m}^3$, $V = 0{,}85\ \text{m}^3$, $G_{kok} = 11\ \text{N}$, $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$

Kaasupalloon kohdistuvan ilman nosteen suuruus on
$N = \rho_{ilma} Vg = 1{,}250\ \text{kg/m}^3 \cdot 0{,}85\ \text{m}^3 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \approx 10\ \text{N}$.
Koska palloon alaspäin vaikuttava kokonaisvoima (11 N) on suurempi kuin ilman noste (10 N), pallo ei pysy ilmassa.

Vastaus

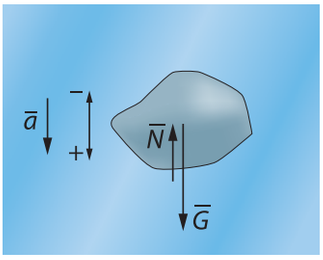
Kaasupallo ei pysty kannattelemaan mittaria ilmassa.

E Esimerkki 3

Pudotat kiven veneestä veteen vedenpinnan alapuolelta. Kiven tiheys on 2 800 kg/m^3 ja veden 1 000 kg/m^3. Mikä on kiven kiihtyvyys sen alkaessa vajota kohti pohjaa? Oletetaan väliaineen vastus putoamisen alussa pieneksi.

Ratkaisu

$\rho_{kivi} = 2\,800\ \text{kg/m}^3$, $\rho_{vesi} = 1\,000\ \text{kg/m}^3$, $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$



Kiveen kohdistuvat voimat.

Koska väliaineen vastus putoamisen alussa on pieni, kiveen kohdistuvat voimat ovat paino ja noste. Newtonin II lain mukaan on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}$. Valitaan suunta alas positiiviseksi, jolloin saadaan skalaariyhtälö $-N + G = ma$.

Kiveen kohdistuva noste on $N = \rho_{vesi} Vg$. Tiheyden yhtälön $\rho = \frac{m}{V}$ perusteella kiven massa on $m = \rho_{kivi} V$.

Kun nämä sijoitetaan skalaariyhtälöön $-N + mg = ma$, saadaan $-\rho_{vesi} Vg + \rho_{kivi} Vg = \rho_{kivi} Va$.

!

Huomaa, tätä mallia käytettäessä kiven tilavuus ei vaikuta kiihtyvyyteen.

Kiven kiihtyvyys on

$$a = \frac{-\rho_{vesi} Vg + \rho_{kivi} Vg}{\rho_{kivi} V} = \frac{\cancel{V}(-\rho_{vesi} + \rho_{kivi})g}{\rho_{kivi}\cancel{V}} = \frac{(-\rho_{vesi} + \rho_{kivi})g}{\rho_{kivi}}$$

$$= \frac{(-1000\ \text{kg/m}^3 + 2800\ \text{kg/m}^3) \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{2800\ \text{kg/m}^3} \approx 6{,}3\ \text{m/s}^2 .$$

Vastaus

Kiihtyvyys on 6,3 m/s^2, suunta kohti järven pohjaa.

Väliaineen vastus

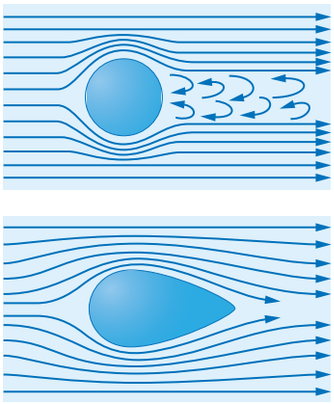
Kovalla tuulella ilmanvastus vaikeuttaa liikkumista. Ilmanvastus on voima, joka syntyy kappaleen ja ilman kosketusvuorovaikutuksesta.

Ensimmäisessä väliaineen vastukseen liittyvässä tutkimuksessa kuula putosi hitaammin öljyssä kuin vedessä. Nesteessä tai kaasussa liikkuvan kappaleen liikettä vastustavaa voimaa sanotaan väliaineen vastukseksi.

Väliaineen vastus aiheutuu siitä, että väliaineessa liikkuva kappale joutuu syrjäyttämään väliainetta. Kappaleen pintaa lähinnä oleva ainekerros ei liiku kitkan takia, seuraava liikkuu jonkin verran, seuraava taas enemmän jne. Näiden kuvitteellisten ainekerrosten keskinäisen kitkan voittamiseksi kappaleen täytyy tehdä työtä.

Ilmanvastuksen suuruutta voi tutkia pudottamalla erimassaisia silkkipaperikartioita ja mittaamalla niiden nopeudet ultraäänitutkalla. Koska kartioiden putoaminen on lähes tasaista, Newtonin II lain mukaan ilmanvastus on yhtä suuri kuin kartioon kohdistuva paino.

Massa	Väliaineen vastus F	v (m/s)	v^2 (m^2/s^2)
m	mg	0,733	0,537
$2m$	$2mg$	0,866	0,750
$3m$	$3mg$	1,046	1,094
$4m$	$4mg$	1,279	1,636
$5m$	$5mg$	1,471	2,164
$6m$	$6mg$	1,522	2,316
$7m$	$7mg$	1,662	2,762



Kuvan pallon ja pisaranmuotoisen kappaleen halkaisijat ovat yhtä suuret. Palloon kohdistuva väliaineen vastus on melkein kymmenkertainen pisaraan kohdistuvaan väliaineen vastukseen verrattuna.

Mittaustulosten mukaan väliaineen vastus on verrannollinen nopeuden neliöön eli $F \sim v^2$.

Väliaineen vastuksen suuruus riippuu kappaleen nopeudesta, koosta ja muodosta sekä itse väliaineesta. Kappale voi synnyttää sen ympäri virtaavaan väliaineeseen pyörteilyä, jolloin kappaleen liikkeen energiaa muuntuu väliaineen liikkeen energiaksi ja kappaleen vauhti hidastuu.

Väliaineen vastus
Nesteessä tai kaasussa liikkuvan kappaleen liikettä vastustavaa voimaa sanotaan väliaineen vastukseksi.

E Esimerkki 4

t (s)	v (m/s)	t (s)	v (m/s)
0,1	1,08	0,8	0,85
0,2	1,03	0,9	0,83
0,3	0,99	1,0	0,81
0,4	0,96	1,1	0,79
0,5	0,92	1,2	0,78
0,6	0,90	1,3	0,76
0,7	0,87		

Levyyn vaikuttavaa ilmanvastusta tutkittiin siten, että vaakasuoralla ilmatyynyradalla liikkuvaan pieneen vaunuun kiinnitettiin levy. Vaunu tönäistiin liikkeelle, ja sen nopeutta mitattiin tietokoneeseen liitetyllä tutkalla. Levyn ja vaunun yhteinen massa oli 290 g.

a) Piirrä levyn nopeuden kuvaaja $v = v(t)$.

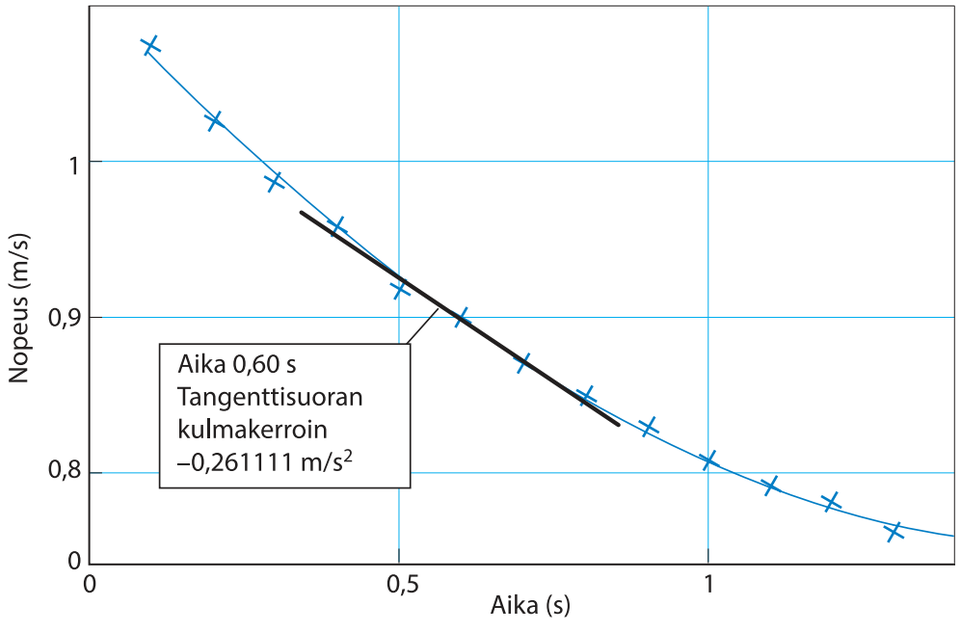
b) Minkä vuoksi kuvaaja ei ole lineaarinen?

c) Määritä levyyn vaikuttava ilmanvastuksen suuruus hetkellä 0,60 s.

Ratkaisu

$m = 0{,}290$ kg

a) Nopeuden kuvaaja:



b) Kitka ilmatyynyradalla on hyvin pieni. Vaunun nopeuden pienenemisen aiheuttaa ilmanvastus. Kuvaaja ei ole lineaarinen, koska ilmanvastus pienenee vaunun nopeuden pienentyessä ja myös vaunun hidastuvuus pienenee.

c) Mittausohjelman mukaan vaunun kiihtyvyys hetkellä $t = 0{,}60$ s on $-0{,}261111$ m/s^2. Negatiivinen etumerkki kertoo, että kappaleen liike on hidastuvaa eli kiihtyvyyden suunta on liikkeen suunnalle vastakkainen.

Ilmanvastuksen suuruus on $F_i = ma = 0{,}290 \text{ kg} \cdot 0{,}261111 \text{ m/s}^2 \approx 0{,}076$ N.

Vastaus

Ilmanvastuksen suuruus on 0,076 N.

Avaruudesta Maata kohti syöksyvän meteorin nopeus ilmakehässä voi olla niin suuri, että meteori saattaa jopa sulaa. Tällöin ilma hankaa meteorin pintaa ja meteori kuumenee. Ilman molekyylien liike on hyvin nopeaa kappaleen suhteen ja silloin hankauksen seurauksena kappaleen molekyylien liike nopeutuu ja kappale kuumenee.

TEHTÄVÄT

8-1. Katso palvelimelta video Noste, ja vastaa videolla olevaan kysymykseen.

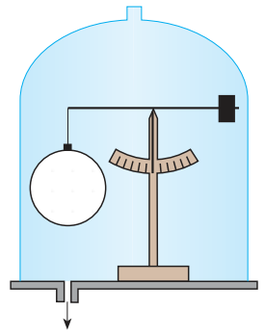
8-2. Lasinpala punnitaan ilmassa ja vedessä. Punnitustuloksiksi saadaan 1,4 N ja 0,84 N.
a) Laske nosteen suuruus.
b) Mikä on lasinpalan tilavuus?
c) Piirrä lasipalan voimakuvio.

8-3. Kuution muotoinen laatikko, jonka särmien pituudet ovat 55 cm, upotetaan veteen. Laatikon yläpinta on 89 cm:n syvyydellä vedessä. Laske
a) laatikon ylä- ja alapintaan kohdistuvien voimien suuruudet
b) laatikkoon kohdistuva noste.

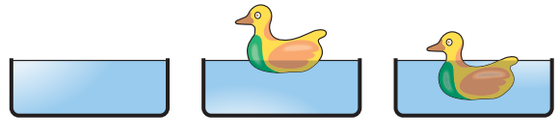
8-4. Kiven tiheys on 2500 kg/m^3 ja massa 1,2 kg. Kivi on vedessä.
a) Laske kiveen kohdistuva paino.
b) Mikä on kiven massa ilmassa?
c) Mikä on kiveen vedessä kohdistuva noste?
d) Kuinka suurella voimalla kiveä olisi kannateltava vedessä, jotta se pysyisi paikallaan?

8-5. **a)** Miksi meressä uiminen on helpompaa kuin järvessä?
b) Nostat kiven järvenpohjasta rannalle. Miksi kiven nostaminen muuttuu työläämmäksi pinnan yläpuolella?
c) Miksi vesijumppa on tehokas kuntoilumuoto?

8-6. Kuvassa on lasikuvun sisällä orsivaakaan ripustettu ontto lasipallo. Miten vaa'an tasapaino muuttuu, kun lasikuvusta imetään ilmaa pois? Varmista päätelmäsi katsomalla palvelimelta video Vaa'an tasapaino.



8-7. Kuvassa on kolme samanlaista vedellä piripintaan täytettyä astiaa, joista kahdessa on kelluva kylpyankka. Astiat sisältöineen punnitaan. Mikä niistä on painavin?



8-8. Astia, jossa on vettä, on vaa'alla. Vaaka näyttää lukemaa 1995 g. Langassa riippuu kuparipallo, jonka halkaisija on 5,0 cm. Mitä vaaka näyttää, kun pallon annetaan upota langan varassa veteen siten, että se ei kosketa astian seinämiä tai pohjaa?

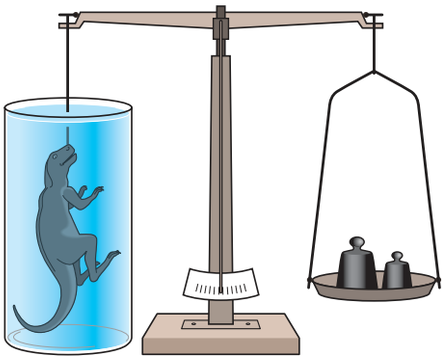
8-9. Meressä kelluu kuution muotoinen jääkappale, jonka tilavuus on 64 m^3. Kuinka suuri osa jääkappaleesta on vedenpinnan yläpuolella? Meriveden tiheys on 1030 kg/m^3 ja jään tiheys 920 kg/m^3.

8-10. Samasta aineesta valmistettuja erilaisia kappaleita punnittiin ilmassa ja vedessä. Mittaustulokset taulukoitiin.

Kappale	G_{ilma} (N)	G_{vesi} (N)
1	0,12	0,11
2	0,26	0,23
3	0,39	0,34
4	0,53	0,46
5	0,69	0,59
6	0,79	0,69

a) Esitä kappaleiden tilavuus massan funktiona.
b) Määritä kappaleen tiheys.

8-11. Dinosauruksen pienoismalli on tehty mittakaavassa 1:20. Pienoismalli punnitaan orsivaa'alla. Kun vaaka on asetettu tasapainoon, pienoismalli upotetaan veteen. Silloin vaaka saadaan tasapainoon vähentämällä 640 g punnuksia.



a) Laske pienoismallin tilavuus.
b) Laske oikean dinosauruksen tilavuus.
c) Mikä olisi dinosauruksen massa, jos sen tiheydeksi arvioitaisiin veden tiheys?

8-12. Kuumailmapallon kokonaismassa (pallo ja kori) on 23 kg ja tilavuus 160 m^3. Kuinka suuren kuorman kuumailmapallo kannattaa, kun kuuman ilman tiheys on 0,85 kg/m^3 ja ympäröivän ilman tiheys on 1,3 kg/m^3?

8-13. **a)** Rautalaivojen ei uskottu kelluvan. Miksi epäily oli aiheellinen? Miksi rautalaiva kuitenkin pysyy pinnalla?
b) Miksi pelastusliivit kelluttavat ja siten lisäävät veneilyturvallisuutta?

8-14. Olet uimarannalla ja yrität painaa isoa rantapalloa vedenpinnan alapuolelle. Alussa työntäminen on helppoa, mutta miksi työntäminen vaikeutuu?

8-15. Ilmassa putoavan pallon nopeutta mitattiin tutkalla. Pallon massa oli 12,3 g.
Kopioi mittaustulokset palvelimelta.
a) Esitä pallon nopeus ajan funktiona.
b) Mikä on pallon nopeus hetkellä 0,20 s ja hetkellä 0,60 s?
c) Selitä nopeuskuvaajan muoto.
d) Määritä palloon kohdistuvan ilmanvastuksen suuruus hetkellä 0,35 s.

8-16. Muuttuuko vaa'an lukema, kun sormi otetaan pois vesilasista? Varmista päätelmäsi katsomalla palvelimelta video Vaa'an tasapaino.

8-17. Kesämökille rakennetaan laituri styroksikellukkeiden päälle. Laiturin puuosien massa on 95 kg, ja styroksin tiheys on 25 kg/m^3. Kuinka monta 0,075 m^3:n kelluketta tarvitaan kannattelemaan laituria ja neljää 75 kg painavaa henkilöä?

8-18. **a)** Mihin suuntaan Jukka pyrkii horjahtamaan, kun hän seisoo linja-auton käytävällä ja auto lähtee i) liikkeelle ii) jarruttaa?
b) Katso palvelimelta video Heliumpallo. Selitä, miksi auton kiihdyttäessä vauhtiaan autossa oleva heliumilmapallo alkaa liikkua kohti auton etulasia ja kun auto jarruttaa, pallo alkaa liikkua kohti auton peräosaa.

9 Voiman momentti

! Keskeisiä asioita

- **voiman vääntövaikutus**
- **kiertoakseli**
- **voiman varsi**
- **voiman momentti**

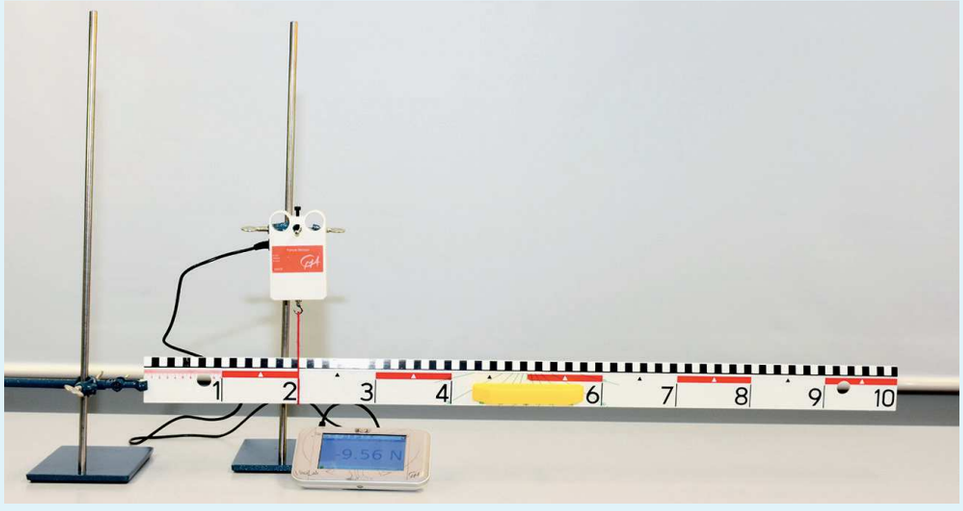
T Tutki

1. Oven avaaminen

Tutki oven avautumista, kun työnnät ovea kädelläsi, joka on kaukana saranoista tai lähellä saranoita.

2. Voiman vääntövaikutus

Ripusta pitkä tauluviivain toisesta päästään statiivitankoon. Kannattele levossa olevaa viivainta voima-anturilla. Merkitse taulukkoon anturin lukema eli tasapainottavan voiman suuruus ja anturin etäisyys ripustuspisteestä. Toista mittaus muuttamalla ripustuspisteen paikkaa.

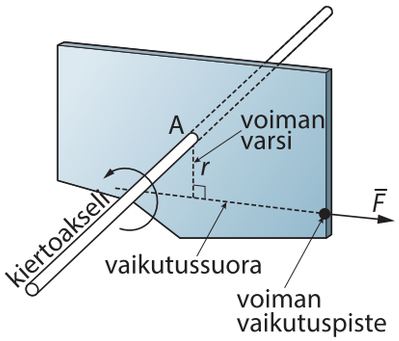


Voiman momentin tutkiminen.

Miten kuvassa oleva polkupyörän jarru liittyy voiman vääntövaikutukseen?

Miksi auton pyörän pulttien avaamisessa pitkävartinen avain on parempi kuin lyhytvartinen?

Millä kuvassa olevilla laitteilla hyödynnetään voiman vääntövaikutusta?



Jos voiman vaikutuspistettä siirretään sen vaikutussuoralla, voiman vaikutus kappaleeseen ei muutu.

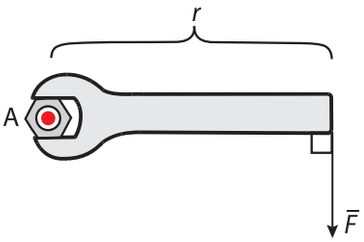
Voiman vääntövaikutus

Tutkimuksessa 1 huomattiin, että ovi on raskas työntää auki, jos asettaa käden lähelle saranoita. Siksi ovenkahva on kiinnitetty kauas oven saranoista. Samasta syystä kiinnijuuttuneet auton renkaan vanteen pultit avataan pitkävartisella rengasavaimella.

Tutkimuksessa 2 taulukoiduista arvoista havaitaan, että tasapainottava voima $\overline{F}$ pienenee, kun ripustuspisteestä eli **kiertoakselista** mitattu voiman vaikutussuoran etäisyys eli **voiman varsi** r suurenee.

F (N)	r (m)	$\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\text{m}}\right)$	Fr (Nm)
1,91	1,00	1,00	1,91
2,35	0,80	1,25	1,88
3,16	0,60	1,67	1,89
3,75	0,50	2,00	1,88
4,83	0,40	2,50	1,93
9,53	0,20	5,00	1,91

Voiman ja voiman varren tulo ovat mittaustarkkuuden rajoissa yhtä suuret.



Mittaustulokset r,F- ja $\frac{1}{r}$, F-koordinaatistoissa.

Voiman momentti on $M_A = Fr$.

Voiman ja voiman varren riippuvuus toisistaan tulee paremmin ilmi, kun niiden arvot esitetään $\frac{1}{r}$, F-koordinaatistossa. Mittaustulokset asettuvat tässä koordinaatistossa mittaustarkkuuden rajoissa peräkkäin. Pistejoukkoon voidaan sovittaa suora. Näin ollen $F \sim \frac{1}{r}$ eli $F = \text{vakio} \cdot \frac{1}{r}$. Tästä seuraa, että tulo Fr = vakio, jota nimitetään voiman **momentiksi** M. Suoran yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $F = M \cdot \frac{1}{r}$, josta saadaan momentti $M = Fr$. Mittausohjelman mukaan suoran fysikaaliseksi kulmakertoimeksi saadaan 1,9 Nm, joten voiman momentti M = 1,9 Nm.

Momentin yksikkö on newtonmetri (Nm). Energian yksiköstä Nm käytetään nimitystä joule (J).

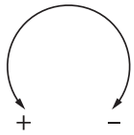
Momentti kiertoakselin A suhteen

- Voiman F momentti kiertoakselin A suhteen on $M_A = Fr$, jossa r on voiman varsi (momenttivarsi) eli voiman vaikutussuoran kohtisuora etäisyys kiertoakselista (momenttiakselista).
- Voiman momentti kuvaa voiman vääntövaikutusta.

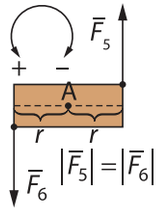
Voiman momentin yksikkö on $[M] = [F] \cdot [r] = 1\ \text{N} \cdot 1\ \text{m} = 1\ \text{Nm}$.

Voiman momentin vaikutuksia

Miltä pyörimissuunnat näyttävät, jos tuulimyllyjä katsellaan edestä tai takaa?



Voiman momentin etumerkit, kun positiiviseksi valittu kiertosuunta on vastapäivään.

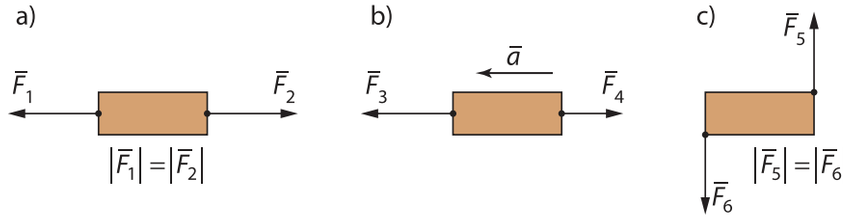


$\Sigma M_A = F_5 r + F_6 r$. Kiertosuuntasopimus määrää momenttien etumerkit.

Mistä tulevat sanonnat ”myötäpäivään” ja ”vastapäivään”?

Voiman momentti voi olla positiivinen tai negatiivinen. **Voiman momentti on positiivinen**, jos voima pyrkii kiertämään kappaletta valittuun positiiviseen kiertosuuntaan. Positiiviseksi kiertosuunnaksi valitaan yleensä kiertosuunta **vastapäivään**.

Kappaleen liikkeen muuttuminen riippuu kappaleeseen kohdistuvista voimista ja voimien sijainnista toisiinsa nähden. Alla olevissa piirroksissa on muutamia esimerkkejä. Kappale on levossa, ennen kuin voimat alkavat vaikuttaa siihen.

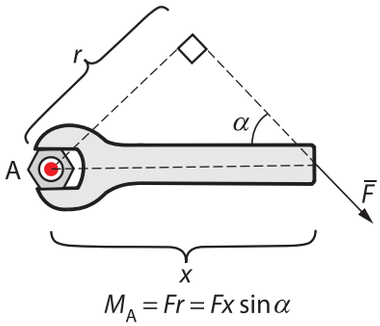


Voimien vaikutuksesta levossa oleva kappale voi a) pysyä levossa, b) joutua kiihtyvään suoraviivaiseen liikkeeseen tai c) lähteä pyörimään.

Kuvassa a kappaleeseen kohdistuu kaksi yhtä suurta voimaa $\bar{F}_1$ ja $\bar{F}_2$. Voimilla on sama vaikutussuora ja ne vaikuttavat vastakkaisiin suuntiin. Kokonaisvoima on nolla, joten Newtonin II lain perusteella kappale on levossa.

Kuvassa b kaksi erisuurta voimaa ovat samalla vaikutussuoralla. Voima $\bar{F}_3$ on suurempi kuin $\bar{F}_4$, joten Newtonin II lain perusteella kappale on kiihtyvässä suoraviivaisessa liikkeessä vasemmalle.

Kuvassa c kappaleeseen kohdistuvien voimien $\bar{F}_5$ ja $\bar{F}_6$ summa on nolla. Koska voimien vaikutussuora ei ole sama, voimilla on kuitenkin vääntövaikutus, joka on yhtä suuri kuin voimien momenttien summa. Kappale alkaa pyöriä vastapäivään kiihtyvällä vauhdilla.



$M_A = Fr = Fx \sin\alpha$

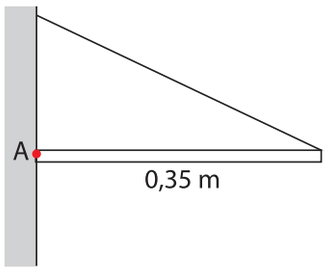
Voiman momentti on suurin, jos voima ja sen varsi ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Voiman momentti trigonometrian avulla

Esimerkiksi pulttia avattaessa voima ei kohdistu aina kohtisuorasti työkalun varteen. Tällöin voiman varsi, joka on kohtisuorassa voiman vaikutussuoraa vastaan, voidaan laskea geometrian avulla.

Viereisessä kuvassa voiman vaikutuspisteen etäisyys kiertoakselista A on x, mutta se ei ole voiman varsi. Voiman varsi on vaikutussuoran kohtisuora etäisyys kiertoakselista ja se lasketaan x:n ja kulman α avulla. Kuvasta nähdään, että $\sin\alpha = \frac{r}{x}$, joten $r = x \sin\alpha$.

E Esimerkki 1

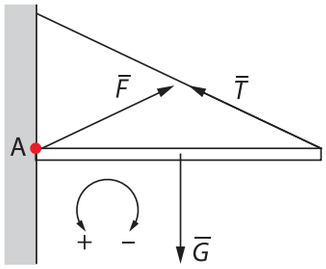


Seinällä oleva hylly on tuettu seinään ohuella ketjulla.

a) Mihin suuntaan kiertoakselin A suhteen hyllyyn kohdistuvat voimat pyrkivät kääntämään hyllyä?

b) Hyllyn tuoteselosteessa kerrotaan, että ketju kestää korkeintaan 240 N:n jännitysvoiman. Laske ketjun jännitysvoiman $\overline{T}$ suurin momentti kiertoakselin A suhteen, kun hyllyn leveys on 0,35 m ja ketjun ja hyllyn pinnan välinen kulma 27°.

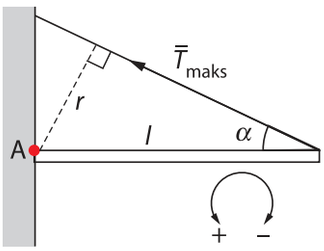
Ratkaisu



a) $\overline{G}$ on paino, $\overline{T}$ ketjun hyllyyn kohdistama voima ja $\overline{F}$ seinän hyllyyn kohdistama voima. Koska voima $\overline{T}$ on kiertoakselin oikealla puolella ja vaikuttaa vinosti vasemmalle ylös, voima pyrkii kääntämään hyllyä vastapäivään.

Voima $\overline{G}$ on kiertoakselin oikealla puolella ja vaikuttaa alas, joten voima $\overline{G}$ pyrkii kääntämään hyllyä myötäpäivään.

Koska voiman $\overline{F}$ vaikutussuora kulkee kiertoakselin A kautta, voiman $\overline{F}$ varsi on nolla. Voimalla $\overline{F}$ ei ole vääntövaikutusta kertoakselin A suhteen.



b) $T_{maks} = 240$ N, $l = 0{,}35$ m, $\alpha = 27°$

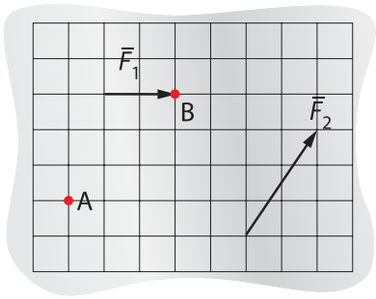
Koska $\sin\alpha = \frac{r}{l}$, voiman varsi on $r = l \sin\alpha$. Voiman suurin momentti akselin A suhteen on

$M_{A,maks} = T_{maks} r = T_{maks}\, l \sin\alpha = 240\ \text{N} \cdot 0{,}35\ \text{m} \cdot \sin 27° \approx 38\ \text{Nm}$.

Vastaus

Ketjun jännitysvoiman suurin mahdollinen momentti on 38 Nm.

E Esimerkki 2



Voimat vaikuttavat kappaleeseen kuvan mukaisesti. Laske

a) voiman $\bar{F}_1$ momentti kiertoakselin A suhteen

b) voimien $\bar{F}_1$ ja $\bar{F}_2$ momenttien summa akselin B suhteen

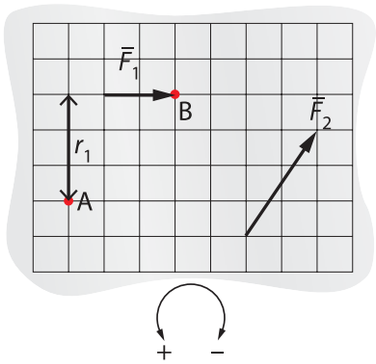
c) voimien $\bar{F}_1$ ja $\bar{F}_2$ momenttien summa akselin A suhteen.

Ruudun sivu vastaa pituutta 1,0 m ja voiman suuruutta 1,0 N.

Ratkaisu

a) Kuvion mukaan voiman $\bar{F}_1$ suuruus on $F_1 = 2{,}0$ N ja sen vääntövarsi $r_1 = 3{,}0$ m. Kun voiman $\bar{F}_1$ momentin kiertosuunta valitaan negatiiviseksi, voiman $\bar{F}_1$ momentti kiertoakselin A suhteen on

$M_A = -F_1 r_1 = -2{,}0\ \text{N} \cdot 3{,}0\ \text{m} = -6{,}0\ \text{Nm}.$

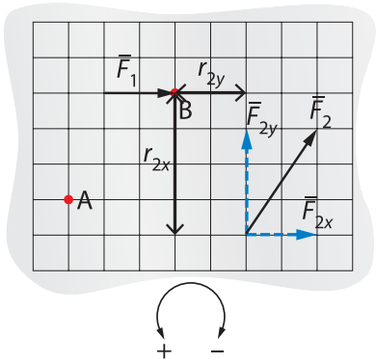


b) Voiman $\bar{F}_1$ vaikutussuora kulkee pisteen B kautta. Voiman $\bar{F}_1$ momentti B:n suhteen on siis nolla. Voiman $\bar{F}_2$ momentti voidaan laskea yksinkertaisimmin jakamalla $\bar{F}_2$ komponentteihin $\bar{F}_{2x}$ ja $\bar{F}_{2y}$ ja laskemalla komponenttien momenttien summa.

Komponenttien $\bar{F}_{2x}$ ja $\bar{F}_{2y}$ vaikutussuorat ovat akselista B etäisyyksillä $r_{2x} = 4{,}0$ m ja $r_{2y} = 2{,}0$ m. Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, momenttien summaksi saadaan

$\Sigma M_B = F_1 \cdot 0{,}0\ \text{m} + F_{2x} \cdot r_{2x} + F_{2y} \cdot r_{2y}$

$= 0{,}0\ \text{Nm} + 2{,}0\ \text{N} \cdot 4{,}0\ \text{m} + 3{,}0\ \text{N} \cdot 2{,}0\ \text{m} = 14\ \text{Nm}.$



Koska momenttien summa on positiivinen, momentin kokonaisvaikutus on vastapäivään.

c) Voiman $\bar{F}_1$ momentti akselin A suhteen on $M_A = -F_1 r_1$. Voiman $\bar{F}_2$ momentti lasketaan komponenttien avulla. Komponenttien $\bar{F}_{2x}$ ja $\bar{F}_{2y}$ varret ovat $r_{2x} = 1{,}0$ m ja $r_{2y} = 5{,}0$ m. Kiertosuuntasopimuksen mukaan akselin A suhteen $\bar{F}_{2x}$:n ja $\bar{F}_{2y}$:n momentit ovat positiivisia. Voimien $\bar{F}_1$ ja $\bar{F}_2$ momenttien summa on

$\Sigma M_A = -F_1 r_1 + F_{2x} \cdot r_{2x} + F_{2y} \cdot r_{2y}$

$= -2{,}0\ \text{N} \cdot 3{,}0\ \text{m} + 2{,}0\ \text{N} \cdot 1{,}0\ \text{m} + 3{,}0\ \text{N} \cdot 5{,}0\ \text{m} = 11\ \text{Nm}.$

Koska momenttien summa on positiivinen, momentin kokonaisvaikutus on vastapäivään.

Vastaus

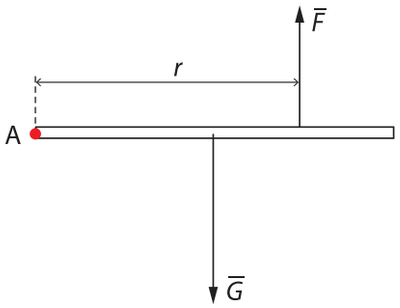
a) 6,0 Nm myötäpäivään. **b)** 14 Nm vastapäivään.

c) 11 Nm vastapäivään.

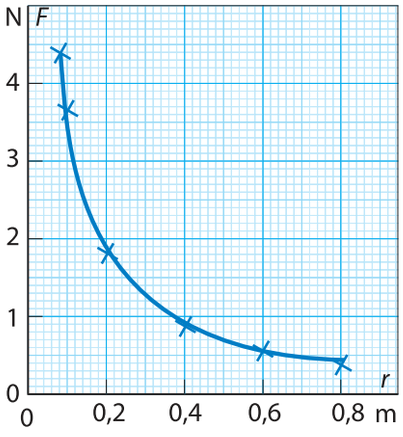
!

Huomaa, että voiman $\bar{F}_2$ komponenttien $\bar{F}_{2x}$ ja $\bar{F}_{2y}$ varret r_{2x} ja r_{2y} riippuvat siitä, mikä on kiertoakseli.

E Esimerkki 3



Opiskelijat kiinnittivät metallitangon toisen pään kiertoakseliin A viereisen kuvan mukaisesti. Tankoon kohdistuva paino $\overline{G}$ pyrkii kiertämään tankoa akselin ympäri. Opiskelijat mittasivat tasapainottavan voiman $\overline{F}$ suuruuden eri etäisyyksillä kiertoakselista. Mittaustulokset on esitetty viereisessä *r*,*F*-koordinaatistossa. Määritä kuvaajan avulla voiman $\overline{F}$ momentti kiertoakselin A suhteen.



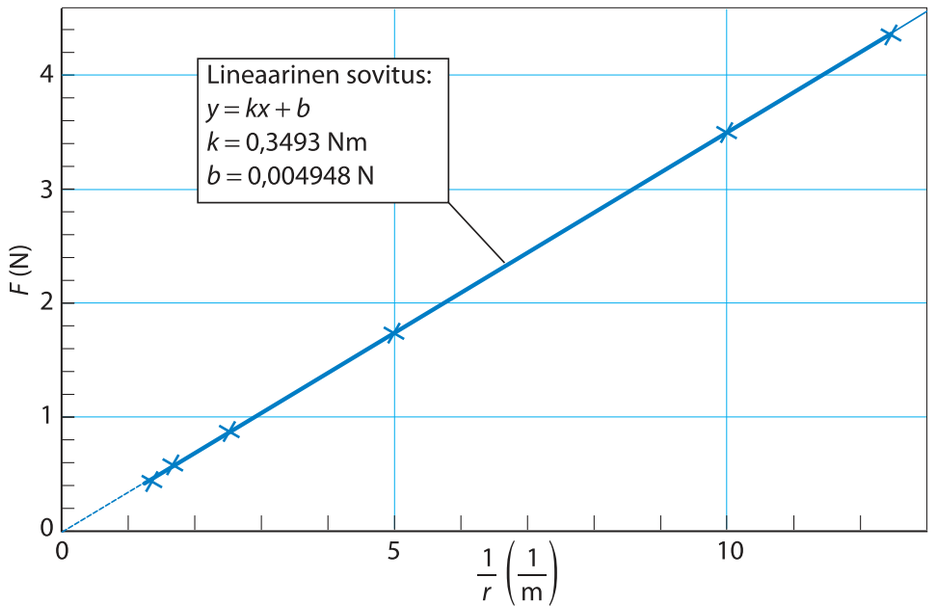
Mittaustulokset *r*,*F*-koordinaatistossa.

Ratkaisu

Voiman $\overline{F}$ momentti akselin A suhteen etäisyydellä *r* kiertoakselista on $M_A = Fr$. Koska $F = M_A \frac{1}{r}$, esitetään mittaustulokset $\frac{1}{r}$,*F*-koordinaatistossa. Laaditaan kuvaajan avulla seuraava taulukko.

F (N)	0,44	0,58	0,89	1,75	3,50	4,37
r (m)	0,80	0,60	0,40	0,20	0,10	0,08
$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{m}}\right)$	1,25	1,67	2,50	5,00	10,00	12,50

Mittaustulokset $\frac{1}{r}$,*F*-koordinaatistossa.



Sovitetaan pistejoukkoon suora. Mittausohjelma antaa voiman momentiksi akselin A suhteen $M_A \approx 0{,}35$ Nm.

Vastaus

Voiman momentti kiertoakselin A suhteen on 0,35 Nm vastapäivään.

TEHTÄVÄT

9-1. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?

a) Kappaleeseen kohdistuvalla voimalla on aina vääntövaikutus.

b) Kappaleeseen kohdistuvalla voimalla on vääntövaikutus, jos kiertoakseli ei ole voiman vaikutussuoralla.

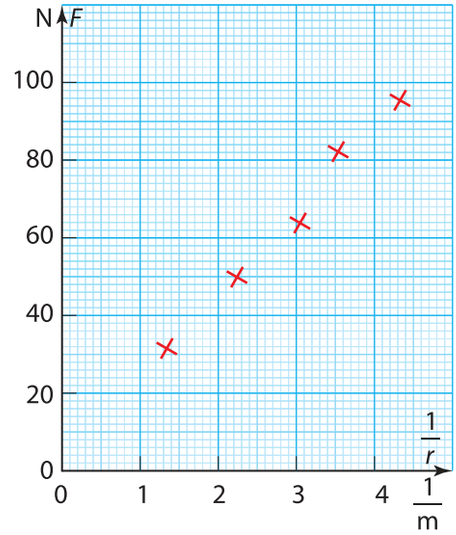
c) Voiman momentti on kääntäen verrannollinen voiman vaikutussuoran etäisyyteen kiertoakselista.

9-2. Jos soudat oikean käden puoleisella airolla voimakkaammin kuin vasemman käden puoleisella airolla, mihin suuntaan vene kääntyy?

9-3. Katso palvelimelta video Oven sulkeutuminen. Miksi videolla este liukuu ensimmäisessä tapauksessa ja toisessa tapauksessa ei liu´u?

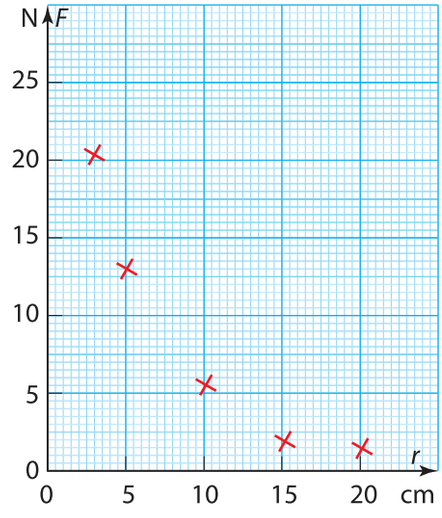
9-4. Erään auton pyörien muttereita kiinnitettäessä voiman momentin tulee olla vähintään 130 Nm. Laske pienin voima, joka muttereiden kiristämiseen tarvitaan, kun voiman vääntövarren pituus on 24 cm.

9-5. Niko ja Laura mittasivat kuinka suuri voima eri etäisyyksillä saranoista tarvitaan automaattisesti sulkeutuvan oven auki pitämiseen. Mittaustulosten perusteella he merkitsivät pisteet $\frac{1}{r}$,F-kuvaajaan.



Lataa piirros palvelimelta. Määritä suoran avulla oven auki pitämiseen tarvittavan voiman momentti.

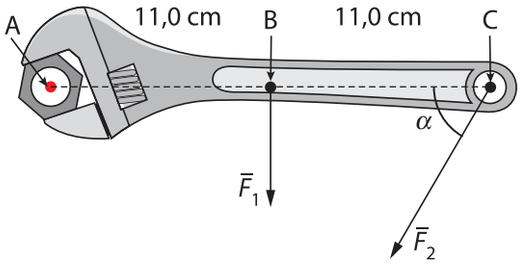
9-6. Tiia ja Petja tutkivat, kuinka suuri momentti tarvitaan pultin kiertämiseen jakoavaimella. He mittasivat tarvittavan voiman suuruuden eri etäisyyksillä kiertoakselista. Määritä kiertämiseen tarvittava voiman momentti r,F-koordinaatistoon merkittyjen mittaustulosten avulla.



9-7. Jakoavaimeen vaikuttavien voimien suuruudet ovat $F_1 = 4{,}0$ N ja $F_2 = 6{,}0$ N. Voima F_1 on kohtisuorassa AB:tä vastaan.

a) Laske voiman $\overline{F}_1$ momentti akselin A suhteen.

b) Kuinka suuri on voimien $\overline{F}_1$ ja $\overline{F}_2$ momenttien summa akselin A suhteen, jos kulma α on 90°? Entä jos $\alpha = 50°$?



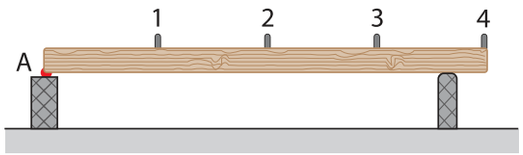
9-8. Tony ja Jenna tutkivat voiman momenttia 0,75 m pitkän vaakasuoran metallitangon avulla. Tanko oli kiinnitetty toisesta päästä kiertoakseliin. Tasapainottava voima oli kohtisuorassa tankoa vastaan. Mittaustulokset ovat taulukossa, jossa F on tasapainottavan voiman suuruus ja r voiman vaikutussuoran etäisyys kiertoakselista.

***r* (m)**	0,15	0,30	0,45	0,60	0,75
***F* (N)**	36,5	17,8	12,0	8,8	7,3

Määritä sopivan koordinaatiston avulla tasapainottavan voiman momentti.

9-9. Katso palvelimelta video Voiman momentti. Määritä videon perusteella ripustuslangan tauluviivaimeen kohdistavan voiman momentti. Kiertoakseli on viivaimen kohdassa 0,078 m.

9-10. Kuntoradalla on kuvan mukainen 3,0 m pitkä tukki. Siihen on kiinnitetty nostokahvat tasavälisesti 0,75 m:n välein.
Kuinka suurella voimalla tukkia pitää nostaa kustakin kahvasta, jotta tukki irtoaa tueltaan? Tukin massa on 46 kg.



9-11. Polkupyöräilijä ajaa oikealle ja jarruttaa seisomalla polkimella koko painollaan. Kuinka suuri on painon momentti polkimen akselin suhteen, jos poljin muodostaa 75° kulman

a) pystysuoran suunnan suhteen

b) vaakasuoran suunnan suhteen?

Piirrä kuva kummastakin tilanteesta. Pyöräilijän massa on 57 kg ja polkimen varren pituus 17 cm.

9-12. Uimahyppääjä seisoo ponnahduslaudan päässä 2,0 m:n etäisyydellä laudan tyvestä (kiertoakselista). Laske laudan ja hyppääjän painon momentti kiertoakselin suhteen. Tasapaksun laudan massa on 15,0 kg ja hyppääjän 78 kg.

10 Jäykän kappaleen tasapaino

Sillat ovat tasapainossa olevia kappaleita, joihin kohdistuu monia voimia.

! Keskeisiä asioita

- **tasapaino**
- **painopiste**
- **jäykän kappaleen tasapaino**

T Tutki

Kirja tasapainossa.

1. Painopiste

Aseta kirja tasapainoon tukemalla sitä sopivasta kohdasta kynän kärjellä. Etsi tukipiste kokeilemalla.

2. Jäykän kappaleen tasapaino

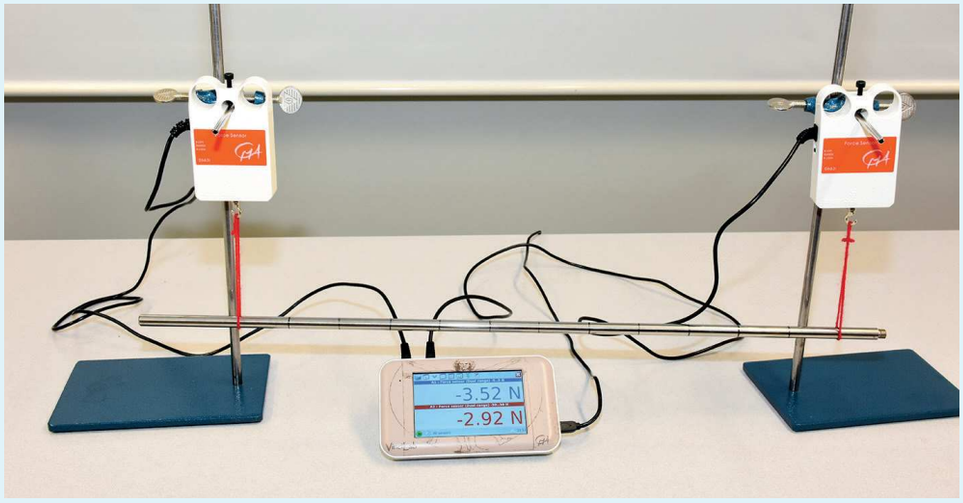
Ripusta tasapaksu metallitanko vaakasuoraan asentoon kahden voima-anturin varaan. Muuta antureiden paikkaa niin, että tanko pysyy vaakasuorassa asennossa tasapainossa. Tutki kaikissa tilanteissa tasapainossa olevaan tankoon kohdistuvien voimien

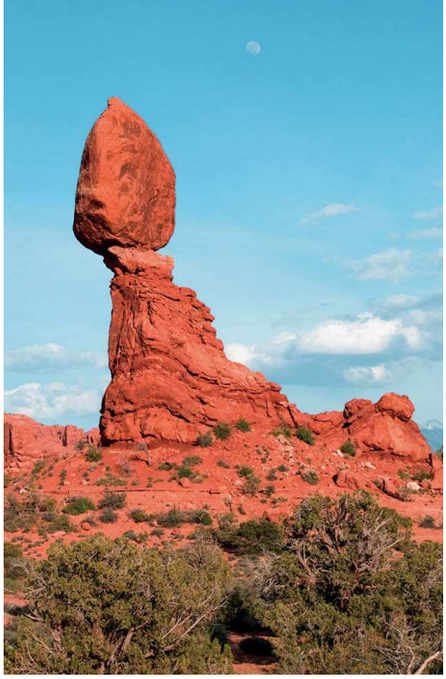
a) summaa

b) momenttien summaa.

Laske momenttien summa kahden eri kiertoakselin suhteen.

Painopisteen tulee pysyä rungon yläpuolella.

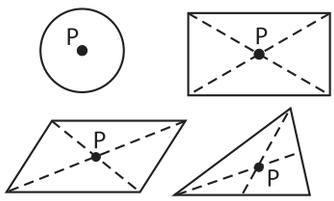




Balance Rock, Arches National Park, USA.

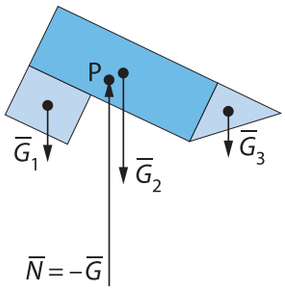
Painopiste

Miksi painopisteen paikka on ajoneuvon kuormauksessa tärkeä? Missä on hyvä painopisteen paikka?



Homogeenisten, tasapaksujen levyjen painopisteiden P paikkoja.

Painopiste on tukipinnan yläpuolella. Miksi haara-asento on kapeaa seisoma-asentoa tukevampi seisomiseen?



P on kappaleen painopiste, $\overline{G} = \overline{G}_1 + \overline{G}_2 + \overline{G}_3$

Statiikka (kreik. *statike* 'tasapainotus') on mekaniikan osa-alue, jossa tutkitaan tasapainossa olevia kappaleita ja niiden tasapainoon liittyviä voimia ja ehtoja. Statiikassa voimat jaetaan usein **kuormittaviin** ja **tasapainottaviin voimiin**.

Esimerkiksi siltaa kuormittavia voimia ovat siltaan itseensä kohdistuva paino sekä sillalla kulkevista ajoneuvoista ja tuulesta aiheutuvat voimat. Maan, sillan tukipilarien ja riippusillan vaijerien siltaan kohdistamat voimat ovat tasapainottavia voimia.

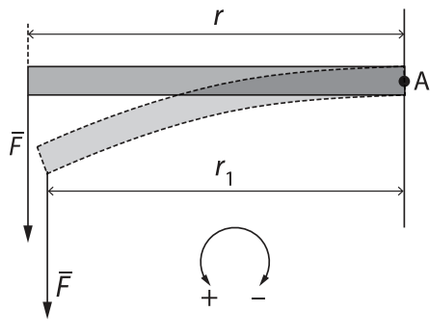
Tutkimuksessa 1 huomattiin, että kirja saatiin pysymään kynän kärjellä, kun kärki oli kirjan kannen keskellä. Tällöin kynän kärki on suoraan kirjan **painopisteen** alapuolella. Painopiste on kappaleeseen kohdistuvan painon ajateltu vaikutuspiste.

Nelijalkainen ruokapöytä seisoo horjumatta lattialla, koska pöydän jalat ovat kaukana toisistaan. Jalkojen ja lattian kosketuskohdat ovat suorakulmion kärkinä, jotka määrittelevät pöydän **tukipinnan**. Pöytä on tasapainossa, koska pöydän painopiste on tukipinnan yläpuolella.

Kappaleen painopiste

- Painopiste on kappaleeseen kohdistuvan painon ajateltu vaikutuspiste.
- Kappaleen painopiste on piste, jonka kautta kappaleeseen kohdistuvan painon vaikutussuora kulkee aina, olipa kappale missä asennossa tahansa.
- Jäykkään kappaleeseen kohdistuvan painon vaikutus voidaan kumota vastakkaissuuntaisella tukivoimalla, jonka vaikutussuora kulkee painopisteen kautta.

Jäykän kappaleen tasapaino



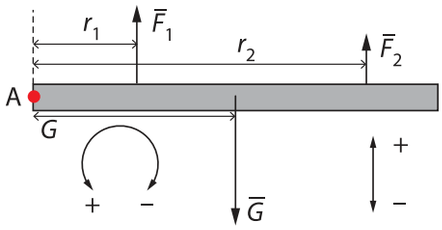
Jäykän kappaleen malli: $M_A = Fr$. Voima voi muuttaa todellisen kappaleen muotoa: $M_A = Fr_1$. Kappaleen muodonmuutosta on piirroksessa liioiteltu.

Rakennusten seinät, katto, tukirakenteet ja lattiat ovat lähes jäykkiä kappaleita, joten niitä voidaan mallintaa sellaisina. Jäykän kappaleen muoto ei muutu kappaleeseen kohdistuvien voimien vaikutuksesta. Ongenvapa, seiväshyppääjän seiväs ja jousi eivät ole jäykkiä kappaleita. Niiden muoto muuttuu niitä käytettäessä. Tässä luvussa ei oteta huomioon kappaleisiin kohdistuvien voimien aiheuttamia muodonmuutoksia.

Tutkimuksessa 2 käytetty metallitanko oli jäykkä kappale, joka oli tasapainossa tankoon kohdistuvien voimien ja voimien momenttien ansiosta.

Taulukossa on mitattujen voimien suuruudet ja niiden vaikutussuorien etäisyydet valitusta kiertoakselista A.

	F_1 (N)	r_1 (m)	F_2 (N)	r_2 (m)	G (N)	r_G (m)
1	3,52	0,100	2,92	0,700	6,45	0,375
2	2,38	0,150	4,11	0,500	6,45	0,375
3	2,76	0,200	3,66	0,500	6,45	0,375
4	4,23	0,250	2,23	0,600	6,45	0,375



Lasketaan mittaustuloksista tankoon kohdistuvien voimien summa $\sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G}$ ja voimien momenttien summa $\Sigma M_A = F_1 r_1 + F_2 r_2 - G r_G$ kussakin tilanteessa.

Kun suunta ylös on positiivinen, esimerkiksi taulukon kolmannelta riviltä saadaan voimien suuruuksien summaksi
$\Sigma F = F_1 + F_2 - G = 2{,}76\ \text{N} + 3{,}66\ \text{N} - 6{,}45\ \text{N} = -0{,}03\ \text{N} \approx 0{,}0\ \text{N}.$

!

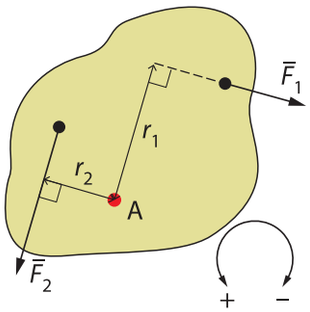
Huomaa, että tutkimusta esittävässä valokuvassa anturi näyttää voimat negatiivisina.

Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, momenttien summa kiertoakselin A suhteen on

$$\begin{aligned}\Sigma M_A &= F_1 r_1 + F_2 r_2 - G r_G \\ &= 2{,}76\ \text{N} \cdot 0{,}200\ \text{m} + 3{,}66\ \text{N} \cdot 0{,}500\ \text{m} - 6{,}45\ \text{N} \cdot 0{,}375\ \text{m} \\ &= -0{,}03675\ \text{Nm} \approx 0{,}0\ \text{Nm}.\end{aligned}$$

Tutkimus voidaan toistaa erilaisissa tilanteissa ja niiden perusteella voidaan päätellä, että tasapainossa olevaan kappaleeseen kohdistuvien **voimien summa** on **nolla** ja **momenttien summa** on **nolla**.

Jäykän kappaleen tasapainoehdot



Kappale on tasapainossa pyörimisen suhteen, jos $\Sigma M_A = 0$ eli $-F_1 r_1 + F_2 r_2 = 0$.

Jos kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoima on nolla eli $\sum \bar{F} = \bar{0}$, Newtonin II lain perusteella kappale on etenemisen suhteen levossa tai tasaisessa liikkeessä. Tällöin sanotaan, että kappale on **tasapainossa etenemisen suhteen**.

Kappaleeseen kohdistuvien voimien momenteilla on vääntövaikutus kiertoakselin suhteen. Kappaleet voivat silti olla levossa pyörimisen suhteen tai ne voivat pyöriä niin, että pyöriminen ei muutu. Tällöin kappaleisiin kohdistuvat vääntövaikutukset kumoavat toisensa eli voimien momenttien summa on nolla. Tällöin sanotaan, että kappale on **tasapainossa pyörimisen suhteen**.

Momentilla on sama rooli pyörimisessä kuin voimalla etenemisessä.

Jäykän kappaleen tasapaino

Jäykkä kappale on tasapainossa, jos kappaleella ei ole etenemisliikkeen eikä pyörimisliikkeen kiihtyvyyttä. Tasapainoehdot ovat seuraavat:

- kappaleeseen vaikuttavien voimien summa on nolla eli $\sum \bar{F} = \bar{0}$ (tasapaino etenemisen suhteen)
- kappaleeseen vaikuttavien voimien momenttien summa minkä tahansa akselin suhteen on nolla eli $\Sigma M = 0$ (tasapaino pyörimisen suhteen).

Pisan kaltevaa tornia ei oikaista pystyyn, koska vino torni on turismin suuri vetonaula (Pisa, Italia).

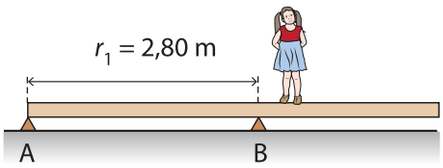
Edellä olevien ehtojen toteutuessa tasapainossa olevasta kappaleesta voidaan todeta:

- jos kappale on levossa, se myös pysyy levossa
- jos kappale on liikkeessä, liike ei muutu.

Statiikan tehtävän ratkaisun eteneminen

1. Piirrä kuva tarkasteltavasta tilanteesta ja merkitse kuvaan kaikki kappaleeseen vaikuttavat voimat. Jaa voimat tarvittaessa komponentteihin.
2. Kirjoita tasapainoehdot $\sum \bar{F} = \bar{0}$ ja $\Sigma M = 0$.
3. Valitse kiertoakseli siten, että sen kautta kulkee mahdollisimman monen voiman vaikutussuora. Tällöin momenttiehto saa mahdollisimman yksinkertaisen muodon.
4. Ratkaise tasapainoehdoista saaduista yhtälöistä kysytyt suureet. Jos jokin voimista tulee negatiiviseksi, kyseisen voiman suunta on päinvastainen kuin kuvaan piirtämäsi voimavektorin suunta.

E Esimerkki 1



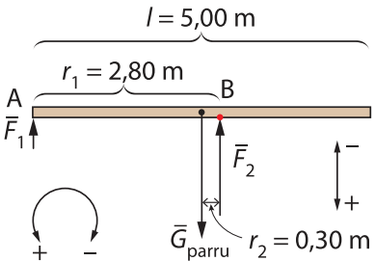
Parru, jonka pituus on 5,00 m ja massa 80,0 kg, on kahden tuen varassa. Parrun painopiste on parrun keskipisteessä.

a) Laske tukipisteissä A ja B parruun vaikuttavat tukivoimat, kun Sanna ei vielä ole parrun päällä.

b) Kuinka pitkälle tukipisteen B oikealle puolelle Sanna, jonka massa on 48,0 kg, voi kävellä niin, että parru pysyy vielä tasapainossa?

Ratkaisu

$l = 5{,}00$ m, $m_{\text{parru}} = 80{,}0$ kg, $m_{\text{Sanna}} = 48{,}0$ kg, $r_1 = 2{,}80$ m



Pelkkä parru

a) Tarkastellaan parrun tasapainoa. Asetetaan momenttiakseli pisteeseen B: tällöin voiman F_2 momentti on nolla. Tasapainotilanteessa momenttien summa on nolla. Kun suunta vastapäivään on positiivinen, momenttiyhtälö akselin B suhteen on $\Sigma M_B = -F_1 r_1 + G_{\text{parru}} r_2 = 0$.

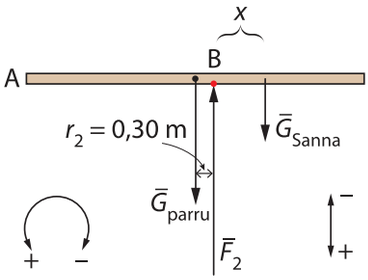
Momenttiyhtälöstä saadaan voiman $\overline{F}_1$ suuruudeksi

$$F_1 = \frac{G_{\text{parru}} r_2}{r_1} = \frac{m_{\text{parru}} g r_2}{r_1}$$

$$= \frac{80{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}30\ \text{m}}{2{,}80\ \text{m}} = 84{,}0857\ \text{N} \approx 84\ \text{N}.$$

Tasapainoehto pystysuunnassa on Newtonin II lain mukaan $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{G}_{\text{parru}} = \overline{0}$. Kun suunta alas valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $-F_1 - F_2 + G_{\text{parru}} = 0$. Tukipisteessä B parruun kohdistuvan voiman suuruus on

$$F_2 = G_{\text{parru}} - F_1 = 80{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 - 84{,}0857\ \text{N} \approx 701\ \text{N}.$$



Sanna vaikuttaa parruun painonsa suuruisella voimalla.

b) Kun Sanna siirtyy niin kauas oikealle, että parru pysyy juuri ja juuri tasapainossa, pisteessä A vaikuttava tukivoima on nolla. Asetetaan momenttiakseli pisteeseen B. Tasapainotilanteessa momenttien summa on nolla. Koska kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, on momenttiyhtälö akselin B suhteen

$\Sigma M_B = -G_{\text{Sanna}} \cdot x + G_{\text{parru}} \cdot r_2 = 0$, jossa x on etäisyys pisteestä B oikealle.

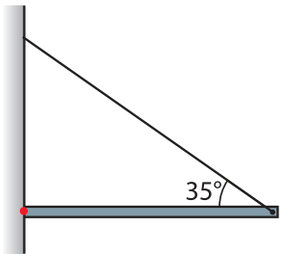
Etäisyydeksi x saadaan

$$x = \frac{G_{\text{parru}} \cdot r_2}{G_{\text{Sanna}}} = \frac{m_{\text{parru}} g \cdot r_2}{m_{\text{Sanna}} g} = \frac{m_{\text{parru}} \cdot r_2}{m_{\text{Sanna}}} = \frac{80{,}0\ \text{kg} \cdot 0{,}30\ \text{m}}{48{,}0\ \text{kg}} = 0{,}50\ \text{m}.$$

Vastaus

a) 84 N ja 701 N **b)** Sanna voi kävellä 0,50 m tuen B oikealle puolelle.

E Esimerkki 2



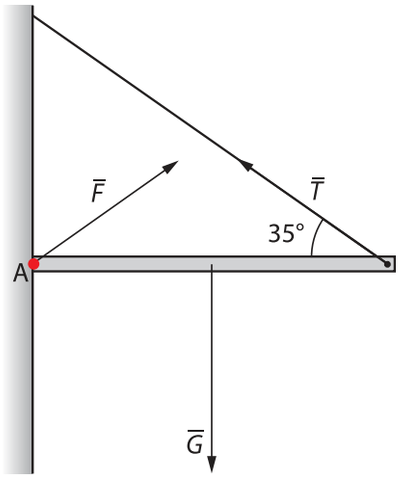
Oheisen kuvan mukaisessa systeemissä vaakasuorassa olevan homogeenisen saranoidun tangon massa on 2,2 kg. Laske

a) langan jännitysvoiman suuruus

b) saranan tankoon kohdistama voima.

Ratkaisu

$m = 2{,}2\ \text{kg}$, $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$, $\alpha = 35°$

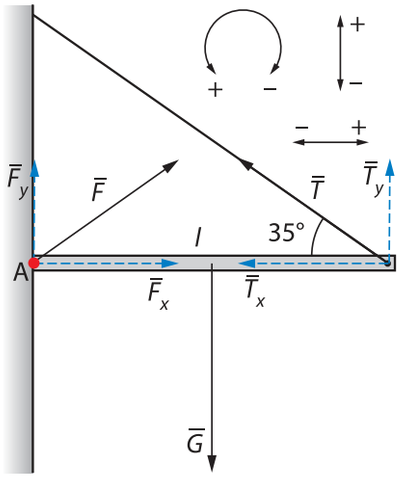


a) $\overline{G}$ on paino, $\overline{T}$ langan jännitysvoima ja $\overline{F}$ saranan tankoon kohdistama voima. Tanko on tasapainossa pyörimisen suhteen, joten voimien momenttien summa on nolla. Jaetaan voima $\overline{T}$ vaaka- ja pystykomponentteihin. Valitaan kiertosuunta vastapäivään positiiviseksi, joten momenttiyhtälö akselin A suhteen on

$\sum M_A = T_y \cdot l - G \cdot \frac{l}{2} = 0$. Tangon pituus l supistuu pois. Yhtälöstä saadaan komponentin T_y suuruudeksi

$$T_y = \frac{1}{2}G = \frac{1}{2}mg = \frac{1}{2} \cdot 2{,}2\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 10{,}791\ \text{N}.$$

Kuvion mukaan on $\sin 35° = \frac{T_y}{T}$, joten langan jännitysvoiman suuruus on $T = \frac{T_y}{\sin 35°} = \frac{10{,}791\ \text{N}}{\sin 35°} \approx 19\ \text{N}$.



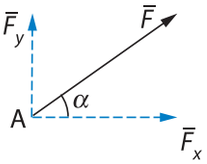
b) Tangon tasapainoehto pystysuunnassa on Newtonin II lain perusteella $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{F}_y + \overline{T}_y + \overline{G} = \overline{0}$. Kun suunta ylös on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $F_y + T_y - G = 0$.
Saranan tankoon kohdistaman voiman pystysuoran komponentin suuruus on $F_y = G - T_y = 2{,}2\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 - 10{,}791\ \text{N} = 10{,}791\ \text{N}$.

Tangon tasapainoehto vaakasuunnassa on Newtonin II lain perusteella $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{F}_x + \overline{T}_x = \overline{0}$. Kun suunta oikealle on positiivinen, skalaariyhtälö on $F_x - T_x = 0$, joten

$$F_x = T_x = \frac{T_y}{\tan 35°} = \frac{10{,}791\ \text{N}}{\tan 35°} \approx 15{,}4111\ \text{N}.$$

Saranan tankoon kohdistaman voiman suuruus on

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(15{,}4111\ \text{N})^2 + (10{,}791\ \text{N})^2} \approx 19\ \text{N}.$$



Yhtälöstä $\tan\alpha = \frac{F_y}{F_x} = \frac{10{,}791\ \text{N}}{15{,}4111\ \text{N}}$ saadaan voiman suuntakulmaksi $\alpha \approx 35°$.

Vastaus

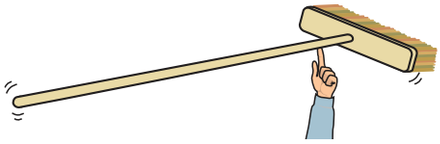
a) 19 N **b)** 19 N, $\alpha = 35°$ kuvion mukaisesti.

TEHTÄVÄT

10-1. **a)** Kuvassa on kaltevalla tasolla laatikoita, jotka on kiinnitetty teipillä oikeasta alareunastaan. Tasoa kallistetaan lisää hitaasti, kunnes kaikki laatikot ovat kääntyneet akselina toimivan teipin ympäri. Numeroi laatikot vasemmalta oikealle. Tee ennuste, missä järjestyksessä laatikot kaatuvat.

b) Katso palvelimelta video Laatikon painopiste ja tarkista ennusteesi paikkansapitävyys.

10-2. Harjaa pidetään tasapainossa kuvan mukaisesti. Harja sahataan kahteen osaan sormen kohdalta ja osat punnitaan.



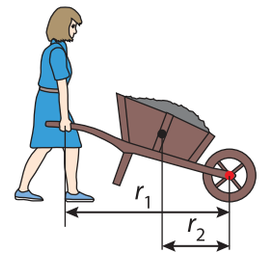
Mikä väitteistä on totta?

a) Sahatut osat ovat yhtä painavia.
b) Harjan puoleinen osa on painavampi.
c) Varren puoleinen osa on painavampi.
d) Totuus selviää vain sahaamalla harja ja punnitsemalla osat.

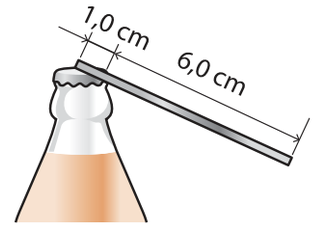
10-3. **a)** Miksi painonnostokilpailussa tangon kumpaankin päähän laitetaan yhtä suuret levypainot?
b) Miksi nostossa käytetään leveää otetta?

10-4. Mirja lähti aamulla kouluun ja jätti kuvassa olevan kukkamaljakon pöydälleen. Iltapäivällä, kun Mirja tuli kotiin, maljakko oli kaatunut. Kotona ei ollut ketään päivän aikana. Selitä maljakon kaatuminen.

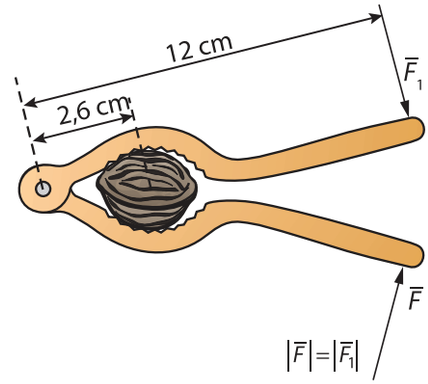
10-5. **a)** Kuinka suuri voima kohdistuu kärryn aisoista kumpaankin käteen, kun kärryyn (ilman pyörää) ja kuormaan kohdistuvan painon suuruus on 430 N?
Kuvassa $r_1 = 1{,}2$ m ja $r_2 = 0{,}47$ m.



b) Kuinka moninkertainen korkin reunaan kohdistuva voima on vääntävään voimaan verrattuna, kun avainta nostetaan varren päästä?



10-6. Pähkinänkuoren särkemiseen tarvitaan vähintään 43 N:n voima pähkinän molemmilta puolilta. Kuinka suurella voimalla pähkinänsärkijän varsia on painettava?



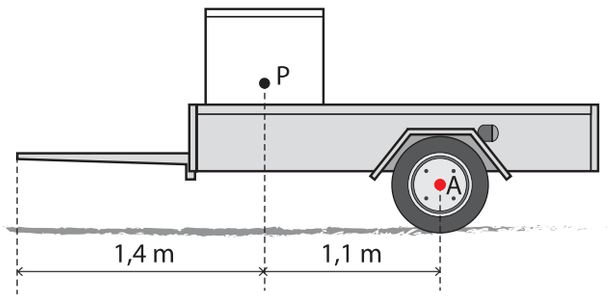
10-7. Kaksi miestä kantaa olkapäillään vaaka-asennossa 6,0 m:n mittaista tasapaksua hirttä, jonka massa on 140 kg. Miesten välimatka on 3,0 m, ja toinen mies on 2,0 m:n etäisyydellä hirren päästä. Kuinka suurella voimalla kumpikin miehistä kannattelee hirttä?

10-8. Kuvan mukainen henkilöauton peräkärry on aluksi tasapainossa pyöriensä akselin suhteen, eli aisaan kohdistuva tukivoima on 0,0 N. Kärryn kokonaismassa on tällöin 570 kg. Lavan etuosaan lisätään kuvan mukaisesti pesukone, jonka massa on 65 kg. Kuvassa P on pesukoneen painopisteen paikka.

a) Laske voima, joka kohdistuu henkilöauton vetokoukusta peräkärryn aisan päähän.

b) Laske pyöriin kohdistuva tukivoima.

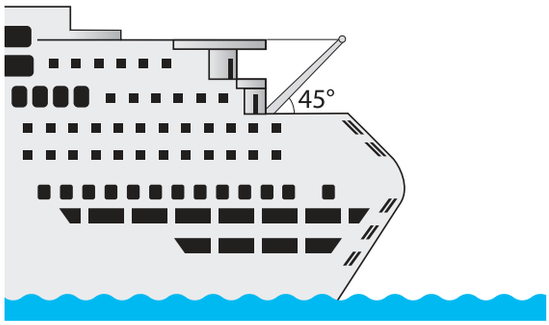
c) Miksi pesukonetta ei saa sijoittaa pyörien akselin A taakse?



10-9. Laivan lipputanko on kiinnitetty laivan seinään kuvan mukaisesti: yläpäästään se on kiinnitetty vaakasuoralla vaijerilla ja alapäästään saranalla. Lipputangon massa on 78 kg ja pituus 4,5 m. Laske

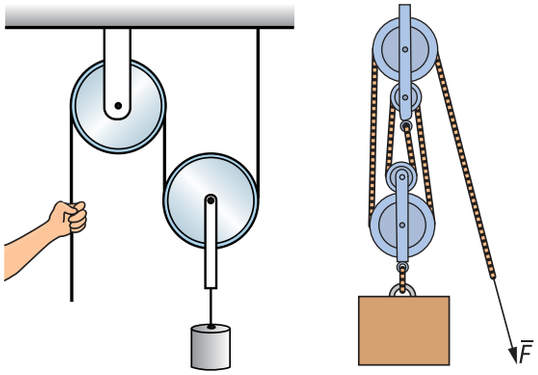
a) vaijerin jännitysvoima

b) saranan tukivoima tangon alapäässä.



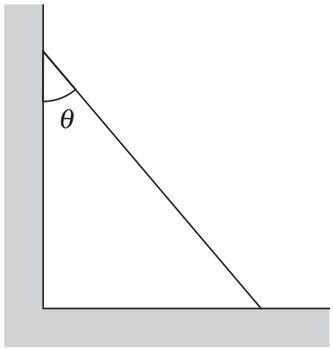
10-10. **a)** Kuormaa nostetaan vakionopeudella alla olevalla väkipyörälaitteistolla. Kuorman massa on 25 kg. Kuinka suurella voimalla köydestä pitää vetää, jotta kuorma nousee? Kitkaa ja liikkuvan pyörän massaa ei oteta huomioon.

b) Alla olevalla taljalla nostetaan vakionopeudella laatikkoa, jonka massa on 120 kg. Laske nostoon tarvittavan voiman suuruus. Kitkaa ja pyörien massa ei oteta huomioon.



a) Väkipyörä b) Talja

10-11. Tasapaksu lankku asetetaan nojaamaan liukasta seinää vasten. Lankun ja lattian välinen kitkakerroin on 0,42. Kuinka suureen kulmaan lankku voidaan korkeintaan asettaa seinään nähden, jotta lankku ei lähde liukumaan? [K2011, 6]



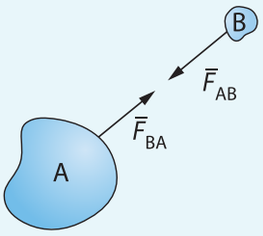
Tiivistelmä

Newtonin I laki eli jatkavuuden laki
Jos kappale ei ole vuorovaikutuksessa muiden kappaleiden kanssa, se pysyy paikallaan tai jatkaa liikettään suoraviivaisesti muuttumattomalla nopeudella.

Newtonin II laki eli dynamiikan peruslaki

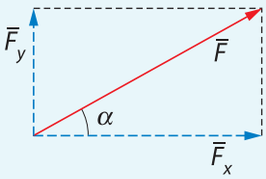
Kappaleen kiihtyvyys on $\overline{a} = \dfrac{\Sigma \overline{F}}{m}$.

Newtonin III laki eli voiman ja vastavoiman laki
Jos kappale A vaikuttaa kappaleeseen B voimalla $\overline{F}_{AB}$, kappale B vaikuttaa kappaleeseen A yhtä suurella mutta vastakkaissuuntaisella voimalla $\overline{F}_{BA}$.



Massa ja paino
- Massa on kappaleen ominaisuus, joka ilmenee kappaleen taipumuksena vastustaa liikkeensä muutosta. Massa myös määrää kappaleen aiheuttaman ja kokeman gravitaatiovuorovaikutuksen voimakkuuden.
- Paino on gravitaatiovuorovaikutuksen aiheuttama voima.

Kappaleeseen kohdistuvan painon suuruus on $G = mg$.

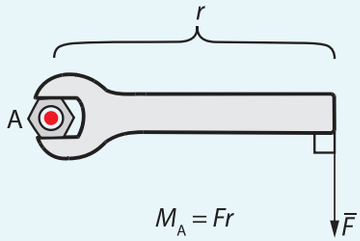


Voima $\overline{F}$ on komponenttiensa summa: $\overline{F} = \overline{F}_x + \overline{F}_y$.
Voiman $\overline{F}$ suuruus on
$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$.
Voiman $\overline{F}$ komponentit ovat
$F_x = F \cos \alpha$
$F_y = F \sin \alpha$.

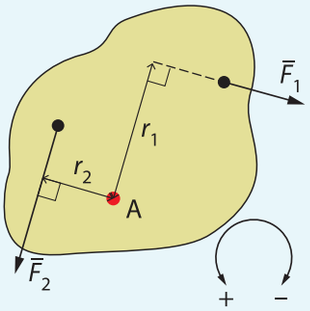
Kitka
- Liukukitka on $F_\mu = \mu N$.
- Lähtökitka (täysin kehittynyt lepokitka) on $F_{\mu 0,\max} = \mu_0 N$.

Arkhimedeen laki
Kun kappale on väliaineessa, siihen kohdistuu ylöspäin noste, joka on yhtä suuri kuin kappaleen syrjäyttämän väliainemäärän paino.

Noste
Kappaleeseen kohdistuvan nosteen suuruus on $N = \rho V g$.



Momentti akselin A suhteen
- Voiman $\overline{F}$ momentti kiertoakselin A suhteen on $M_A = Fr$, jossa r on voiman varsi eli voiman vaikutussuoran kohtisuora etäisyys kiertoakselista (momenttiakselista).
- Voiman momentti kuvaa vääntövaikutusta.



Jäykän kappaleen tasapaino
Jäykkä kappale on tasapainossa, jos kappaleella ei ole etenemisliikkeen eikä pyörimisliikkeen kiihtyvyyttä. Tasapainoehdot ovat seuraavat:
- kappaleeseen vaikuttavien voimien summa on nolla eli $\overline{F} = \overline{0}$ (tasapaino etenemisen suhteen)
- kappaleeseen vaikuttavien voimien momenttien summa minkä tahansa akselin suhteen on nolla eli $\Sigma M = 0$ (tasapaino pyörimisen suhteen).

TESTAA, OSAATKO

Oikeita vastausvaihtoehtoja voi olla yksi tai useampi.

1. Kun auto ajaa suoraan eteenpäin vakionopeudella, siihen vaikuttava kokonaisvoima
a) suuntautuu eteenpäin
b) suuntautuu taaksepäin
c) on nolla.

2. Kun auto ajaa suoraan eteenpäin kiihdyttäen, siihen vaikuttava kokonaisvoima
a) suuntautuu eteenpäin
b) suuntautuu taaksepäin
c) eroaa nollasta.

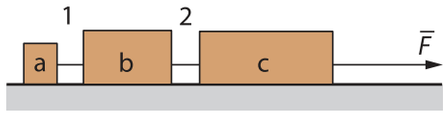
3. Liukukitka on
a) pienempi
b) yhtä suuri
c) suurempi
kuin lähtökitka.

4. Työnnät lattialla olevaa laatikkoa 100 N:n voimalla, mutta laatikko ei lähde liikkeelle. Mikä seuraavista väitteistä on tosi?
a) Kitkan suuruus on nolla, koska laatikko ei liiku.
b) Lepokitkan suuruus on 100 N.
c) Kitkan suuruutta ei voi selvittää ilman kitkakerrointa.

5. Nesteeseen upotettuun kappaleeseen vaikuttavan nosteen suuruus riippuu
a) kappaleen tilavuudesta
b) nesteen tiheydestä
c) kappaleen tiheydestä.

6. Kaloilla on uimarakko, jossa olevan ilman määrää ne pystyvät säätelemään. Kun uimarakossa olevan ilman määrä pienenee, kala
a) nousee ylöspäin
b) laskeutuu alaspäin
c) pysyy samalla syvyydellä.

7. Kuvan mukaista kolmen laatikon systeemiä vedetään kitkattomalla alustalla voimalla $\overline{F}$. Laatikko a on kevein ja laatikko c raskain. Laatikon a kiihtyvyys on
a) suurempi
b) pienempi
c) yhtä suuri
kuin laatikon b kiihtyvyys.



8. Edellisen tehtävän tilanteessa
a) langan 1 jännitysvoima on suurempi kuin langan 2 jännitysvoima
b) langan 1 jännitysvoima on pienempi kuin langan 2 jännitysvoima
c) jännitysvoimat ovat molemmissa langoissa yhtä suuret.

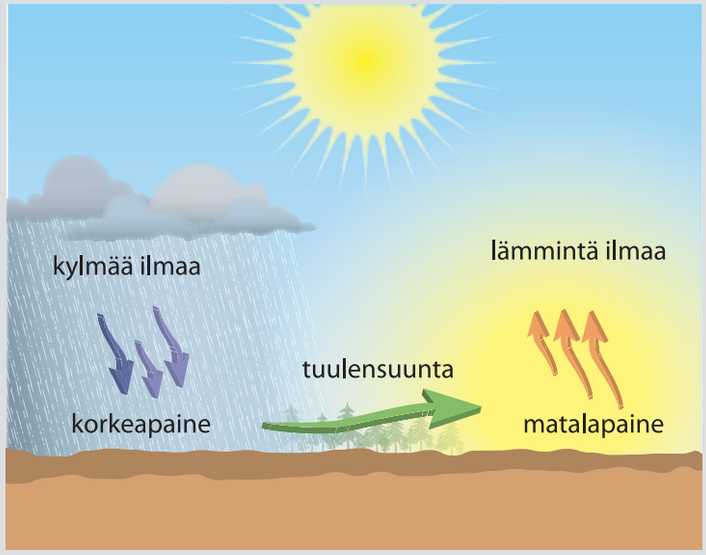
9. Miten mutteriin saadaan jakoavaimella suurin vääntövaikutus?
a) Voima kohdistetaan lähelle mutteria.
b) Voima kohdistetaan kauas mutterista.
c) Voiman suunta on kohtisuora jakoavaimen varteen nähden.

10. Miten kukka-amppelin ripustaminen seinään kiinnitettyyn tankoon vaikuttaa tangon kiinnityskohdan kuormitukseen?
a) Kuormitus on sitä suurempi, mitä lähemmäksi seinää amppeli ripustetaan.
b) Kuormitus on sitä pienempi, mitä lähemmäksi seinää amppeli ripustetaan.
c) Ripustuskohta ei vaikuta kuormitukseen, vaan siihen vaikuttaa ainoastaan amppelin massa.

Energiaa tuulesta ja vedestä

Ihmisen hyvinvointi perustuu energian järkevään hyväksikäyttöön. Jo pitkään on osattu hyödyntää luonnon tarjoamia uusiutuvia energiamuotoja, kuten tuulta ja veden virtausta.

Tuuli syntyy, kun Auringon säteily lämmittää maanpintaa ja lämmennyt ilma kohoaa muuta ilmaa kevyempänä ylös. Syntyy matalapaine, joka täyttyy tilalle virtaavalla ilmalla. Tätä Auringon toiminnan aikaansaamaa ilmanvirtausta eli tuulta on jo vuosituhansia käytetty hyödyksi tuulimyllyjen avulla. Tuulen liike-energia muunnetaan niissä käyttökelpoisempaan muotoon. Kun maailman perinteiset energiavarat, ennen kaikkea fossiiliset polttoaineet, ovat niukentuneet, tuulesta on tullut yhä merkittävämpi energialähde.



Tuulet ja veden kiertokulku luonnossa tapahtuvat Auringon vaikutuksesta.

Tuulimyllyt rakennetaan usein merelle, jossa on edulliset tuuliolosuhteet. Myös purjeveneet hyödyntävät tuulta.

Suomessa oli vuoden 2015 lopussa 387 tuulivoimalaitosta. Niiden yhteenlaskettu teho on 1005 MW. Vuonna 2015 tuulen avulla tuotettiin sähköä 2,3 TWh. Tuulivoimalaitokset kattoivat 2,8 prosenttia Suomessa kulutetusta sähköstä. Esimerkiksi Tanskassa noin 40 % energiatuotannosta perustuu tuulen hyödyntämiseen.

Tuulivoimalaitokset tarvitsevat tuekseen nopeasti käyttöönotettavaa säätösähköä, jos tuuliolosuhteissa tapahtuu lyhytkestoisia vaihteluja. Vesivoimalaitokset sopivat siihen parhaiten.

Tuulivoimalaitos tuottaa energiaa suurimmalla tehollaan, kun tuulen nopeus on noin 12 m/s. Nykyisin (2015) suurimpien laitoksien teho Suomessa on 5 MW.

Nykyään rakennetaan tuulipuistoja, joissa useita voimalaitoksia on sijoitettu samalla alueelle sopivan matkan päähän toisistaan. Ne pyritään sijoittamaan kauas asutuksesta meluhaittojen takia. Myös niiden maisemallisista vaikutuksista käydään keskustelua.

Padotussa vedessä on varastoituneena paljon energiaa.

Vesi on saasteeton tapa tuottaa energiaa. Se on myös hyvää säätövoimaa, sillä veden juoksutusta voimalan läpi voidaan helposti säädellä energian kulutuksen ja muun tuotannon määrän mukaan.

Haittapuolena ovat veden säännöstelyn vaikutukset ympäristöön, esimerkiksi kalastoon ja vesistöjen virkistyskäyttöön. Suurien säännöstelyaltaiden rakentamisella on ollut merkittäviä vaikutuksia alueiden ihmisten elämään ja luonnon ekologiaan.

Virtaava vesi pyörittää vesivoimalaitoksessa turbiineja, ja nämä sähköä tuottavia generaattoreita. Vesivoimalaitokset hyödyntävät vedentasojen korkeuseroon perustuvaa potentiaalienergiaa.

Suomen vesivoimakapasiteetti oli 3100 MW. Vesivoimaloiden osuus energiantuotannosta on noin 7 %. Se on suurin uusiutuva energiantuotantomuoto Suomessa.

Suomessa on noin 200 vesivoimalaitosta. Niistä merkittävimmät ovat Kemijoessa ja Oulujoessa. Oulujärven ja Perämeren korkeusero on 123 m ja Kemijoen alkulähteen ja Perämeren 230 m. Suomen ensimmäinen vesivoimalaitos valmistui Tammerkoskeen 1891. Sen ohitti merkittävyydessä Imatrankoskeen vuonna 1929 rakennettu voimalaitos. Vuolas Imatrankoski oli ennen voimalaitoksen rakentamista yksi Euroopan merkittävistä matkailunähtävyyksistä.

11 Työ

! Keskeisiä asioita

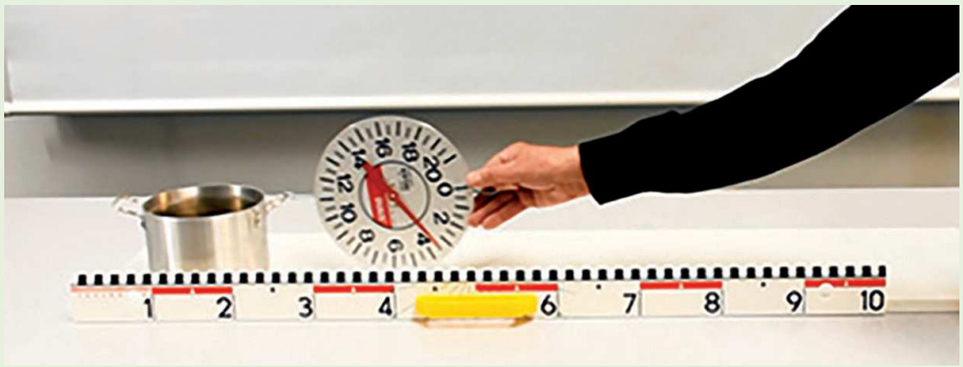
- **vakiovoiman tekemä työ**
- **teho**

Käden kosketusvoima tekee positiivista työtä liikutellessaan silitysrautaa.

T Tutki

Työ

Vedä kappaletta voimamittarin avulla sama matka ensin vaakasuoralla alustalla ja sitten kaltevalla alustalla. Vertaa voimien suuruuksia ja tehdyn työn määrää näissä kahdessa tapauksessa.



Tikapuita noustaessa ihmisen käsien ja jalkojen kosketusvoimat tekevät työtä.

Tekeekö nainen työtä, kun hän työntää kiveä?

Vesilautailussa vetolaitteen vaijerin jännitysvoiman tekemä työ on positiivinen. Veden vastusvoimien ja ilmanvastuksen tekemä työ on negatiivinen.

Voiman tekemä työ

Arkielämässä työllä tarkoitetaan yleensä jonkin tehtävän suorittamista. Teemme esimerkiksi kotitöitä, pihatöitä ja palkkatyötä, ja myös opiskelu on työtä.

Fysiikassa työllä on tätä rajoitetumpi merkitys. Fysiikan suure **työ kuvaa voiman vaikutusta liikkuvaan kappaleeseen**. Kun venettä vedetään maalle, veneeseen kohdistettu voima tekee työtä, samoin kun lumeen juuttunutta autoa työnnetään, työntävä voima tekee työtä. Polkupyörää jarrutettaessa työtä tekee puolestaan pyörän renkaiden ja tienpinnan välinen kitka.

Jos kappale ei liiku, kappaleeseen vaikuttavan voiman tekemä työ on nolla.

Vain siirtymän kanssa yhdensuuntainen kappaleeseen kohdistuvan voiman komponentti tekee työtä. Siirtymän suuntaa vastaan kohtisuorassa oleva voiman komponentti ei tee työtä. Tienpinnan polkupyörän renkaisiin kohdistama tukivoima ei tee työtä, koska se on kohtisuorassa liikkeen suuntaa vastaan.

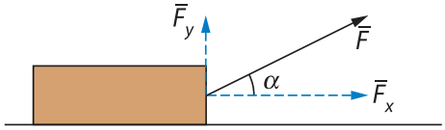
!

Kertaa työ ja teho Fysiikka 2, s. 35–36.

Voiman tekemä työ

Voiman $\overline{F}$ tekemä työ on $W = Fs$,
jossa $\overline{F}$ on kappaleen liikkeen suunnan kanssa yhdensuuntainen
ja s on kappaleen kulkema matka voiman vaikutuksen aikana.

Työn yksikkö on joule (J), 1 J = 1 Nm.



Voiman $\overline{F}$ liikkeen suuntainen komponentti $F_x = F\cos\alpha$ tekee työtä, liikettä vastaan kohtisuora komponentti $F_y = F\sin\alpha$ ei.

Jos voima $\overline{F}$ on vastakkaissuuntainen kappaleen liikkeen kanssa, voiman suuruus F ilmoitetaan negatiivisena, jolloin myös työ W on negatiivinen. Esimerkiksi polkupyörää jarruttavan kitkan tekemä työ on negatiivinen, koska kitka ja siirtymä ovat vastakkaissuuntaiset. Jos voima on samansuuntainen kuin siirtymä, sen tekemä työ on positiivinen.

Jos voiman $\overline{F}$ suunta poikkeaa liikkeen suunnasta (x-akselin suunnasta), on sen tekemä työ $W = F_x s$, jossa $F_x = F\cos\alpha$ ja α on voiman $\overline{F}$ ja siirtymän (liikkeen suunnan) välinen kulma.

Jos voima on kohtisuorassa siirtymää vastaan, on
$F_x = F\cos\alpha = F\cos 90° = 0$.

E Esimerkki 1

Matkaa pystysuorassa suunnassa merkitään tavallisesti tunnuksella h.

Muuttomiehet siirtävät flyygelin asuntoon nostamalla sen ensin nosturilla tasaisella vauhdilla 10 m:n korkeudelle parvekkeelle ja työntämällä sitä sen jälkeen 200 N:n suuruisella, lattian suuntaisella voimalla 15 m:n matkan asunnossa. Flyygelin massa on 370 kg. Kuinka suuren työn siirtämiseen käytetyt voimat tekevät yhteensä?

Ratkaisu

$h = 10$ m, $s = 15$ m, $m = 370$ kg, $F_2 = 200$ N, $g = 9{,}81$ m/s^2

Molemmissa työn vaiheissa voima on siirtymän suuntainen.

Koska nosto tapahtuu tasaisella vauhdilla, on nostava voima $\overline{F}_1$ yhtä suuri kuin vastakkaissuuntainen flyygeliin kohdistuva paino $\overline{G}$, joten $F_1 = mg = 370 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 3629{,}7$ N.

Voiman $\overline{F}_1$ nostossa tekemä työ on
$W_1 = F_1 \cdot h = 3629{,}7 \text{ N} \cdot 10 \text{ m} = 36\ 297$ J.

Työntämiseen käytetyn voiman $\overline{F}_2$ tekemä työ on
$W_2 = F_2 \cdot s = 200 \text{ N} \cdot 15 \text{ m} = 3000$ J.

Voimien tekemä kokonaistyö on silloin
$W = W_1 + W_2 = 36297 \text{ J} + 3000 \text{ J} = 39\ 297\text{J} \approx 40$ kJ.

Vastaus

Voimien tekemä työ on yhteensä 40 kJ.

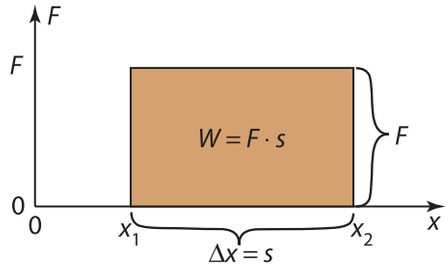
Leivottaessa työtä tekevät käsien kosketusvoimat. Kun taikinan muoto muuttuu, muuttuu sen sisäinen energia.

Kappaleeseen tai systeemiin kohdistuvan ulkoisen voiman tekemä työ ilmenee kappaleen tai systeemin energian muutoksena. Sen takia työn yksikkö on sama kuin energian yksikkö eli joule. Putoavaan kappaleeseen vaikuttavan painon tekemä työ ilmenee putoavan kappaleen nopeuden ja siten sen liikkeeseen liittyvän energian eli liike-energian kasvamisena (liike-energiasta puhutaan luvussa 12). Kitkan tekemä negatiivinen työ esimerkiksi polkupyörää jarrutettaessa ilmenee puolestaan polkupyörän liike-energian pienenemisenä.

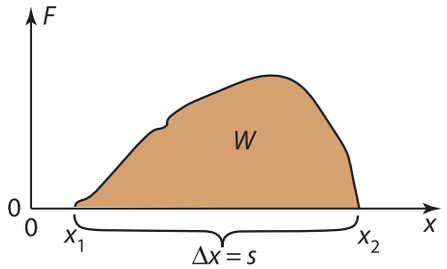
Työn graafinen määrittäminen

Tarkastellaan voiman tekemää työtä, kun kappaleen liike on suoraviivaista. Valitaan x-akseli liikkeen suuntaiseksi. Silloin kappaleen kulkema matka s on sama kuin siirtymä eli $s = \Delta x = x_2 - x_1$. Jos kappaleeseen vaikuttava, liikkeen suuntainen voima $\overline{F}$ on vakio, on sen kuvaaja x,F-koordinaatistossa vaakasuora. Voiman tekemä työ on silloin voiman kuvaajan ja x-akselin väliin jäävä fysikaalinen pinta-ala eli $W = Fs$. Tätä sanotaan voiman tekemän työn **graafiseksi määrittämiseksi**.

Työ voidaan määrittää samalla tavalla graafisesti myös muuttuvan voiman tapauksessa. Mittausohjelmaa käytettäessä ohjelma määrittää voiman kuvaajan $F(x)$ ja x-akselin väliin jäävän pinta-alan.

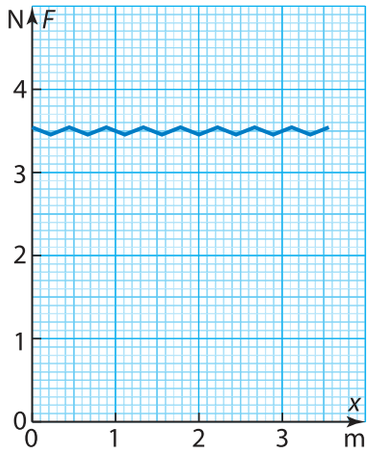


Vakiovoiman tekemä työ fysikaalisena pinta-alana.



Muuttuvan voiman tekemä työ fysikaalisena pinta-alana.

E Esimerkki 2

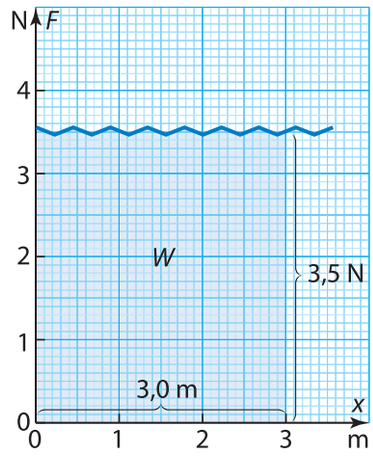


Kappaletta vedetään liikkeen suuntaisella voimalla vaakasuoraa pintaa pitkin. Kuvassa on esitetty voiman kuvaaja. Määritä graafisesti voiman tekemä työ, kun kappale siirtyy pisteestä $x_1 = 0{,}0$ m pisteeseen $x_2 = 3{,}0$ m.

Ratkaisu

Vetävän voiman tekemä työ on yhtä suuri kuin kuviossa voiman kuvaajan alapuolella olevan, kohdasta $x_1 = 0{,}0$ m kohtaan $x_2 = 3{,}0$ m ulottuvan alueen fysikaalinen pinta-ala. Voiman suuruus on voiman kuvaajan perusteella likimain vakio 3,5 N, joten työ on

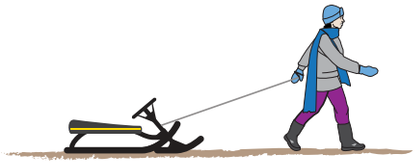
$$W = Fs = F\Delta x$$
$$\approx 3{,}5\ \text{N} \cdot (3{,}0\ \text{m} - 0{,}0\ \text{m}) \approx 11\ \text{J}.$$



Vastaus

Voiman tekemä työ on 11 J.

E Esimerkki 3



Kelkkaa vedetään tasaisella vaakasuoralla jalkakäytävällä 350 m:n matka. Kelkan nopeus on likimain vakio. Kelkan narun ja vaakasuoran suunnan välinen kulma on 25°. Narun kelkkaan kohdistama voima on keskimäärin 18 N.

a) Luettele kelkkaan kohdistuvat voimat.

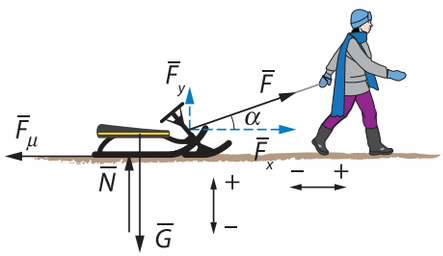
b) Kuinka suuri on narun kelkkaan kohdistaman voiman tekemä työ koko matkalla?

c) Määritä kitkan tekemä työ.

Ratkaisu

$F = 18\ \text{N}$, $\alpha = 25°$, $s = 350\ \text{m}$

a) Kelkkaan kohdistuvat voimat ovat paino $\overline{G}$, maanpinnan tukivoima $\overline{N}$, narun vetävä voima $\overline{F}$ ja kitka $\overline{F}_\mu$. Lisäksi kelkkaan vaikuttaa ilmanvastus, mutta se on tässä tapauksessa niin pieni muihin voimiin verrattuna, ettei sillä ole merkitystä.



b) Narun kelkkaan kohdistamasta voimasta $\overline{F}$ tekee työtä vain liikkeen suunnassa vaikuttava osa eli komponentti $\overline{F}_x$. Suorakulmaisen kolmion trigonometrian perusteella $\cos\alpha = \dfrac{F_x}{F}$, joten $F_x = F\cos\alpha$.

Työ on

$W = F_x s = F\cos\alpha \cdot s = 18\ \text{N} \cdot \cos 25° \cdot 350\ \text{m} \approx 5{,}7\ \text{kJ}.$

c) Koska kelkka liikkuu vakionopeudella, on siihen kohdistuva liikkeen suuntainen kokonaisvoima Newtonin II lain perusteella nolla.

Tällöin kitka on yhtä suuri kuin narun aiheuttaman voiman liikkeen suuntainen komponentti, mutta vastakkaissuuntainen, joten kitkan tekemä työ on $W_\mu \approx -5{,}7\ \text{kJ}$.

Vastaus

a) Kelkkaan kohdistuvat voimat ovat paino, maanpinnan tukivoima, narun vetävä voima ja kitka.

b) Työ on 5,7 kJ.

c) Kitkan tekemä työ on −5,7 kJ.

Mitä nopeammin nosto tapahtuu, sitä suurempi on voiman teho.

Voiman teho

Kuntosalilla saatat huomata kaverisi nostavan painoja nopeammin kuin sinä itse. Hän tekee nostot sinua tehokkaammin. Mitä nopeammin voima tekee tietyn työn, sitä suurempi on voiman teho.

Fysiikassa voiman keskimääräinen teho määritellään voiman tekemän työn W ja työhön kuluneen ajan t suhteena: $P = \frac{W}{t}$.

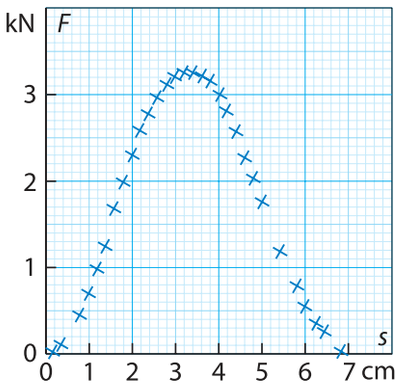
Voiman teho

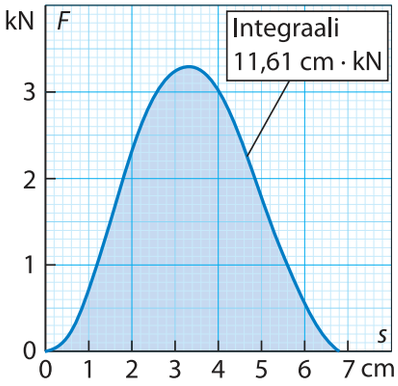
Voiman keskimääräinen teho on $P = \frac{W}{t}$, jossa W on voiman tekemä työ ja t on työhön kulunut aika.

Jos mies työntää autoa vakiovoimalla F matkan s, hänen autoon kohdistamansa voima tekee työn $W = Fs$. Mikäli auto liikkuu nopeudella v, ja työntäminen kestää ajan t, on voiman teho työnnön aikana

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Fs}{t} = F \cdot \frac{s}{t} = Fv.$$

E Esimerkki 4





Kuvassa on esitetty kappaleeseen 4,7 ms:n ajan vaikuttaneen voiman kuvaaja. Määritä voiman keskimääräinen teho.

Ratkaisu

$t = 4{,}7$ ms

Mittausohjelman mukaan voiman kuvaajan rajoittaman pinnan fysikaalinen pinta-ala on 11,61 cm · kN = 116,1 Nm = 116,1 J.
Voiman keskimääräinen teho on

$$P_k = \frac{W}{t} = \frac{116{,}1\ \text{J}}{4{,}7 \cdot 10^{-3}\ \text{s}} \approx 25\ \text{kW}.$$

Vastaus

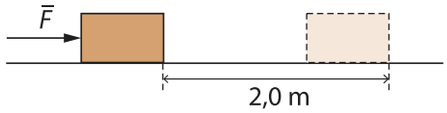
Voiman keskimääräinen teho on 25 kW.

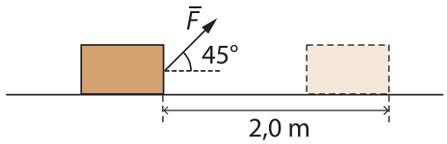
TEHTÄVÄT

11-1. Keksi kolme esimerkkiä tilanteista, joissa voiman tekemä työ on
a) positiivinen **b)** negatiivinen **c)** nolla.

11-2. Opettaja kävelee koulun käytävällä kantaen sylissään kirjakasaa.
a) Tekeekö kirjoihin kohdistuva paino työtä?
b) Tekeekö opettaja kirjoja kantaessaan työtä?

11-3. **a)** Muuttolaatikkoa työnnetään lattiaa pitkin lattian suuntaisella 205 N:n voimalla 2,0 m matka. Laske voiman tekemä työ.
b) Kuinka suuri työ on, jos laatikkoa työntämisen sijasta vedetään 205 N:n voimalla narulla, joka on 45 asteen kulmassa lattian suuntaan nähden?





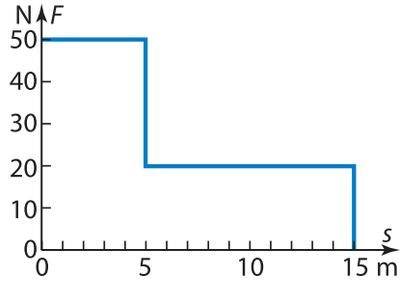
11-4. **a)** Piano, jonka massa on 220 kg, lasketaan nosturin avulla hitaasti 12 m:n korkeudella olevalta parvekkeelta maanpinnalle. Laske työ, jonka nosturin pianoon kohdistama voima tekee laskemisen aikana.
b) Kuinka suuri olisi painon tekemä työ, jos nosturin kiinnitysköydet katkeaisivat ja piano tipahtaisi 12 m:n korkeudelta pihamaalle?

11-5. Mies kelaa itseään pyörätuolilla ylös 15 asteen kulmassa olevaa luiskaa 3,0 metrin matkan. Miehen ja pyörätuolin kokonaismassa on 82 kg.

a) Mitkä voimat tekevät tilanteessa työtä?
b) Laske pyörätuolia eteenpäin työntävän voiman tekemä työ.

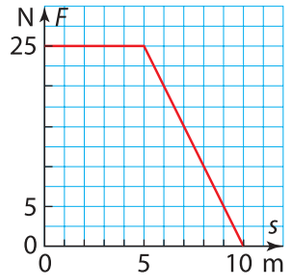
11-6. Elektroni kulkee 2,0 cm:n matkan katodilta anodille. Anodin ja katodin välinen jännite on $U = 4{,}0$ V. Laske Fysiikka 3 Sähkö-kurssin tietoja käyttäen sähköisen voiman tekemä työ.

11-7. Pulkkaa vedettiin ensin 5,0 m hiekoitetulla tiellä ja sitten 10,0 m tiellä, jota ei ollut hiekoitettu. Kuvassa on esitetty vetämiseen käytetty tienpinnan suuntainen voima kuljetun matkan funktiona. Määritä graafisesti voiman tekemä kokonaistyö.



11-8. Sinivalas ui vakionopeudella 37 km/h. Siihen vaikuttava liikkeen suuntainen voima tekee silloin työtä 380 kW:n teholla.
a) Kuinka suuri on valaaseen liikkeen suunnassa vaikuttava voima?
b) Kuinka suuri veden vastus on?
c) Mikä voima pitää valaan liikkeessä?

11-9. Kappaletta vedetään 10,0 metrin matka voimalla F. Voima on kappaleen liikkeen suuntainen. Sen kuvaaja on esitetty ohessa.
a) Kuinka suuren työn voima tekee, kun kappale liikkuu 10,0 metrin matkan?
b) Millaista on kappaleen liike ensimmäiset 5,0 metriä, jos liikettä vastustavat voimat oletetaan pieniksi?
c) Liikkuuko kappale 10 metrin jälkeen? Perustele vastauksesi.



11-10. Täyden Airbus A380 -matkustajakoneen massa lentoon lähdettäessä on 560 t.

a) Arvioi, kuinka suuren työn koneen moottorit tekevät koneen nostamiseksi 11 km:n lentokorkeuteen.

b) Mikä on nousemisen teho, jos kone saavuttaa 11 km:n korkeuden 42 minuutin kuluttua lähdöstä?

11-11. Lentokoneen nopeus vaakalennossa on 280 km/h. Nopeuden ylläpitämiseen tarvitaan 180 kW:n teho. Laske työ, joka 150 km:n matkalla tehdään ilmanvastuksen voittamiseen.

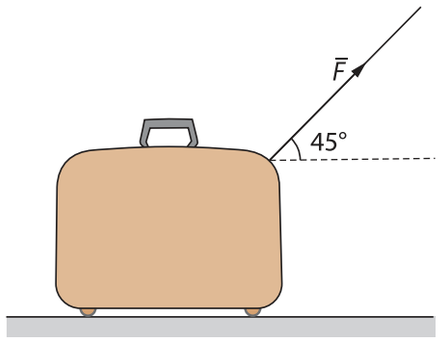
11-12. Suihkukone lentää suurimmalla mahdollisella nopeudellaan 1400 km/h vaakasuoraan. Koneen massa on 8500 kg ja työntövoiman teho 21 MW. Kuinka suuren työntövoiman koneen moottorit saavat aikaan?

11-13. Metron liukuportaan muodostavat 31°:n kulman vaakatason nähden, yhden askelman korkeus on 0,20 m ja portaat liikkuvat nopeudella 0,70 m/s. Niiden nostokorkeus on 15 metriä. Kuinka suuri teho liukuportaiden koneiston pitää vähintään tuottaa, kun joka askelmalla on ruuhka-aikana keskimäärin 60,0 kg:n massainen henkilö?

11-14. Pyörillä kulkevaa matkalaukkua vedetään 45°:n kulmassa olevalla vetonarulla. Narun jännitysvoima on 21 N.

a) Kuinka suuren työn jännitysvoima tekee, kun matkalaukkua vedetään 105 m?

b) Millä teholla voima tekee työtä, kun matkaan kuluu 55 s?



11-15. Vihannesviljelijä työnsi 45 kg massaista kaalilaatikkoa ylös 3,5 m:n pituista ja 38°:n kulmassa olevaa luiskaa pitkin vakionopeudella. Luiskan ja laatikon välinen kitkakerroin oli 0,32. Kuinka suuren työn laatikkoa työntävä voima teki?

11-16. Kappaletta vedettiin vaakasuoralla alustalla. Kopioi mittaustulokset palvelimelta.

a) Määritä vetävän voiman suuruus.

b) Määritä voiman tekemä työ.

c) Määritä, millä teholla voima teki työtä.

12 Liike-energia

Mitä suurempi vauhti, sitä suurempi liike-energia.

! Keskeisiä asioita

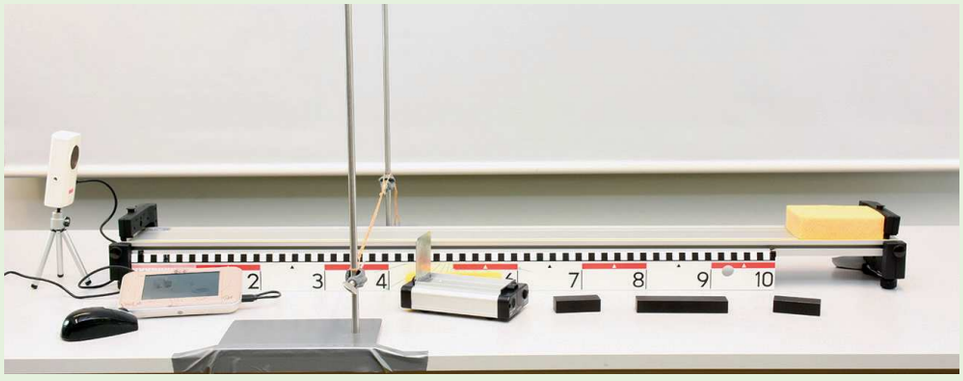
- **liike-energia**
- **työ-energiaperiaate**

T Tutki

Liike-energia

Tutki vaunun liikettä vaunuradalla. Lähetä vaunu matkaan jännitetyn kuminauhan avulla ja mittaa vaunun nopeus. Toista koe eri massaisille vaunuille pitämällä kuminauhan jännitys joka kerta samana.

Esitä mittaustulokset $\frac{1}{m}, v^2$-koordinaatistossa. Toista mittaussarja muuttamalla kuminauhan jännitystä. Päättele kuvaajasta, mitä lakia massa ja nopeus noudattavat.



Mihin perustuu energian tuottaminen tuulivoimalaitoksessa?

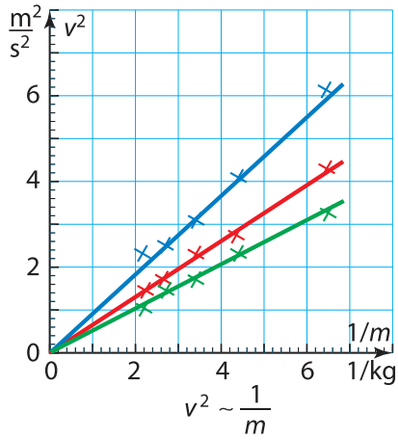
Onko tällä satamaan lipuvalla risteilijällä pieni vai suuri liike-energia?

Liike-energia

Kaikella, joka liikkuu, on liike-energiaa. Arvioi etanan liike-energia.

Energia on tärkeä fysiikan käsite. Lämpö-kurssilla tutustuimme sisäenergiaan, jonka avulla kuvataan aineen lämpenemistä ja jäähtymistä. Tässä luvussa tarkastelemme liike-energiaa. Liike-energia on energian muoto, joka liittyy kappaleen tai aineen liikkeeseen.

m (kg)	v $\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$	$\frac{1}{m}$ $\left(\frac{1}{\text{kg}}\right)$	v^2 $\left(\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right)$
0,15610	2,4752	6,41	6,13
0,22866	2,0408	4,37	4,16
0,30430	1,7667	3,39	3,12
0,38028	1,5823	2,63	2,50
0,45626	1,5291	2,19	1,92



Tutkimuksessa saatettiin erimassaisia vaunuja liikkeeseen jännittämällä kuminauhaa aina samalla tavalla. Tällöin huomattiin, että vaunun saama nopeus riippui vaunun massasta. Vaunun nopeuden neliö v^2 oli suoraan verrannollinen vaunun massan käänteislukuun $\frac{1}{m}$, toisin sanoen $v^2 = \text{vakio} \cdot \frac{1}{m}$ eli $mv^2 = \text{vakio}$.

!

Kertaa Fysiikka 2, s. 29.

Jännitetystä kuminauhasta siirtyi vaunuihin aina sama määrä energiaa, koska kuminauha oli jännitetty aina samalla tavalla. Koska massan ja nopeuden neliön tulo mv^2 oli joka kerta sama, on kuminauhasta vaunun liikkeen energiaksi siirtynyt energia verrannollinen tähän tuloon. Kun kuminauhan jännitystä kasvatettiin, huomattiin tulon mv^2 suurenevan eli kireämmälle jännitetty kuminauha antoi vaunuille suuremman energian.

Kuminauhaan varastoitunut energia muuntui vaunun **liike-energiaksi** E_k. Liike-energian yhtälö on $E_\text{k} = \frac{1}{2}mv^2$.

$$[E_\text{k}] = [m] \cdot [v^2] = 1\,\text{kg} \cdot \left(1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2$$
$$= 1\,\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1\,\text{m}$$
$$= 1\,\text{Nm} = 1\,\text{J}$$

Liike-energia

Kappaleen liike-energia on

$$E_\text{k} = \frac{1}{2}mv^2,$$

jossa m on kappaleen massa ja v nopeus.

E Esimerkki 1

Miksi radat ovat nopeilla rata-osuuksilla kallistettuja?

Täyden Pendolino-junan massa on 320 t.

a) Laske junan liike-energia, kun juna kulkee maksiminopeudellaan 220 km/h.

b) Monenteenko osaan tämä liike-energia pienenee, kun junan nopeus laskee arvoon 110 km/h?

c) Miten liike-energia muuttuu a-kohdan tapaukseen verrattuna, jos juna koostuu kahdesta täydestä Pendolino-yksiköstä?

Ratkaisu

$m = 320 \cdot 10^3$ kg, $v_1 = 220$ km/h, $v_2 = 110$ km/h

a) Junan liike-energia on

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 320 \cdot 10^3 \,\text{kg} \cdot \left(\frac{220}{3{,}6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \approx 0{,}60 \text{ GJ}.$$

b) Nopeus $v_2 = 110$ km/h on puolet maksiminopeudesta v_1. Koska liike-energia on verrannollinen nopeuden neliöön, saadaan suhde

$$\left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 = \left(\frac{110 \text{ km/h}}{220 \text{ km/h}} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Liike-energia pienenee siis neljäsosaan.

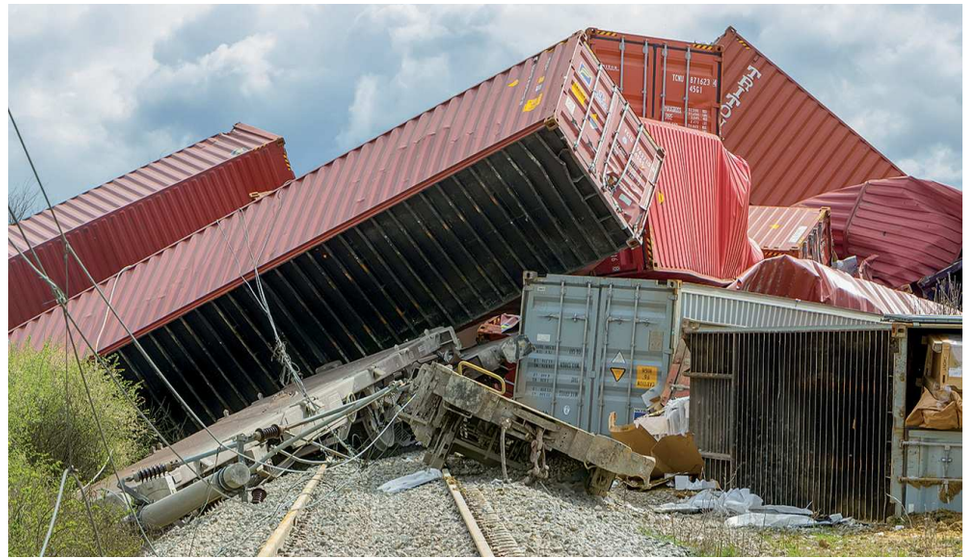
Toinen tapa: Nopeudella 110 km/h liikkuvan junan liike-energia on $E_{k2} = \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 320 \cdot 10^3 \,\text{kg} \cdot \left(\frac{110}{3{,}6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \approx 0{,}15$ GJ, jolloin liike-energioiden suhde on $\frac{E_{k2}}{E_{k1}} = \frac{0{,}15 \text{ GJ}}{0{,}60 \text{ GJ}} = \frac{1}{4}$.

c) Kun junassa on kaksi Pendolino-yksikköä, junan massa on kaksinkertainen verrattuna yhden yksikön kokoiseen junaan. Koska liike-energia on suoraan verrannollinen massaan, on liike-energia kaksi kertaa niin suuri kuin a-kohdassa.

Vastaus

a) 0,60 GJ **b)** Liike-energia pienenee neljäsosaan.

c) Liike-energia on kaksinkertainen.



Junaonnettomuudessa tuhot ovat yleensä suuret junan suuren liike-energian takia. Onnettomuudessa junan liike-energia muuntuu muiksi energialajeiksi, kuten muodonmuutosten seurauksena sisäenergiaksi.

Jousipyssyn jänteen nuoleen kohdistama voima tekee positiivisen työn, joka ilmenee nuolen liike-energian kasvamisena.

Liike-energian ja työn välinen yhteys

Tutkimuksessa kuminauha kohdisti vaunuun voiman, joka sai vaunun nopeuden kasvamaan nollasta tiettyyn loppuarvoon ja samalla vaunun liike-energia suureni. Voiman vaikuttaessa vaunu siirtyi vaunurataa pitkin, joten voima teki työtä. Samalla tavalla, kun annat kaverillesi vauhtia luistinradalla, häneen kohdistamasi voima tekee työtä. Kaverisi liike-energia kasvaa, koska hänen nopeutensa kasvaa.

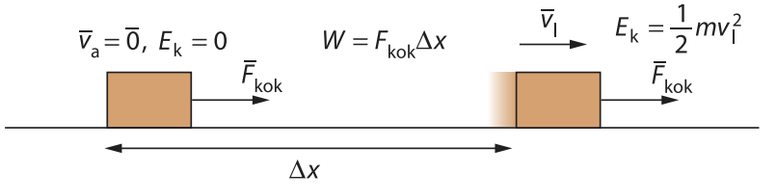
Työ ja liike-energia siis liittyvät toisiinsa. Merkitään kappaleen siirtymää Δx, jolloin kokonaisvoiman tekemä työ on $W = F_{\text{kok}}\Delta x$. Jos siirtymään kuluva aika on t ja kappaleen keskinopeus on v_{k}, on siirtymä $\Delta x = v_{\text{k}}t$. Voiman tekemä työ on silloin $W = F_{\text{kok}} \cdot v_{\text{k}}t = ma \cdot v_{\text{k}}t$. Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä kiihtyvyys on $a = \dfrac{v_{\text{l}} - v_{\text{a}}}{t}$ ja keskinopeus on $v_{\text{k}} = \dfrac{v_{\text{a}} + v_{\text{l}}}{2}$, kun v_{a} on nopeus alussa ja v_{l} nopeus lopussa. Voiman tekemä työ on silloin

$$W = ma \cdot v_{\text{k}}t = m\frac{v_{\text{l}} - v_{\text{a}}}{t} \cdot \frac{v_{\text{a}} + v_{\text{l}}}{2}t$$

$$= m\frac{{v_{\text{l}}}^2 - {v_{\text{a}}}^2}{2} = \frac{1}{2}m{v_{\text{l}}}^2 - \frac{1}{2}m{v_{\text{a}}}^2 = \Delta E_{\text{k}}.$$

Poikaan vaikuttavan painon tekemä työ on ilmalennon aikana vuoroin positiivista ja vuoroin negatiivista. Liike-energia vastaavasti kasvaa ja pienenee.

Kappaleen liike-energian muutos ΔE_{k} siirtymässä on siis yhtä suuri kuin kokonaisvoiman tekemä työ W.



Kokonaisvoiman tekemä työ ilmenee kappaleen liike-energian muutoksena.

Työ-energiaperiaate

Kappaleeseen vaikuttavan kokonaisvoiman tekemä työ on yhtä suuri kuin kappaleen liike-energian muutos:
$W = \Delta E_{\text{k}}$.

Työ-energiaperiaate pätee, vaikka kokonaisvoima ei olisikaan vakio, sillä vain voiman tekemällä työllä on merkitystä. Jos kappaleeseen kohdistuvan kokonaisvoiman tekemä työ on positiivinen, kappaleen liike-energia kasvaa (loppunopeus on suurempi kuin alkunopeus). Jos työ on negatiivinen, liike-energia pienenee (loppunopeus on pienempi kuin alkunopeus).

E Esimerkki 2

Kuinka suuren työn mopoautoon (massa kuljettajineen 315 kg) vaikuttava kokonaisvoima tekee, kun auton nopeus kasvaa
a) arvosta 0,0 km/h arvoon 20,0 km/h
b) arvosta 20,0 km/h arvoon 40,0 km/h?

Ratkaisu
$m = 315$ kg, $v_0 = 0{,}0$ km/h, $v_1 = 20{,}0$ km/h, $v_2 = 40{,}0$ km/h

Työ-energiaperiaatteen $W = \Delta E_k$ mukaan autoon kohdistuvan kokonaisvoiman tekemä työ on yhtä suuri kuin auton liike-energian muutos.

a) Kun nopeus kasvaa arvosta 0,0 km/h arvoon 20,0 km/h, työ on

$$W = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\left(v_1^2 - v_0^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 315 \text{ kg} \cdot \left[\left(\frac{20{,}0}{3{,}6}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(\frac{0{,}0}{3{,}6}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2\right] \approx 4{,}86 \text{ kN}.$$

b) Kun nopeus kasvaa arvosta 20,0 km/h arvoon 40,0 km/h, työ on

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 315 \text{ kg} \cdot \left[\left(\frac{40{,}0}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(\frac{20{,}0}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2\right] \approx 14{,}6 \text{ kN}.$$

Huomataan, että tässä tapauksessa nopeuden kasvattaminen 20 km/h:lla vaatii enemmän työtä kuin a-kohdan tapauksessa.

Vastaus
a) Työ on 4,86 kN. **b)** Työ on 14,6 kN.

Biljardikepin kosketusvoima ja biljardipallon liike ovat samansuuntaisia, joten voiman tekemä työ on positiivinen. Se ilmenee biljardipallon liike-energian kasvamisena.

Tikkataulu kohdistaa tikkaan voiman, joka on vastakkaissuuntainen tikan liikkeen kanssa. Voima tekemä työ on negatiivinen ja ilmenee tikan liike-energian pienenemisenä.

E Esimerkki 3

Huipputason tennispelaajan syöttäessä tennispallo saa nopeuden 210 km/h. Kuinka suuren työn tekee voima, jonka tennismaila kohdistaa palloon? Tennispallon massa on 56 g.

Ratkaisu

$v = 210$ km/h, $m = 0{,}056$ kg

Lyönnin alussa pallo ei ole liikkeessä lyönnin suuntaan, joten tämän tarkastelun kannalta $v_a = 0$ ja liike-energia on alussa nolla.
Pallon liike-energia lyönnin lopussa on

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}056\ \text{kg} \cdot \left(\frac{210}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 95{,}2778\ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} = 95{,}2778\ \text{J}.$$

Voiman tekemä työ on liike-energian muutos eli

$$W = \Delta E_k = 95{,}2778\ \text{J} - 0\ \text{J} \approx 95\ \text{J}.$$

Vastaus

Työ on 95 J.

E Esimerkki 4

Juoksijan nopeus muuttuu nopeudesta 9,7 m/s nopeuteen 5,0 m/s 24 m:n matkalla. Juoksijan massa on 84 kg. Kuinka suuri keskimäärin on juoksijaan kohdistuva kokonaisvoima?

Ratkaisu

$m = 84$ kg, $v_a = 9{,}7$ m/s, $v_l = 5{,}0$ m/s, $s = 24$ m

Juoksijaan kohdistuvan kokonaisvoiman tekemä työ on työ-energia-periaatteen mukaan yhtä suuri kuin juoksijan liike-energian muutos, eli

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2}mv_l^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = \frac{1}{2}m\left(v_l^2 - v_a^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 84\ \text{kg} \cdot \left[\left(5{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(9{,}7\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2\right] = -2901{,}78\ \text{J}.$$

Kokonaisvoiman tekemä työ on $W = F_{kok}\,s$, joten juoksijaan kohdistuva kokonaisvoima on keskimäärin

$$F_{kok} = \frac{W}{s} = \frac{-2901{,}78\ \text{J}}{24\ \text{m}} \approx -120\ \text{N}.$$

Vastaus

Kokonaisvoima on suuruudeltaan keskimäärin 120 N. Voiman suunta on vastakkainen liikkeen suunnan kanssa.

TEHTÄVÄT

12-1. **a)** Ihmisen reipas kävelyvauhti on 6 km/h. Mikä on hänen liike-energiansa, jos hänen massansa on 60 kg?

b) Laulujoutsen voi parhaimmillaan lentää nopeudella 100 km/h. Mikä on tätä vauhtia lentävän, 11 kg:n massaisen laulujoutsenen liike-energia?

12-2. Henkilöauton massa on 1250 kg ja nopeus 90,0 km/h. Kuinka suurella nopeudella kulkevalla 40,0 tonnin massaisella rekalla on yhtä suuri liike-energia kuin tällä henkilöautolla?

12-3. **a)** Miten nopeuden kasvaminen vaikuttaa liike-energian suuruuteen?

b) Ravihevosen kilpailunopeus on 50 km/h. Kuinka paljon sen liike-energia muuttuu, kun nopeus pienenee arvoon 25 km/h?

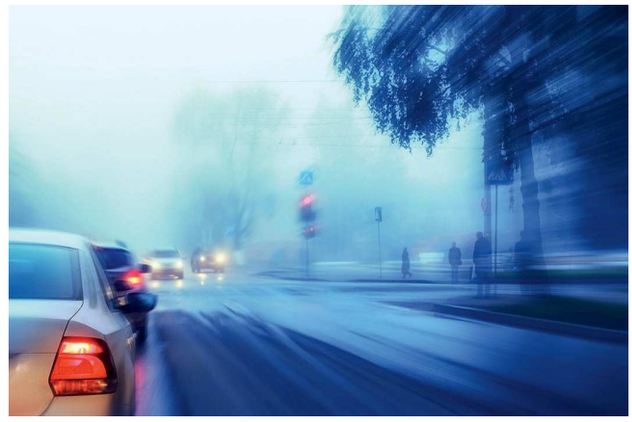
12-4. Auto, jonka massa on 1250 kg, lähtee levosta liikkeelle ja saavuttaa tasaisesti kiihdyttäen nopeuden 100 km/h 180 m:n matkalla.

a) Laske auton liike-energia 180 m:n kohdalla.

b) Kuinka pitkän matkan auto on kulkenut, kun sen liike-energia on puolet siitä, mitä se on 180 m:n kohdalla?

12-5. Jousipyssyn jänne kohdistaa nuoleen 73 cm:n matkalla keskimäärin 102 N:n suuruisen voiman. Kuinka suuren nopeuden 85 g:n massainen nuoli saa?

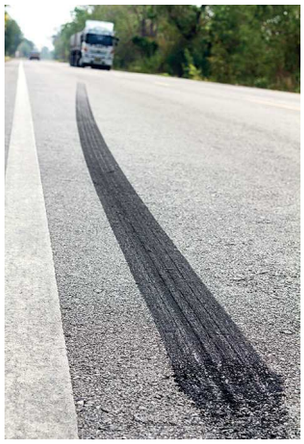
12-6. Nopeudella 60 km/h liikkuvan auton jarrutusmatka autoa pysäytettäessä on 20 m. Kuinka pitkä jarrutusmatka on, kun auton nopeus on kaksinkertainen eli 120 km/h? Oleta, että auton jarrujen autoa jarruttava voima on molemmissa tapauksissa sama.



12-7. Tila-auton jarrujen testissä autoa ajettiin tyhjänä ja täyteen lastattuna vaakasuoralla tiellä nopeudella 65 km/h. Auto pysäytettiin lukkojarrutuksella. Renkaiden ja tien välinen kitkakerroin oli 0,60. Auton massa oli 1250 kg ja täyteen lastatun auton 1870 kg.

a) Laske auton jarrutusmatkat olettaen, että ilmanvastusta ei ole.

b) Kummassa tapauksessa jarrutusmatka oli pitempi, jos ilmanvastus otetaan huomioon? [S2010/5]



12-8. Vaunuradalla vaunuja kiihdytettiin venytetyn kuminauhan avulla ja niiden nopeudet mitattiin nopeusanturilla. Eri massaisille vaunuille saatiin taulukon mukaiset mittausarvot.

***m* (kg)**	0,1561	0,2287	0,3043	0,3803	0,4563
***v* (m/s)**	2,475	2,041	1,767	1,582	1,529

Määritä voiman tekemä työ.

12-9. Tikan nopeus sen osuessa tikkatauluun on 7,0 m/s ja sen terä painuu 0,5 cm:n syvyyteen. Kuinka suurella keskimääräisellä voimalla taulu vaikuttaa tikkaan? Tikan massa on 25 g.

TEEMA

Energiaa tuulesta

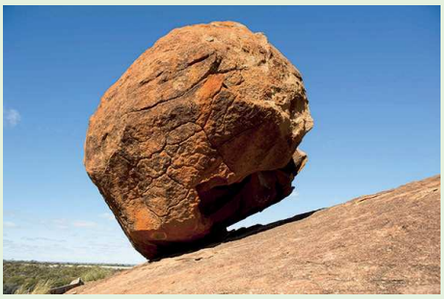
12-10. Tuulivoimalaitoksen toiminnan fysikaalinen perusta on ilman liike-energian muuntaminen tuulimyllyn roottorin pyörimisen liike-energiaksi. Roottori pyörittää generaattoria, joka muuntaa pyörimisen liike-energian sähkön avulla siirrettäväksi energiaksi.

Tuulivoimalaitoksen teho voidaan laskea yhtälöstä $P = \frac{1}{2}\eta\rho\pi r^2 v^3$, jossa η on laitteiston hyötysuhde, ρ ilman tiheys, r roottorin lavan pituus ja v tuulen nopeus.

a) Miten tuulivoimalaitoksen teho muuttuu, jos
- tuulen nopeus kolminkertaistuu
- roottorin lavan pituus kolminkertaistuu
- tuulen nopeus ja siiven pituus kolminkertaistuvat?

b) Laske hyötysuhteella 0,29 toimivan tuulivoimalaitoksen teho, kun tuulen nopeus on 5,2 m/s ja roottorin lavan pituus on 25 m.

13 Potentiaalienergia



Paikallaan olevalla kivellä on potentiaalienergiaa vertailutasoon nähden.

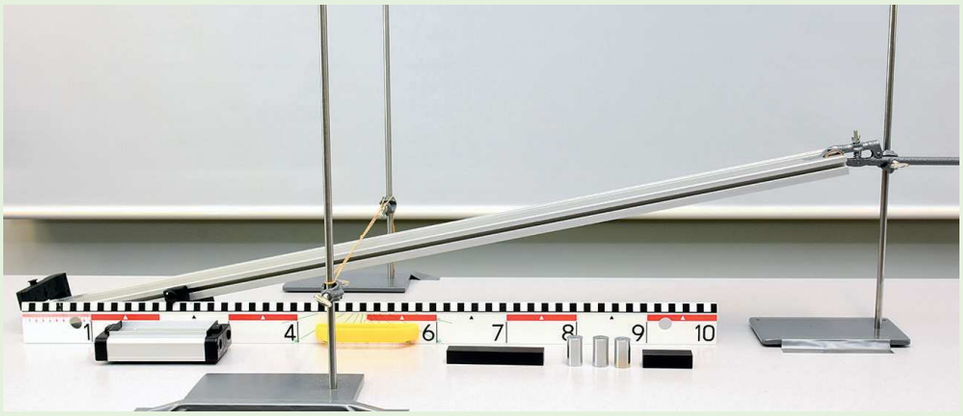
! Keskeisiä asioita

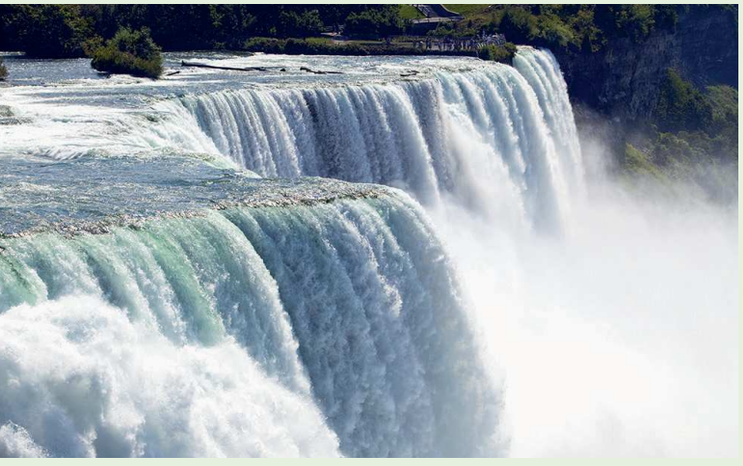
- **potentiaalienergia gravitaatiovuorovaikutuksessa**
- **potentiaalienergian nollataso**
- **konservatiivinen voima**

T Tutki

Potentiaalienergia

Tutki potentiaalienergiaa kallistetulla vaunuradalla lähettämällä eri massaisia vaunuja jännitetyn jousen (tai kuminauhan) avulla rataa ylös ja mittaamalla niiden nousukorkeus h. Esitä tulokset $\frac{1}{m}, h$-koordinaatistossa. Päättele kuvaajasta, mitä lakia massa ja nousukorkeus noudattavat.





Veden potentiaalienergia muuttuu putouksessa liike-energiaksi.

Korkeimmalle kiivenneellä on suurin potentiaalienergia, jos massat ovat yhtä suuret.

Mihin perustuu energian tuottaminen vesivoimalaitoksessa?

Alamäkipyöräilyssä hyödynnetään gravitaatiovuorovaikutuksen potentiaalienergiaa.

Mekaaninen potentiaalienergia

Kun päästät pallon putoamaan kädestäsi, huomaat pallon nopeuden kasvavan putoamisen aikana. Pallon liike-energia siis kasvaa. Jos pudotat pallon korkeammalta, huomaat sen saavuttavan suuremman nopeuden ja siksi suuremman liike-energian ennen lattiaan osumistaan kuin matalammalta pudottamasi pallo.

"Potentiaali" viittaa kappaleella olevaan mahdollisuuteen saada liike-energiaa.

Palloilla oli niiden ja maapallon gravitaatiovuorovaikutukseen liittyvää energiaa, joka muuntui putoamisessa pallojen liike-energiaksi. Tämän energian eli **potentiaalienergian** määrä riippui siitä, miten korkealla pallo oli eli pallon asemasta.

Potentiaalienergia liittyy kappaleiden väliseen vuorovaikutukseen. Kun vuorovaikuttavien kappaleiden asema suhteessa toisiinsa muuttuu, muuttuu myös kappaleiden potentiaalienergia. Edellä oli kyse pallon ja maapallon gravitaatiovuorovaikutuksesta. Pallon potentiaalienergia oli sitä suurempi, mitä etäämmällä pallo oli maanpinnasta.

Potentiaalienergia

- Kappaleen asemasta riippuvaa energiaa sanotaan potentiaalienergiaksi.
- Potentiaalienergia voi muuntua kappaleen liike-energiaksi.

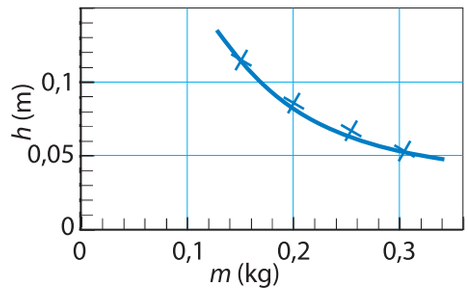
Huomaa, että vastusvoimien takia potentiaalienergia ei käytännössä koskaan muunnu kokonaan liike-energiaksi vaan osa siitä muuntuu kappaleen ja sitä ympäröivän aineen sisäenergiaksi.

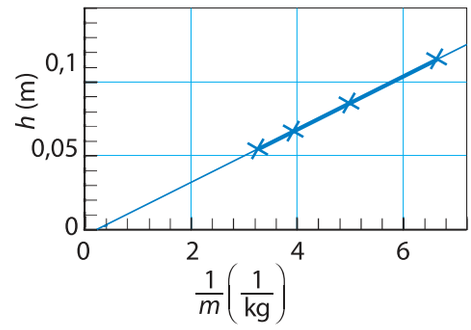
Konttien potentiaalienergia riippuu niiden massasta ja siitä, kuinka korkealla ne ovat.

Potentiaalienergia gravitaatiovuorovaikutuksessa

Tutkimuksessa oli kyse vaunun ja Maan gravitaatiovuorovaikutuksesta. Mittauksessa saatiin eri massaisten vaunujen nousukorkeuksille taulukon mukaiset tulokset, kun tason kaltevuuskulma oli 5°, 10° ja 15°.

m (kg)	$\frac{1}{m}\left(\frac{1}{\text{kg}}\right)$	kaltevuuskulma 5°	kaltevuuskulma 10°	kaltevuuskulma 15°
		h (m)	h (m)	h (m)
0,1502	6,66	0,112	0,114	0,115
0,2005	4,99	0,083	0,085	0,086
0,2536	3,94	0,065	0,066	0,067
0,3049	3,28	0,051	0,053	0,054





Kun mittausarvot siirrettiin $\frac{1}{m}$,h-koordinaatistoon, huomattiin kuvaajan olevan (mittaustarkkuuden rajoissa) origon kautta kulkeva suora eli $h = \text{vakio} \cdot \frac{1}{m}$. Nousukorkeuden ja massan tulo on siten vakio, $mh = \text{vakio}$.

Kun vaunu saavuttaa lakikorkeuden h, se on menettänyt kaiken jouselta saamansa liike-energian. Liike-energia on muuntunut vaunun potentiaalienergiaksi. Siten potentiaalienergia on verrannollinen tuloon mh eli $E_\text{p} \sim mh$.

Gravitaatiovuorovaikutuksen potentiaalienergia on Maan ja kappaleen muodostaman systeemin yhteistä energiaa. Koska tällä energialla ei ole suurimassaiselle Maalle oleellista merkitystä, on tapana sanoa, että *kappaleella* on gravitaation potentiaalienergiaa.

!

Kertaa Fysiikka 2, s. 30.

$$[E_\text{p}] = [m] \cdot [g] \cdot [h]$$
$$= 1\,\text{kg} \cdot 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1\,\text{m}$$
$$= 1\,\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$$
$$= 1\,\text{Nm} = 1\,\text{J}$$

Kappaleen potentiaalienergia

Gravitaatioon liittyvä kappaleen potentiaalienergia on $E_\text{p} = mgh$, jossa m on kappaleen massa, g putoamiskiihtyvyys ja h kappaleen pystysuora etäisyys valitusta potentiaalienergian nollatasosta. Nollatason yläpuolella h on positiivinen ja alapuolella negatiivinen.

Kun kappaleen etäisyys valitusta nollatasosta muuttuu määrällä Δh, on kappaleen **potentiaalienergian muutos** $\Delta E_\text{p} = mg\Delta h$.

E Esimerkki 1

Uimahallissa on uimahyppyjä varten 5,0 metrin ja 10,0 metrin korkeudella veden pinnasta olevat hyppytasot.

a) Laske Heikin, jonka massa on 78 kg, potentiaalienergia veden pinnan suhteen hänen ollessaan 10,0 m:n tasolla.

b) Kuinka paljon Heikin potentiaalienergia muuttuu, kun hän laskeutuu portaita pitkin 10,0 m:n tasolta 5,0 m:n tasolle?

Ratkaisu

$m = 78$ kg, $h_1 = 10{,}0$ m, $h_2 = 5{,}0$ m

a) Potentiaalienergia on

$$E_p = mgh = 78\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10{,}0\ \text{m} = 7651{,}80\ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} \approx 7{,}7\ \text{kJ}.$$

b) Kun Heikki laskeutuu 10,0 m:n tasolta 5,0 m:n tasolle, hänen etäisyytensä potentiaalin nollatasosta muuttuu määrällä $\Delta h = -5{,}0$ m, joten potentiaalienergian muutos on

$$\Delta E_p = mg\Delta h = 78\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (-5{,}0\ \text{m})$$

$$= -3825{,}90\ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} \approx -3{,}8\ \text{kJ}.$$

Heikin potentiaalienergia pienenee 3,8 kJ.

$\Delta h = 5{,}0\ \text{m} - 10{,}0 = -5{,}0\ \text{m}$

Vastaus

a) 7,7 kJ, **b)** 3,8 kJ.

E Esimerkki 2

Pyhäsalmen kaivoksessa tehdään myös fysiikan tutkimusta; siellä tutkitaan mm. kosmista säteilyä.

Pyhäsalmen kaivoksen syvyys on 1430 m. Laske kaivoksen pohjalla työskentelevän Timon potentiaalienergia maanpinnan suhteen. Timon massa on 73 kg.

Ratkaisu

$h = 1430$ m, $m = 73$ kg

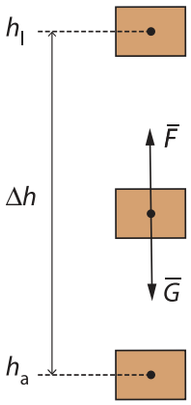
Koska potentiaalienergian nollataso eli taso, jonka suhteen potentiaalienergia lasketaan, on Timoa ylempänä, on h:n arvo otettava potentiaalienergian yhtälöön negatiivisena. Potentiaalienergia on

$$E_p = mgh = 73\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (-1430\ \text{m}) \approx -1{,}0\ \text{MJ}.$$

Vastaus

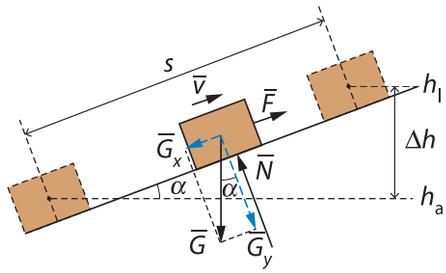
Potentiaalienergia maanpinnan suhteen on −1,0 MJ.

Mekaaninen työ ja potentiaalienergia



Kun kappaletta nostetaan vakionopeudella, kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoima on Newtonin II lain mukaan nolla. Nostossa kappaleeseen kohdistuva, ylöspäin suuntautuva nostava voima $\overline{F}$ ja alaspäin suuntautuva kappaleen paino $\overline{G}$ ovat silloin yhtä suuret. Jos suunta ylös valitaan positiiviseksi suunnaksi, on $F = mg$.

Jos kappale nostetaan korkeudelta h_a korkeudelle h_l, nostava voima $\overline{F}$ tekee työn $W = F\Delta h$, jossa $\Delta h = h_l - h_a$ on siirtymä pystysuunnassa, eli työ on $W = mg\Delta h = mg(h_l - h_a) = mgh_l - mgh_a = E_{p,l} - E_{p,a} = \Delta E_p$, jossa $E_{p,l}$ on potentiaalienergia noston lopussa ja $E_{p,a}$ potentiaalienergia noston alussa. Voiman tekemä työ on yhtä suuri kuin potentiaalienergian muutos.



Tarkastellaan nyt tilannetta, jossa samaa kappaletta ei nosteta suoraan vaan siirretään ylös vähäkitkaista kaltevaa tasoa pitkin. Pidetään kappaleen nopeus siirtämisen aikana vakiona.

Siirtämisessä tehty työ on $W = Fs$, jossa voima $\overline{F}$ on tason suuntainen ja s on siirtymä tason suunnassa. Trigonometrian perusteella siirtymä on $s = \dfrac{h_l - h_a}{\sin\alpha} = \dfrac{\Delta h}{\sin\alpha}$ ja kappaleen painon $\overline{G}$ tason suuntainen komponentti $G_x = G\sin\alpha$. Koska kappaleen nopeus on vakio, on $F = G_x$. Tällöin kappaleen siirtämiseksi tehty työ on

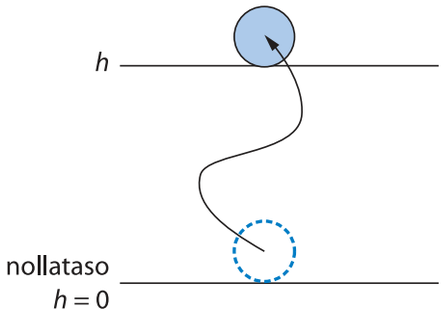
$W = Fs = G_x s = G\sin\alpha \cdot \dfrac{\Delta h}{\sin\alpha} = G\Delta h = mg\Delta h$. Tämä on yhtä suuri kuin se työ, joka saatiin suoran noston tapauksessa. Tämä pätee yleisesti: kappaletta nostavan voiman tekemä **työ on nostoreitistä riippumaton**, ja sen suuruus on aina sama kuin potentiaalienergian muutos.

!

Huomaa: Jos potentiaalienergian nollatasoksi valitaan kappaleen paikka alkuhetkellä, on nostavan voiman tekemä työ yhtä suuri kuin kappaleen potentiaalienergia korkeudella h eli $W = E_p = mgh$.

Potentiaalienergian muutos ja mekaaninen työ

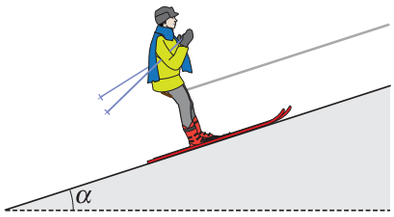
Kappaletta nostavan voiman tekemä työ on yhtä suuri kuin kappaleen potentiaalienergian muutos: $W = \Delta E_p$.



Voimia, joiden tekemä työ ei riipu reitistä, jota pitkin kappale liikkuu voiman alaisena pisteestä toiseen, sanotaan **konservatiivisiksi voimiksi**. Gravitaatiovoima on konservatiivinen voima. Konservatiivisen voiman tekemä työ myös aina ”palautuu”. Esimerkiksi kappaleen nostamiseen tehty työ, joka ilmenee potentiaalienergian kasvamisena, muuntuu kappaleen liike-energiaksi, kun kappaleen annetaan pudota.

Kitka ja ilmanvastus ovat esimerkkejä **ei-konservatiivisista voimista**. Niiden tekemä työ riippuu kappaleen kulkemasta reitistä, kuten siitä, miten pitkä reitti on. Ei-konservatiivisen voiman tekemä työ ei palaudu. Esimerkiksi kitkan tekemä työ, joka ilmenee kappaleen lämpenemisenä, ei muunnu takaisin kappaleen liike-energiaksi.

E Esimerkki 3

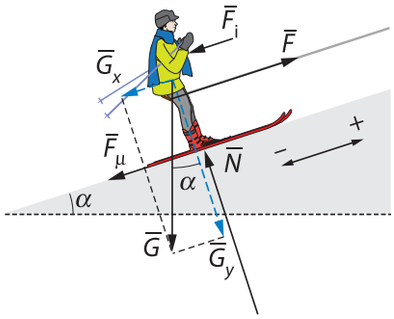


Hiihtohissin rinteen suuntainen vaijeri vetää laskettelijaa ylös. Laskettelijan nopeus on likimain vakio ja massa varusteineen 81 kg. Kitkan ja ilmanvastuksen yhteinen suuruus on keskimäärin 65 N. Rinteen pituus on 230 m ja kaltevuuskulma 18°.

a) Kuinka suuri on laskettelijaan kohdistuva vaijerin keskimääräinen kosketusvoima?

b) Kuinka suuren työn vaijerin jännitysvoima tekee rinteessä?

c) Kuinka suuri on laskettelijan potentiaalienergian muutos nousun aikana?



Ratkaisu

$m = 81$ kg, $s = 230$ m, $\alpha = 18°$, $F_\mu + F_i = 65$ N, $g = 9{,}81$ m/s^2

a) Laskettelija liikkuu vakionopeudella, joten Newtonin II lain mukaan hänen liikettään rinteen suunnassa kuvaa yhtälö $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{F} + \overline{G}_x + \overline{F}_i + \overline{F}_\mu = \overline{0}$, jossa $\overline{F}$ on laskettelijaa vetävä vaijerin jännitysvoima, $\overline{G}_x$ laskettelijan painon komponentti rinteen suunnassa, $\overline{F}_i$ ilmanvastus ja $\overline{F}_\mu$ kitka. Sovitaan liikkeen suunta positiiviseksi.

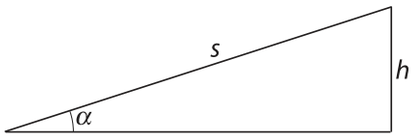
Skalaariyhtälö $F - G_x - F_i - F_\mu = 0$ saadaan muotoon $F = G_x + F_i + F_\mu$. Kuvion mukaan $G_x = G \sin\alpha = mg \sin\alpha$.

Vaijeri vetää laskettelijaa voimalla, jonka keskimääräinen suuruus on

$$\begin{aligned} F &= G_x + F_i + F_\mu = mg \sin\alpha + F_i + F_\mu \\ &= 81 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot \sin 18° + 65 \text{ N} \\ &= 310{,}548 \text{ N} \approx 310 \text{ N}. \end{aligned}$$

b) Vaijerin kosketusvoima tekee työn

$W = F \cdot s = 310{,}548 \text{ N} \cdot 230 \text{ m} \approx 71 \text{ kJ}.$



c) Laskettelijan potentiaalienergian muutos ylösnousun aikana on $\Delta E_p = E_{p,l} - E_{p,a} = mg\Delta h$, jossa Δh on paikan muutos pystysuunnassa. Trigonometrian perusteella $h = s \cdot \sin\alpha$, joten potentiaalienergian muutos on

$$\begin{aligned} \Delta E_p &= mg\Delta h = mgs \cdot \sin\alpha \\ &= 81 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 230 \text{ m} \cdot \sin 18° \approx 56 \text{ kJ}. \end{aligned}$$

Vastaus

a) Rinteen suuntaisen voiman keskimääräinen suuruus on 310 N.

b) Voiman tekemä työ 71 kJ.

c) Potentiaalienergian muutos on 56 kJ.

TEHTÄVÄT

13-1. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?

a) Gravitaatioon liittyvän potentiaalienergian nollataso on aina maanpinnan taso.

b) Kappaletta nostavan voiman tekemä työ on yhtä suuri kuin kappaleen potentiaalienergian muutos.

c) Potentiaalienergia voi olla negatiivinen.

d) Jos vastusvoimia ei ole, kappaleen potentiaalienergia voi muuntua kokonaan liike-energiaksi.

e) Konservatiivisen voiman tekemä työ ei riipu reitistä, jota pitkin kappale liikkuu voiman alaisena lähtöpisteestä päätepisteeseen.

f) Kitka on konservatiivinen voima.

13-2. Kuinka suuri on 55 kg:n massaisen kiven potentiaalienergia merenpinnan suhteen, kun kappale on

a) Mount Everestin huipulla 8848 m:n korkeudessa

b) Mariaanien haudassa 10 994 m:n syvyydessä?

13-3. Liisa ja Matti (65 kg) kiipeävät molemmat ylös koulun portaita. Kun Matti nousee 12 porrasta ja Liisa 15 porrasta, molempien potentiaalienergiat kasvavat yhtä paljon. Mikä on Liisan massa? **a)** 42 kg **b)** 52 kg **c)** 62 kg.

13-4. Talon katolta, 25 m:n korkeudesta putoaa 5,0 kg:n massainen jääkappale.

a) Mikä on jääpalan potentiaalienergia sen lähtiessä liikkeelle, kun potentiaalienergian nollatasoksi valitaan kadun pinta?

b) Kuinka paljon jääpalan potentiaalienergia on muuttunut sen saavuttaessa 3,0 m:n korkeudella kadun pinnasta olevan markiisikankaan?

13-5. Rakennuselementti, jonka massa on 1100 kg, on auton lavalla 2,0 m:n korkeudella maanpinnasta. Se nostetaan kahdeksanteen kerrokseen 24 m:n korkeudelle.

a) Määritä elementin potentiaalienergia maanpinnan suhteen kahdeksannessa kerroksessa.

b) Kuinka suuren työn nostava voima tekee?

13-6. Matkustajakoneen massa on $1{,}9 \cdot 10^5$ kg. Kuinka paljon energiaa tarvitaan lentokoneen nousemiseen 10,70 km:n lentokorkeuteen, kun nousun oletetaan tapahtuvan vakionopeudella eikä ilmanvastusta oteta huomioon?

13-7. Isoa laatikkoa nostetaan vinssin avulla tasaisella nopeudella 4,5 m:n korkeuteen. Vinssiköyden jännitysvoima noston aikana on 420 N. Laske potentiaalienergia lähtötasoon verrattuna noston lopussa.

TEEMASIVU

Energiaa vedestä

13-8. Vesivoimalaitoksen toiminnan fysikaalinen perusta on veden potentiaali- ja liike-energian muuntaminen sähkövirran avulla siirrettäväksi energiaksi.

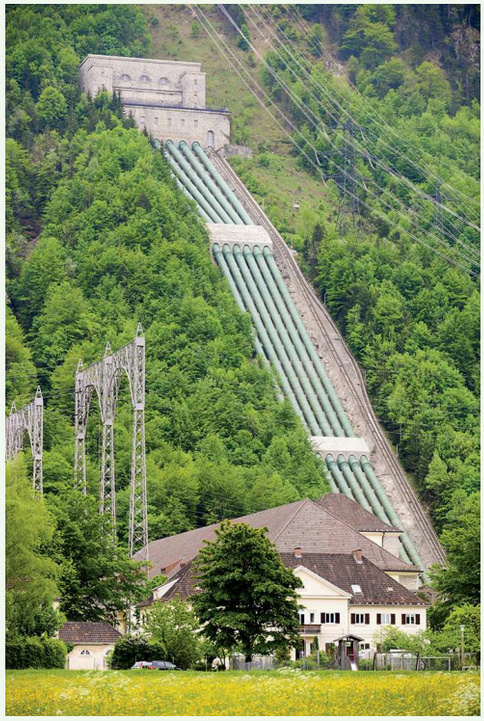
a) Lokan tekoaltaan pinta-ala on suurimmillaan 417 km^2. Kuinka paljon energiaa vapautuu, kun vedenpinta alenee 55 cm ja kyseisen vesimäärän pudotuskorkeus on 3,0 m? Laske myös, kuinka monta teholtaan 1,0 kW:n sähkölämmitintä voi toimia veden juoksutuksen aikana, jos veden juoksutus kestää kaksi viikkoa. Oletetaan, että kaikki vapautuva energia voidaan käyttää sähkölämmittimiin.

b) Imatran vesivoimalaitoksen sähköteho on 170 MW. Laske voimalaitoksen hyötysuhde, kun tiedetään, että voimalaitoksen pudotuskorkeus on 24 m ja läpi virtaava vesimäärä 930 m^3/s.

c) Laske vesivoimalaitoksen teho, kun virtaama on 92 m^3 sekunnissa. Veden pudotuskorkeus on 3,0 m ja laitteiston hyötysuhde on 0,80.

d) Pumppuvoimalaitoksessa ylhäällä olevasta vesivarastosta virtaa vesi turbiinien läpi alempana olevaan vesivarastoon tuottaen sähköä sähköverkkoon kulutuspiikkien aikana. Pienemmän sähkönkulutuksen aikana vesi pumpataan takaisin ylhäällä olevaan vesivarastoon. Kuinka paljon energiaa saadaan varastoitua pumppuvoimalaan, jossa vesivaraston tilavuus on 5,7 Mm^3 ja vesivarastojen korkeusero on 240 m? Arvioi myös turbiinin läpi sekunnissa kulkeva vesimäärä, kun voimalan teho on 440 MW.

e) Oulujoessa sijaitsevan Pyhäkosken vesivoimalaitoksen putouskorkeus 32,4 m ja sekunnissa sen läpi virtaavan veden tilavuus 450 m^3. Laske vesivoimalaitoksen teho, kun sen hyötysuhde on 84 %.



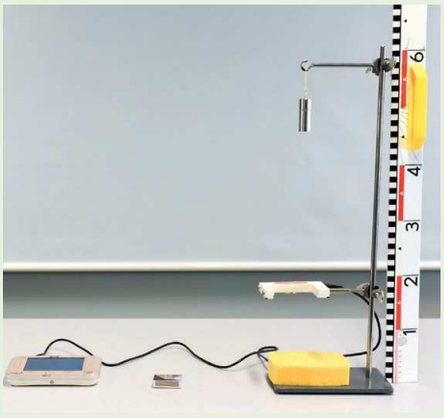
14 Mekaanisen energian säilyminen

Keinuessa liike-energiaa ja potentiaalienergiaa muuntuu toisikseen.

! Keskeisiä asioita

- **mekaaninen energia**
- **mekaanisen energian säilymislaki**
- **mekaniikan energiaperiaate**

T Tutki



1. Mekaanisen energian säilyminen
Pudota pieni raskas esine, esimerkiksi hiekalla täytetty purkki, eri korkeuksilta ja mittaa liikeanturilla tai valoportilla sen nopeus kussakin tapauksessa. Laske vastaavat liike-energian arvot. Vertaa liike-energioiden arvoja vastaavien potentiaalienergioiden arvoihin, jotka voit laskea, kun mittaat pudotuskorkeudet.

2. Mekaanisen energian väheneminen
Pudota tennispallo esimerkiksi metrin korkeudelta ja määritä sen nousukorkeus ensimmäisen pompun jälkeen. Pohdi, miksi pallo ei pomppaa takaisin lähtökorkeudelleen. Selvitä, kuinka paljon mekaaninen energia on pienentynyt pallon saapuessa ensimmäisen pompun lakipisteeseen.

Kun jääpuikko tipahtaa räystäältä maahan, sen potentiaalienergia muuntuu liike-energiaksi. Mihin muotoon liike-energia muuntuu jääpuikon osuttua maahan?

Kenguru voi hypätä useiden metrien korkeuteen. Voimakkaat takajalat antavat sille suuren liike-energian, joka muuttuu loikassa potentiaalienergiaksi.

Mekaanisen energian säilymislaki

Mäkeä laskettaessa potentiaalienergia muuntuu liike-energiaksi.

Kappaleen potentiaalienergian ja liike-energian summaa $E_p + E_k$ sanotaan kappaleen **mekaaniseksi energiaksi**.

Tutkimuksessa huomattiin, että kun kappale pudotetaan, sen nopeus ja siten liike-energia kasvavat. Potentiaalienergia puolestaan pienenee, koska kappaleen etäisyys maanpinnasta pienenee.

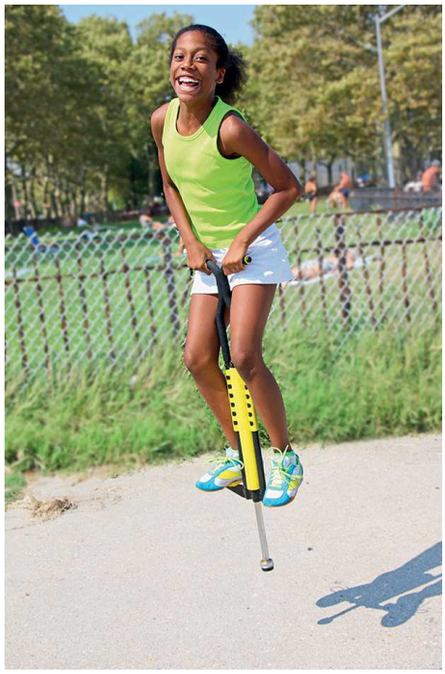
Kappale (massa $m = 151$ g) pudotettiin korkeudelta $h = 0{,}500$ m. Potentiaalienergian muutos oli

$$\Delta E_p = E_{p,l} - E_{p,a} = 0 - mgh = -0{,}151 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 0{,}500 \text{ m} = -0{,}741 \text{ J}.$$

Liikeanturi antoi kappaleen nopeudeksi $v = 3{,}13 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Liike-energian muutos on

$$\Delta E_k = E_{k,l} - E_{k,a} = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}151 \text{ kg} \cdot \left(3{,}13 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 0{,}740 \text{ J}.$$

Huomataan, että mittaustarkkuuden rajoissa on $\Delta E_k = -\Delta E_p$ eli $\Delta E_p + \Delta E_k = 0$. Pieni poikkeama tästä johtuu ilmanvastuksesta ja mittauksen epätarkkuudesta. Mekaaninen energia $E_p + E_k$ ei muutu, jos kappaleeseen vaikuttavia vastusvoimia ei huomioida.



Kun jousi oikenee, sen potentiaalienergia muuntuu pomppijan liike-energiaksi.

Mekaanisen energian säilymislaki

- Kappaleen mekaaninen energia säilyy eli potentiaali- ja liike-energian summa on vakio,
  $E_p + E_k$ = vakio,
  mikäli vastusvoimien vaikutus on merkityksetön.
- Mekaaninen energia on alussa ja lopussa yhtä suuri,
  $E_{p,a} + E_{k,a} = E_{p,l} + E_{k,l}$.

Tällä kurssilla sovellamme mekaanisen energian säilymislakia kappaleen etenemisliikkeeseen gravitaation vallitessa. Myös muihin vuorovaikutuksiin kuin gravitaatioon liittyy potentiaalienergiaa. Jännitetyssä jousessa ja kumilangassa on potentiaalienergiaa, joka liittyy niiden rakenneosien sähkömagneettiseen vuorovaikutukseen. Jos jouseen tai kumilankaan on kiinnitetty kappale, jännityksen potentiaalienergia muuntuu kappaleen liike-energiaksi, kun jousi tai kumilanka vapautetaan jännityksestä. Luvun 12 (Liike-energia) tutkimuksissa oli tällaisia koejärjestelyjä.

E Esimerkki 1

Sulava veteentulo on tärkeää korkeissa uimahypyissä.

Korkean uimahypyn kilpailuissa miehet hyppäävät 27 m:n korkeudessa olevalta hyppytasolta. Millä nopeudella hyppääjä saapuisi veden pintaan, jos ilmanvastus ei vaikuttaisi?

Ratkaisu

$h_a = 27$ m, $v_a = 0$ m/s, $g = 9{,}81$ m/s^2

Kun ilmanvastusta ei huomioida, mekaaninen energia säilyy:

$E_{p,a} + E_{k,a} = E_{p,l} + E_{k,l}$ eli $mgh_a + \frac{1}{2}mv_a^2 = mgh_l + \frac{1}{2}mv_l^2$.

Valitaan potentiaalienergian nollatasoksi vedenpinnan taso, eli $h_l = 0$, jolloin mekaanisen energian säilymisen yhtälö on $\cancel{m}gh_a + 0 = 0 + \frac{1}{2}\cancel{m}v_l^2$, joten $v_l^2 = 2gh_a$. Huomaa, että tässä mallissa hyppääjän massa supistuu eikä vaikuta lopputulokseen. Uimahyppääjän nopeus hänen tullessaan veteen on

$$v_l = \sqrt{2gh_a} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 27\ \text{m}} \approx 23\ \text{m/s}.$$

Koska ilmanvastusta ei huomioida, kyseessä on yksinkertaistettu malli.

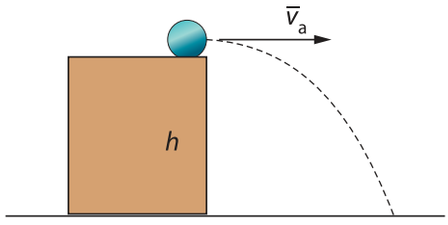
Vastaus

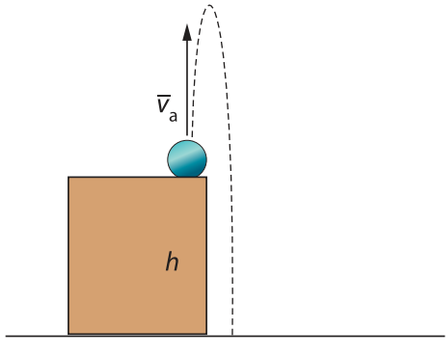
Uimahyppääjän nopeus veteen saapuessa on 23 m/s.

E Esimerkki 2

a) Marmorikuula tönäistään pöydän pinnalta vaakasuoralla nopeudella 4,0 m/s, ja se putoaa 1,0 m alempana olevalle lattialle. Laske marmorikuulan nopeuden suuruus sen osuessa lattiaan.

b) Marmorikuula heitetään samalta alkukorkeudelta nopeudella 4,0 m/s ylöspäin. Mikä on tässä tapauksessa kuulan nopeus sen osuessa lattiaan? Ilmanvastus voidaan olettaa merkityksettömän pieneksi.





Ratkaisu

$v_a = 4{,}0$ m/s, $h = 1{,}0$ m

a) Valitaan lattian taso potentiaalienergian nollatasoksi, jolloin korkeus alussa on $h = 1{,}0$ m. Mekaanisen energian säilymislaki

$E_{p,a} + E_{k,a} = E_{p,l} + E_{k,l}$ on silloin $mgh + \frac{1}{2}mv_a^2 = 0 + \frac{1}{2}mv_l^2$,

josta ratkaistaan nopeuden suuruus lattiaan osumisen hetkellä,

$$v_l = \sqrt{2gh + v_a^2} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1{,}0\ \text{m} + \left(4{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} \approx 6{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b) Koska marmorikuulan lähtönopeus on suuruudeltaan sama kuin a-kohdassa eli 4,0 m/s, myös loppunopeuden suuruus on sama eli tässäkin tapauksessa kappale osuu lattiaan nopeudella 6,0 m/s. Huomaa, että mekaanisen energian säilymislakia sovellettaessa liikkeen suunnalla ei ole merkitystä, ainoastaan nopeuden suuruudella.

Vastaus

a) 6,0 m/s. **b)** 6,0 m/s.

Mekaniikan energiaperiaate

Yleensä aina, kun kappaleet liikkuvat, niihin vaikuttaa vastusvoimia, kuten kitka ja ilman- ja vedenvastus. Esimerkiksi heilurin heilahtelut vaimenevat pikku hiljaa ilmanvastuksen takia. Heilurin punnuksen potentiaalienergia ääriasennossa pienenee, koska punnus jää joka heilahduksella matalammalle kuin edellisellä heilahduksella. Samoin pienenevät punnuksen nopeus ja liike-energia radan alimmassa kohdassa heilahdus heilahdukselta. Mekaaninen energia ei siis säily, kun vastusvoimat huomioidaan. Liike-energiaa muuntuu vähitellen heilurin **sisäenergiaksi** ja ilman molekyylien liike-energiaksi.

Ilmanvastuksen vaikutuksen huomaa, jos heilurin asettaa heilumaan alipaineiseen lasikupuun. Siellä heilahdukset vaimenevat hitaammin kuin huoneilmassa, koska harvempi ilma aiheuttaa pienemmän vastuksen kuin huoneilma.

Vastusvoimia kutsutaan ei-konservatiivisiksi voimiksi, koska niiden vaikuttaessa mekaaninen kokonaisenergia ei säily. Gravitaatiovoima on puolestaan konservatiivinen eli mekaanisen energian säilyttävä voima.

Miten kelkkailija pienentää vastusvoimien vaikutusta?

Tutkimuksessa 2 huomattiin, että tennispallo ei pompannut lattiasta samalle korkeudelle, josta se lähti liikkeelle. Mekaaninen energia pieneni. Mekaanista energiaa pienentää vastusvoimien ja muiden ei-konservatiivisten voimien tekemä työ. Tennispallon tapauksessa vastusvoimana on ilmanvastus. Osa liike-energiasta muuntuu myös pallon ja lattian sisäenergiaksi pallon törmätessä lattiaan.

Kun ei-konservatiivisten voimien tekemä työ otetaan huomioon, energian säilymislaki $E_{p,a} + E_{k,a} = E_{p,l} + E_{k,l}$ korvautuu yhtälöllä $E_{p,a} + E_{k,a} + W = E_{p,l} + E_{k,l}$, jossa W on kappaleeseen vaikuttavien ei-konservatiivisten voimien tekemä työ. Tätä sanotaan **mekaniikan energiaperiaatteeksi**.

Alamäessä on usein syytä jarruttaa. Mihin energiaperiaatteen yhtälön termeihin jarrutus vaikuttaa?

Mekaniikan energiaperiaate

Jos kappaleeseen vaikuttaa konservatiivisten voimien lisäksi ei-konservatiivisia voimia, kuten kitka tai ilmavastus, on voimassa yhtälö

$E_{p,a} + E_{k,a} + W = E_{p,l} + E_{k,l}$,

jossa W on ei-konservatiivisten voimien tekemä työ.

Esimerkiksi kitka ja ilmavastus pienentävät kappaleen mekaanista energiaa, joten niiden tekemä työ on negatiivinen, $W < 0$.

E Esimerkki 3

Kotiin tullessaan autoilijalla on tapana antaa auton lopuksi rullata vapaalla. Nopeusmittarin mukaan vauhti on aluksi 35 km/h ja pihatien kohdalla 150 m:n päässä 14 km/h. Auton massa on 1400 kg ja tie on vaakasuora. Kuinka suuri on vastusvoimien tekemä työ?

Ratkaisu

$v_a = 35$ km/h, $v_l = 14$ km/h, $s = 150$ m, $m = 1400$ kg

Autolla on rullauksen alussa mekaanista energiaa, joka vähenee kitkan ja ilmanvastuksen tekemän työn takia. Valitaan auton painopisteen taso potentiaalienergian nollatasoksi. Auto liikkuu vaakasuoralla tiellä, joten mekaniikan energiaperiaatteen yhtälö $E_{p,a} + E_{k,a} + W = E_{p,l} + E_{k,l}$ saa muodon $0 + \frac{1}{2}mv_a^2 + W = 0 + \frac{1}{2}mv_l^2$. Ratkaistaan työ:

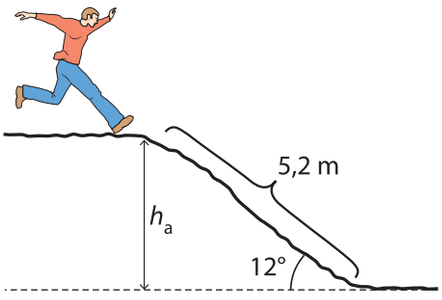
$$W = \frac{1}{2}mv_l^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1400 \text{ kg} \cdot \left(\frac{14}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot 1400 \text{ kg} \cdot \left(\frac{35}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \approx -56\ 000 \text{ J}.$$

Vastaus

Vastusvoimien tekemä työ on –56 kJ.

E Esimerkki 4



Poika juoksee nopeudella 4,5 m/s jäiseen rinteeseen, jossa hän liukuu 5,2 m ennen pysähtymistään. Rinteen kaltevuuskulma on 12°. Laske pojan kenkien ja jään välinen kitkakerroin. Pojan massa on 57 kg.

Ratkaisu

$v_a = 4{,}5$ m/s, $v_l = 0$ m/s, $s = 5{,}2$ m, $\alpha = 12°$, $m = 57$ kg, $g = 9{,}81$ m/s^2

Valitaan potentiaalienergian nollatasoksi se, jossa pojan liukuminen päättyy. Liukuminen alkaa nollatasoon verrattuna korkeudelta $h_a = s\sin\alpha = 5{,}2 \text{ m} \cdot \sin 12° = 1{,}08114$ m. Energiaperiaatteen yhtälöstä $E_{p,a} + E_{k,a} + W = E_{p,l} + E_{k,l}$ saadaan työksi

$$W = E_{p,l} + E_{k,l} - E_{p,a} - E_{k,a} = 0 + 0 - mgh_a - \frac{1}{2}mv_a^2$$

$$= -57 \text{ kg} \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1{,}08114 \text{ m} - \frac{1}{2} \cdot 57 \text{ kg} \cdot \left(4{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = -1{,}18167 \text{ kJ}.$$

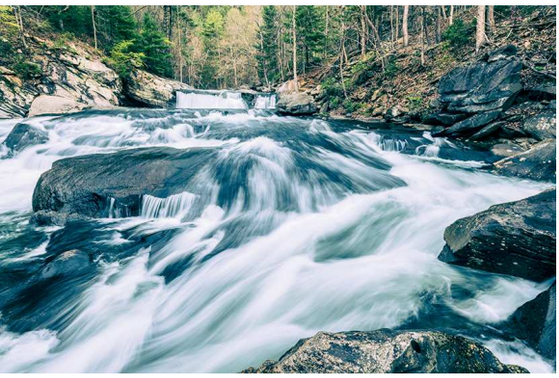
Kitkan tekemä työ on $W = F_\mu s = \mu Ns = \mu mgs$, josta saadaan liukukitkakertoimeksi

$$\mu = \frac{|W|}{mgs} = \frac{1{,}18167 \text{ kJ}}{57 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 5{,}2 \text{ m}} \approx 0{,}41.$$

Vastaus

Liukukitkakerroin on 0,41.

E Esimerkki 5



Kosken yläpuolella veden virtausnopeus on 0,75 m/s. Kosken alapuolella veden nopeus on 9,5 m/s. Koskessa 5500 kg:n vesimäärän liikettä vastustava keskimääräinen voima on 6,6 kN. Kosken pituus on 85 m. Laske kosken korkeus.

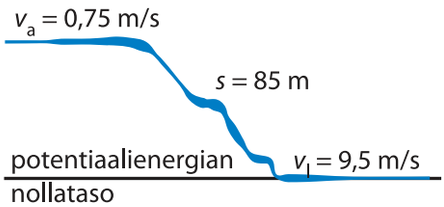
Ratkaisu

Valitaan potentiaalienergian nollatasoksi kosken alapuolen taso.

$m = 5500$ kg, $s = 85$ m, $v_a = 0{,}75$ m/s

$v_l = 9{,}5$ m/s, $F = 6{,}6$ kN, $h_l = 0$ m, $g = 9{,}81$ m/s^2

Koskessa vesi on liikkeessä alaspäin, joten sen potentiaalienergia pienenee ja liike-energia kasvaa. Veden ja kivien välinen virtausvastus sekä veden pyörteilyn liikevastukset muuntavat osan mekaanisesta energiasta veden ja kivien sisäenergiaksi.



Mekaniikan energiaperiaatteen yhtälö $E_{p,a} + E_{k,a} + W = E_{p,l} + E_{k,l}$ voidaan esittää muodossa

$$mgh_a + \frac{1}{2}mv_a^2 + W = 0 + \frac{1}{2}mv_l^2,$$

jossa h_a on veden korkeus kosken yläpuolella ja W on vastusvoiman tekemä työ.

Koska vastusvoiman suunta on päinvastainen kuin veden liikkeen suunta, on sen tekemä työ negatiivinen: $W = -Fs$. Kosken korkeus on

$$h_a = \frac{\frac{1}{2}mv_l^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 - W}{mg} = \frac{v_l^2 - v_a^2}{2g} - \frac{W}{mg}$$

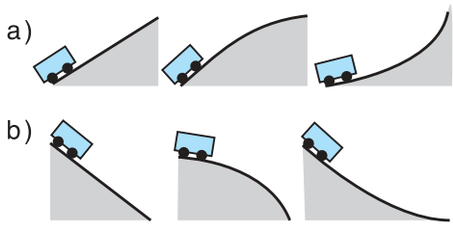
$$= \frac{(9{,}5\text{ m/s})^2 - (0{,}75\text{ m/s})^2}{2 \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2} - \frac{-6{,}6\text{ kN} \cdot 85\text{ m}}{5500\text{ kg} \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2} \approx 15\text{ m}.$$

Vastaus

Kosken korkeus on 15 m.

TEHTÄVÄT

14-1. Kuvien vaunuilla on sama alkuvauhti.
a) Mikä vaunuista nousee korkeimmalle?
b) Millä vaunuista on suurin vauhti mäen alaosassa?
Liikevastuksia ei oteta huomioon.



14-2. Benjihyppääjä pudottautuu hyppytasanteelta ja putoaa 25 m ennen kuin hänen nilkkoihin kiinnitetty köysi alkaa kiristyä. Kuinka suuren nopeuden hän saavuttaa ennen köyden kiristymistä?

14-3. Jääpuikon päästä putoaa peräkkäin kaksi samanlaista vesipisaraa. Tarkasteluhetkellä aiemmin lähtenyt vesipisara on jääpuikon kärjestä etäisyydellä 1,0 m ja myöhemmin lähtenyt etäisyydellä 0,75 m. Ilmanvastus voidaan olettaa pieneksi.
a) Kummalla pisaroista on suurempi potentiaalienergia tarkasteluhetkellä?
b) Onko alemman pisaran mekaaninen energia suurempi kuin ylemmän pisaran? Perustele.
c) Kasvaako vai pieneneekö pisaroiden välinen etäisyys putoamisen aikana vai pysyykö se samana? Perustele.
d) Mihin muotoon pisaroiden mekaaninen energia muuntuu pisaroiden osuessa maahan?

14-4. Jääkiekolle, jonka massa on 170 g, annetaan järven jäällä lyöntilaukauksella nopeus 85 km/h.
a) Kuinka suuren liike-energian jääkiekko saa?
b) Kiekko liukuu 250 m jäätä pitkin ja pysähtyy. Laske liikettä vastustava keskimääräinen voima.

14-5. **a)** Pyöräilijän nopeus 17 metriä korkean mäen päällä on 16 km/h. Kuinka suuri hänen nopeutensa on mäen alla, kun hän ei polje alamäessä? Liikettä vastustavien voimien tekemä työ on 8,1 kJ. Pyörän ja pyöräilijän kokonaismassa on 85 kg.
b) Piirrä kuva, josta ilmenevät pyöräilijään mäessä vaikuttavat voimat.

14-6. Kulmin lentomäen lähtöpuomi on asetettu 66 m:n korkeudelle hyppyrin nokasta. Hyppääjä lähtee levosta liukumaan pitkin vauhtimäkeä ja saavuttaa hyppyrin nokalla nopeuden 101 km/h. Kuinka suuren työn liikevastusvoimat tekevät liu'un aikana? Hyppääjän ja varusteiden yhteinen massa on 71 kg. [K2007/2]

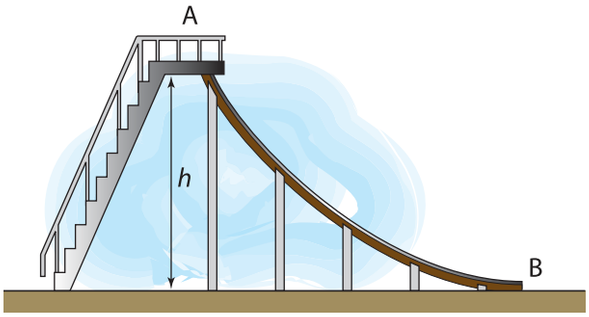
14-7. Lumilautailijan ja hänen varusteidensa massa on 73 kg. Lautailija lähtee 8,0 m korkean mäen huipulta alkunopeudella 2,5 m/s. Laske hänen nopeutensa mäen alla, kun 35 m pitkässä mäessä liikettä vastustaa keskimäärin 55 N:n voima.

14-8. Ylämäkeä lähestyvän auton (m = 1200 kg) nopeus on mäen alla 18 m/s. Auton liikettä vastustavat voimat ovat yhteensä 750 N. Kuinka paljon autolla on liike-energiaa, kun se on noussut 9,5 m korkean ja 60 m pitkän mäen päälle käyttämättä moottoria?

14-9. Kuvassa on leikkikentän liukumäki (korkeus h = 3,0 m). Lapsi, jonka massa on 20 kg, lähtee liukuun mäen ylätasanteelta (kohta A). Mäen alla (kohta B) hänen nopeutensa on 5,0 m/s. Lapsi liukuu vielä maata pitkin, jolloin liukukitkakerroin lapsen ja maan välillä on 0,77. Laske

a) vastusvoimien tekemä työ liukumäessä eli tytön liukuessa kohdasta A kohtaan B

b) kuinka pitkän matkan lapsi liukuu maata pitkin ennen pysähtymistään.



14-10. Mutkikkaan vesiliukumäen pituus on 141 m ja pudotuskorkeus 23 m. Laske laskijan nopeus liu'un päättyessä, kun laskijan ja liukumäen välinen keskimääräinen kitkakerroin on 0,15. Mikä olisi nopeus, jos kitkakerroin olisi nolla?

14-11. Tiinalla ja hänen isoveljellään Antilla on samanlaiset pulkat. He laskevat 4,0 m:n korkuisessa mäessä. Kummankin nopeus on alussa nolla. Mäki on jäinen ja liukas, joten vastustavat voimat ovat vähäisiä. Mäen alla on vaakasuora pihamaa. Antti laskee ensin. Hänen pulkkansa liukuu 12 m pihamaata pitkin.

a) Laske Antin pulkan nopeus mäen alla.

b) Arvioi, kuinka kauas Tiinan pulkka liukuu, kun Antin ja pulkan yhteinen massa on 42 kg ja Tiinan ja pulkan 21 kg.

c) Pohdi saamiasi tuloksia. Miksi Antin pulkan liukumasta matkasta ei voida ennustaa luotettavasti Tiinan pulkan liukumaa matkaa?

14-12. Kappale sysätään alkunopeudella 4,5 m/s liukumaan ylöspäin pitkin kaltevaa tasoa, jonka kaltevuuskulma on 19°. Tason ja kappaleen välinen kitkakerroin on 0,14.

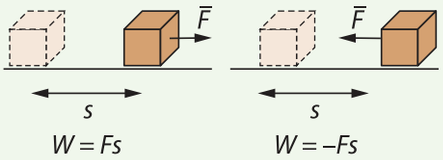
a) Kuinka korkealle kappale nousee lähtöpisteestään ennen pysähtymistään?

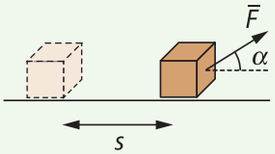
b) Pysähdyttyään kappale lähtee liukumaan alaspäin. Mikä on kappaleen nopeus sen ohittaessa lähtöpisteensä?

c) Mikä lepokitkakertoimen olisi vähintään oltava, jotta kappale ei lähtisi liukumaan alaspäin saavutettuaan liikeratansa korkeimman pisteen?

[Helsingin, Turun, Jyväskylän ja Oulun yliopisto 2003, Fysiikan valintakoe]

Tiivistelmä





Työ

$W = Fs$, jos voima $\overline{F}$ on kappaleen siirtymän suuntainen.
$W = -Fs$, jos voima $\overline{F}$ on vastakkaisuuntainen siirtymän kanssa.
$W = F\cos\alpha \cdot s$, jos voiman $\overline{F}$ ja siirtymän välinen kulma on α.

Voiman teho

Voiman keskimääräinen teho on $P = \frac{W}{t}$,

jossa W on voiman tekemä työ ja t työhön kulunut aika.

Liike-energia

$E_k = \frac{1}{2}mv^2$, jossa m on kappaleen massa ja v nopeus.

Työ-energiaperiaate

Kokonaisvoiman tekemä työ on yhtä suuri kuin kappaleen liike-energian muutos:

$W = \Delta E_k$ eli $W = \frac{1}{2}mv_l^2 - \frac{1}{2}mv_a^2$,

jossa v_a on alkunopeus ja v_l loppunopeus.

Kappaleen potentiaalienergia

$E_p = mgh$, jossa h on kappaleen pystysuora etäisyys valitusta potentiaalienergian nollatasosta.

Potentiaalienergian muutos ja mekaaninen työ

Kappaletta nostavan voiman tekemä työ on yhtä suuri kuin kappaleen potentiaalienergian muutos: $W = \Delta E_p$.

Mekaanisen energian säilymislaki

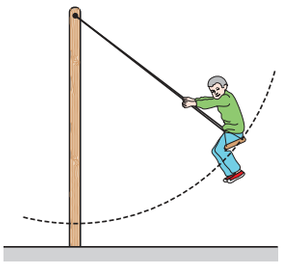
Mekaaninen energia säilyy eli $E_{p,a} + E_{k,a} = E_{p,l} + E_{k,l}$,
jos vastusvoimien vaikutus on merkityksetön.

Mekaniikan energiaperiaate

$E_{k,a} + E_{p,a} + W = E_{k,l} + E_{p,l}$,
jossa W on ei-konservatiivisten voimien tekemä työ.

TESTAA, OSAATKO

1. Tytöllä on keinussa
a) potentiaalienergiaa
b) liike-energiaa
c) sekä potentiaalienergiaa että liike-energiaa.



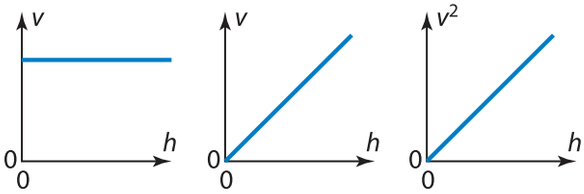
2. Keinumisen aikana tytön mekaanisen energian määrä suurenee, jos
a) tyttö pysäyttää keinun
b) kaveri antaa tytölle vauhtia
c) keinun narut katkeavat.

3. Mitkä seuraavista voimista ovat konservatiivisia:
a) paino
b) noste
c) kitka?

4. Pikkuauto kulkee mäkisellä tiellä. Korkeudella h sillä on aina sama vauhti
a) energiaperiaatteen perusteella
b) jos liikevastuksia ei ole
c) jos mekaaninen energia säilyy.

5. Jos junan nopeus kolminkertaistuu, sen pysähtymiseen vaadittava matka
a) ei muutu
b) pitenee kolminkertaiseksi
c) pitenee yhdeksänkertaiseksi.

6. Kuula päästetään putoamaan korkeudelta h, ja sen loppunopeus mitataan. Missä seuraavista kuvista nousukorkeuden ja loppunopeuden välinen riippuvuus on oikea?



7. Missä seuraavista tilanteista mekaaninen energia säilyy:
a) purjevene liikkuu järvellä
b) höyhen putoaa Kuussa
c) laskuvarjohypyssä?

8. Millä seuraavista on suurin mekaaninen energia, kun potentiaalienergian nollataso on merenpinnan korkeudella:
a) vuorikiipeilijä Mount Everestin huipulla
b) ralliauto Ouninpohjan erikoiskokeella
c) jumbojet (massa 215 t) nousukiidossa?

9. Vesivoimalaitoksen etuja ovat
a) saasteettomuus
b) hyvä hyötysuhde
c) uusiutuvuus.

10. Tuulivoimalaitoksen energiantuotanto perustuu
a) ilman liike-energiaan
b) tuulimyllyn siipien potentiaalienergiaan
c) Auringon tuottamaan energiaan.

Liikenneturvallisuus paremmaksi fysiikan avulla

Törmäystesteillä tutkitaan esimerkiksi moottoripyörien turvallisuutta.

Fysiikan tuntemus auttaa ymmärtämään monia turvalliseen liikkumiseen ja liikenteeseen liittyviä tekijöitä. Liikkeen jatkavuuden laki esimerkiksi selittää, miksi turvavöitä pitää käyttää. Jarrutusmatkan kasvaminen nopeuden toiseen potenssin verrannollisena auttaa ymmärtämään liialliseen ajonopeuteen liittyvän vaaran. Nopeuden lisäämisellä on melko vähäinen merkitys matkaan kuluvaan aikaan.

Silmänliikkeitä analysoimalla on huomattu, kuinka ajon aikainen seurustelu ja kännykän käyttö johtavat aktiivisen näkökentän kaventumiseen, jolloin sivusuunnasta tulevia vaaratekijöitä ei havaita. Tällaisten muiden toimintojen suorittaminen häiritsee ajamista.

Lähes puolet kuljettajista joutuu vaaratilanteisiin käyttäessään puhelinta ajon aikana. Kännykän käyttö ilman hands free -laitetta on kielletty moottoriajoneuvon kuljettajilta.

Jarrutusjäljistä voidaan päätellä onnettomuusauton nopeus. Liian suuri tilannenopeus ja kuljettajan kokemattomuus on usein onnettomuuden syynä.

Pyöräilykypärä suojaa pyöräilijän päätä paitsi onnettomuustilanteissa myös, kun pyöräilijä kaatuu. CE-hyväksytyt kypärät ovat läpäisseet iskunvaimennustestin, jossa kypärä ja sen sisällä oleva mallipää pudotetaan 1,5 m:n korkeudelta. Kypärässä olevaan mallipään hidastuvuus törmäyksessä on alle 250 *g*:tä (vetovoimakiihtyvyyttä), kun se ilman kypärää on 1000 *g*:tä.

Fysiikan tutkimukseen perustuvaa teknologiaa käytetään monin tavoin liikenneturvallisuuden parantamiseen. Kehittynyt tiedonsiirtoteknologia on mahdollistanut liikenteen automaattisen valvonnan ja ajantasaisen tiesää- ja onnettomuustiedotuksen.

Uutta teknologiaa ovat esimerkiksi automaattinen nopeusrajoitusten noudattamista seuraava järjestelmä ja kaistallapysymisjärjestelmä. Monenlaiset auton ympäristöä tarkkailevat anturit alkavat kuulua vakiovarusteisiin. On kehitetty järjestelmiä, jotka saavat auton jarruttamaan automaattisesti, jos kuljettaja ei huomaa edessä olevaa estettä riittävän ajoissa.

Itseohjautuvat autot ovat jo todellisuutta. Kehittyneen teknologian ansioista auton automatiikka pystyy pian tekemään päätöksiä monimutkaisissakin liikennetilanteissa.

Ns. peltipoliisit suorittavat automaattista nopeudenvalvontaa. Niiden ottamista kuvista voidaan tunnistaa paitsi ylinopeus myös se, käyttääkö kuljettaja turvavyötä ja puhuuko hän kännykkään. Peltipoliisit ovat reaaliaikaisessa yhteydessä valvontakeskukseen, jossa niiden ottamat kuvat analysoidaan automaattisesti.

Euro NCAP -testeissä testataan uusien automallien kolariturvallisuutta. Testien tarkoitus on tuottaa tietoa, jonka avulla eri automallien turvallisuutta voidaan vertailla keskenään. Niissä arvioidaan mm. matkustajan ja lapsimatkustajan turvallisuutta, jalankulkijan loukkaantumisriskiä törmäystilanteissa ja auton turvajärjestelmiä.

15 Impulssi ja liikemäärä

! Keskeisiä asioita

- **voiman impulssi**
- **liikemäärä**
- **impulssiperiaate**

Karateiskussa voiman vaikutusaika on lyhyt.

T Tutki

1. Impulssi

Iske vasaralla naulaa puupalaan, joka on kovalla alustalla. Tee sama, kun puupala on paksun vaahtomuovipalan päällä. Pohdi, mistä ero tilanteiden välillä johtuu.

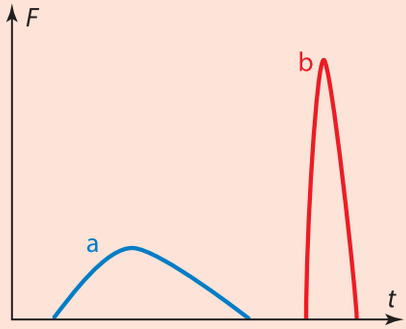
2. Voiman impulssi

Kytke voima-anturi tietokoneeseen. Pudota pallo voima-anturiin, ja tutki tietokoneen antaman *t*,*F*-kuvaajan perusteella voiman suuruutta ja vaikutusaikaa. Toista mittaus pudottamalla pallo eri korkeuksilta.

3. Impulssiperiaate

Anna vaunun törmätä pienellä nopeudella voima-anturiin. Selvitä vaunun nopeus juuri ennen törmäystä. Mittaa voima-anturiin kohdistuva voima ajan funktiona törmäyksen aikana. Määritä vaunun liikemäärä juuri ennen törmäystä ja törmäyksen jälkeen. Määritä voiman impulssi vaunulle *t*,*F*-kuvaajan fysikaalisen pinta-alan avulla. Vertaa toisiinsa vaunun liikemäärän muutosta ja voiman impulssia törmäyksessä.

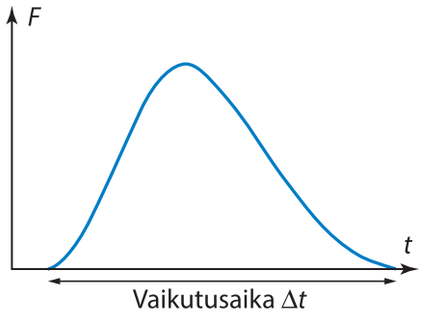
Korkeushyppääjä putoaa pehmeälle alustalle. Mihin perustuu pehmeän alustan hyöty?



Kumpi kuvaajista liittyy nokka-kolariin ja kumpi lumipenkkaan suistumiseen?

Miksi autoissa käytetään turvatyynyjä?

Sulkapallolyönnissä voiman keskimääräinen suuruus voi olla 30 N ja vaikutusaika 5 ms. Impulssi kuvaa voiman aikavaikutusta.



Mitä hyötyä polvilla joustamisesta on hypätessä?

$[I] = [F]\,[t] = 1\ \text{N} \cdot 1\ \text{s} = 1\ \text{Ns}.$

Impulssi

Kun keilapallo osuu keilaan, keila kimmahtaa liikkeelle ja myös keilapallon nopeus muuttuu hieman. Newtonin II lain mukaan nopeuden muutos vaatii, että kappaleeseen vaikuttaa voima. Keilapallo ja keila kohdistavat törmäyksessä toisiinsa voiman, joka vaikuttaa hyvin lyhyen ajan, mutta saa niiden nopeudet muuttumaan.

Samalla tavalla esimerkiksi pallopeleissä on lyhytkestoisia voimavaikutuksia, kun palloa lyödään tai potkaistaan. Näissä tilanteissa voiman suuruus ei ole vakio vaan muuttuu vuorovaikutuksen aikana. Lyhytkestoisen voimavaikutuksen kuvaamiseen käytetään fysiikassa suuretta **impulssi**.

Kun palloa lyödään mailalla, maila kohdistaa palloon voiman. Silloin pallo joutuu kiihtyvään liikkeeseen. Vaikka mailanisku on nopea, kestää pallon ja mailan kosketus kuitenkin tietyn ajan.

Tutkimuksessa 2 huomattiin, että pallon ja voima-anturin kosketukseen liittyvä voimavaikutus kesti noin 21 ms. Voima-anturin antamasta *t*,*F*-kuvaajasta huomattiin, että voima ei ollut vakio. Se saavutti suurimman arvon kosketusajan keskivaiheilla. Kun pallo pudotettiin korkeammalta, sekä voiman maksimiarvo että vaikutusaika kasvoivat. Myös pallon nopeus muuttui enemmän kuin silloin, kun pudotus tapahtui matalammalta.

Tutkimuksessa 3 vaunuun vaikuttanut voima oli vakio. Todettiin, että vaunun nopeus muuttui sitä enemmän, mitä kauemmin voiman vaikutus kesti eli nopeuden muutos Δv on suoraan verrannollinen voiman vaikutusaikaan, $\Delta v \sim \Delta t$. Nopeuden muutos myös suureni, kun voima $\overline{F}$ suureni, eli nopeuden muutos on suoraan verrannollinen myös voiman suuruuteen, $\Delta v \sim F$. Täten nopeuden muutos on kaikkiaan suoraan verrannollinen voiman suuruuden ja ajan tuloon eli $\Delta v \sim F\Delta t$. Nopeuden muutos on vaikuttavan voiman suuntainen.

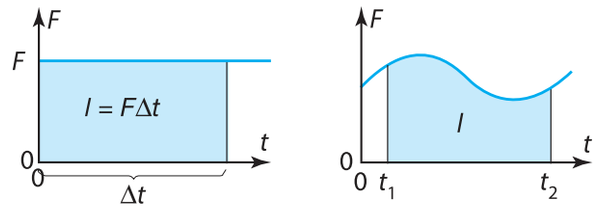
Voiman $\overline{F}$ ja sen vaikutusajan Δt tuloa sanotaan voiman impulssiksi. Impulssi on vektorisuure, ja sen suunta on sama kuin voiman suunta.

Impulssi
Voiman impulssi on $\overline{I} = \overline{F}\Delta t$, jossa $\overline{F}$ on voima ja Δt on voiman vaikutusaika.

Impulssin yksikkö on Ns.

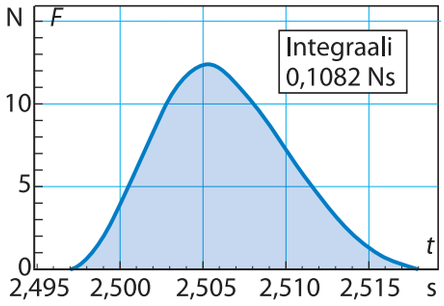
Impulssin graafinen määrittäminen

Impulssi voidaan määrittää graafisesti t,F-koordinaatistoon piirretyn voiman kuvaajan avulla. Impulssi on voiman kuvaajan ja vaaka-akselin väliin jäävän alueen fysikaalinen pinta-ala. Mittausohjelmaa käytettäessä mittausohjelma laskee tämän pinta-alan. Pinta-ala voidaan arvioida myös ruutujen lukumäärän avulla tai integroimalla.



Vasemmanpuoleisessa kuvassa voima on vakio ja impulssi on suorakulmion pinta-ala. Oikeanpuoleisessa kuvassa on muuttuvan voiman impulssi aikavälillä $t_1 \ldots t_2$.

Tutkimuksessa 2 mitattiin voima-anturilla palloon kohdistunut voima ajan funktiona. Mittausohjelmasta saatiin t,F-kuvaaja.



Mittausohjelmalla suoritettiin graafinen integrointi, joka antoi kuvaajan alapuolelle jäävän alueen pinta-alaksi 0,11 Ns.

Impulssi on johdannaissuure. Sen yksikkö $[I] = 1$ Ns perusyksiköiden avulla esitettynä on

$$[I] = [F] \cdot [t] = [ma] \cdot [t] = [m] \cdot [a] \cdot [t] = 1\ \text{kg} \cdot 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1\ \text{s} = 1\ \frac{\text{kgm}}{\text{s}}.$$

Liikemäärä

Tutkiessaan liikettä *Galileo Galilei* (1564–1642) päätteli, että kappaleiden törmäyksissä säilyy suure mv^2. Ranskalainen *René Descartes* (1596–1650) puolestaan väitti, että säilyvä suure on mv. Myöhemmin osoittautui, että molemmat olivat oikeassa. Kyse on kahdesta eri suureesta, liike-energiasta $\frac{1}{2}mv^2$ ja liikemäärästä $m\overline{v}$, joita molempia käytetään törmäysten mallintamiseen.

$$[p] = [m][v] = 1\ \text{kg} \cdot 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 1\,\frac{\text{kgm}}{\text{s}}$$

Liikemäärä

Liikemäärällä $\overline{p}$ tarkoitetaan kappaleen massan ja nopeuden tuloa, $\overline{p} = m\overline{v}$,
jossa m on kappaleen massa ja $\overline{v}$ nopeus.

Liikemäärä on vektorisuure, jonka suunta on sama kuin kappaleen nopeuden suunta.

Liikemäärän yksikkö on $\frac{\text{kgm}}{\text{s}}$.

E Esimerkki 1

Raitiovaunun massa on 55 000 kg ja nopeus 64 km/h.

a) Laske raitiovaunun liikemäärän suuruus.

b) Kuinka suuri pitäisi olla 1150 kg:n massaisen auton nopeus, jotta sillä olisi sama liikemäärä kuin raitiovaunulla?

Liikemäärää tarvitaan törmäyksien mallintamisessa. On suuri ero sillä, törmääkö autoon hyttynen vai hirvi.

Ratkaisu

$m_{rv} = 55\,000$ kg, $m_{ha} = 1150$ kg, $v_{rv} = 64$ km/h.

a) Raitiovaunun liikemäärän suuruus on

$$p_{rv} = m_{rv}v_{rv} = 55\,000\ \text{kg} \cdot \frac{64}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 977\,778\,\frac{\text{kgm}}{\text{s}} \approx 9{,}8 \cdot 10^5\,\frac{\text{kgm}}{\text{s}}.$$

b) Henkilöauton liikemäärän olisi oltava yhtä suuri kuin raitiovaunun liikemäärä:

$p_{ha} = p_{rv}$ eli $m_{ha}v_{ha} = m_{rv}v_{rv}$.

Henkilöauton nopeuden pitäisi olla

$$v_{ha} = \frac{m_{rv}v_{rv}}{m_{ha}} = \frac{977\,778\,\frac{\text{kgm}}{\text{s}}}{1150\ \text{kg}} = 850{,}242\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 3100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Vastaus

a) $9{,}8 \cdot 10^5$ kgm/s **b)** 3100 km/h.

Impulssiperiaate

Suureet impulssi ja liikemäärä liittyvät toisiinsa. Niiden välinen yhteys ilmenee **impulssiperiaatteessa**.

Kun kappaleeseen vaikuttaa voima, kappale saa Newtonin II lain mukaan kiihtyvyyden $\overline{a} = \frac{\overline{F}}{m}$, jossa $\overline{F}$ on voima ja m kappaleen massa. Oletetaan, että voima alkaa vaikuttaa hetkellä t_1 ja lakkaa vaikuttamasta hetkellä t_2. Jos kappaleen nopeus hetkellä t_1 on $\overline{v}_1$ ja hetkellä t_2 $\overline{v}_2$, on kappaleen keskimääräinen kiihtyvyys $\overline{a} = \frac{\overline{v}_2 - \overline{v}_1}{t_2 - t_1}$. Tällöin kappaleeseen vaikuttava voima on keskimäärin

$$\overline{F} = m\overline{a} = m\,\frac{\overline{v}_2 - \overline{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{m\overline{v}_2 - m\overline{v}_1}{t_2 - t_2} = \frac{\overline{p}_2 - \overline{p}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \overline{p}}{\Delta t}.$$

Tämä yhtälö voidaan esittää muodossa $\overline{F}\Delta t = \Delta \overline{p}$. Täten voiman impulssi $\overline{I} = \overline{F}\Delta t$ on yhtä suuri kuin liikemäärän muutos.

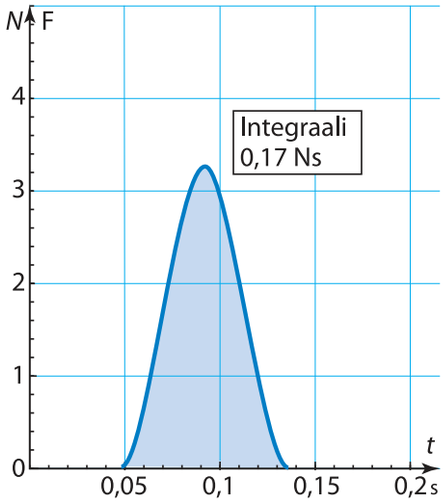
Impulssiperiaatetta sanotaan joskus myös impulssi-liikemääräperiaatteeksi.

Impulssiperiaate

Kappaleeseen kohdistuvan voiman impulssi on yhtä suuri kuin voiman aiheuttama kappaleen liikemäärän muutos, eli

$\overline{I} = \Delta \overline{p}$,

jossa $\overline{I}$ on impulssi ja $\Delta \overline{p}$ on liikemäärän muutos, $\Delta \overline{p} = m\overline{v}_2 - m\overline{v}_1$.



Tutkimuksessa 3 mitattiin mittausohjelmaan liitetyllä voima-anturilla törmäävään vaunuun kohdistuva voima ajan funktiona.

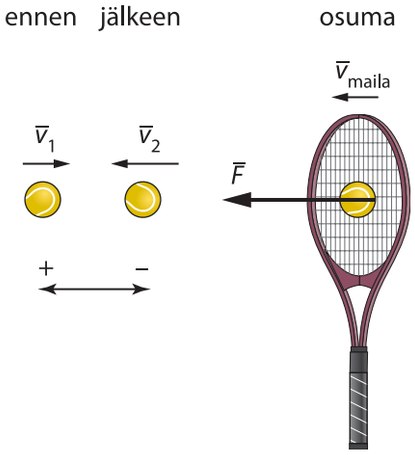
Voiman impulssi määritettiin t,F-kuvaajasta graafisella integroinnilla. Tulokseksi saatiin 0,17 Ns.

Vaunun liikemäärän muutos törmäyksessä on $\Delta \overline{p} = m\overline{v}_2 - m\overline{v}_1$. Vaunun nopeuden suuruudeksi ennen törmäystä saatiin $v_1 = -0{,}175$ m/s ja törmäyksen jälkeen $v_2 = 0{,}156$ m/s. Nopeus oli ennen törmäystä negatiivinen, koska vaunu liikkui kohti voima-anturia, ja positiivinen törmäyksen jälkeen, koska vaunu liikkui silloin anturista poispäin. Liikemäärän muutos oli suuruudeltaan

$$\begin{aligned}\Delta p &= mv_2 - mv_1 \\ &= 0{,}55\ \text{kg} \cdot 0{,}156\ \text{m/s} - 0{,}55\ \text{kg} \cdot (-0{,}175\ \text{m/s}) \approx 0{,}18\ \text{kgm/s} \\ &= 0{,}18\ \text{Ns}.\end{aligned}$$

Tämä on likimain sama kuin mittausohjelmasta saatu impulssin arvo, joten impulssiperiaate $\overline{I} = \Delta \overline{p}$ pitää mittaustarkkuuden rajoissa paikkansa. Mittaustarkkuuteen vaikuttavat mm. kitka ja ilmavastus.

E Esimerkki 2



Tennismailalla lyödään palloa, jonka massa on 57 g. Pallon liikesuunta vaihtuu lyönnissä vastakkaiseksi, ja se on vaakasuora ennen ja jälkeen osuman. Pallon nopeus ennen osumaa on 32 m/s. Pallon ja mailan kosketusaika on 4,2 ms ja palloon kohdistuvan vaakasuoran kosketusvoiman suuruus keskimäärin 1100 N. Määritä pallon nopeus osuman jälkeen.

Ratkaisu

$m = 0{,}057$ kg, $v_1 = 32$ m/s, $\Delta t = 4{,}2$ ms, $F = 1100$ N

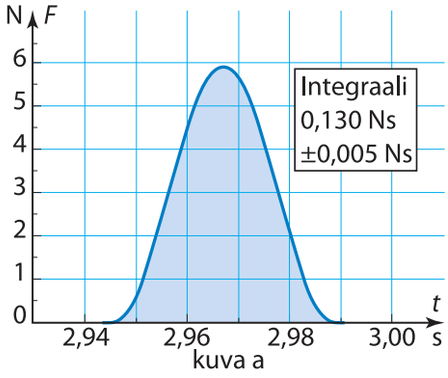
Osumahetkellä Maan ja pallon välinen vuorovaikutus on merkityksetön pallon ja mailan keskinäiseen vuorovaikutukseen verrattuna, sillä palloon kohdistuva paino $G = mg \approx 0{,}56$ N on hyvin paljon pienempi kuin voima F. Kun maila osuu palloon, voiman impulssin suunta on sama kuin mailan liikesuunta. Voiman impulssi on yhtä suuri kuin pallon liikemäärän muutos eli $\overline{I} = \Delta\overline{p}$ eli $\overline{F}\Delta t = m\Delta\overline{v} = m(\overline{v}_2 - \overline{v}_1)$.
Sovitaan voiman suunta positiiviseksi, jolloin saadaan skalaariyhtälö $F\Delta t = m(v_2 - (-v_1))$ eli $F\Delta t = mv_2 + mv_1$. Ratkaistaan yhtälöstä pallon nopeus osuman jälkeen:

$$v_2 = \frac{F\Delta t - mv_1}{m} = \frac{1100\ \text{N} \cdot 4{,}2 \cdot 10^{-3}\ \text{s} - 0{,}057\ \text{kg} \cdot 32\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0{,}057\ \text{kg}} \approx 49\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Vastaus

Pallon nopeus osuman jälkeen on 49 m/s ja sen suunta sama kuin lyönnissä vaikuttavan voiman suunta.

E Esimerkki 3

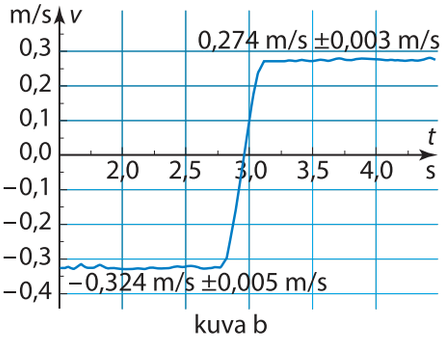


kuva a

Vaunuradalla liikkuneen vaunun, jonka massa on 0,21655 kg, annettiin törmätä tukevasti kiinnitettyyn voima-anturiin, jolloin saatiin mitattua vaunuun kohdistuva voima törmäyksessä (kuva a). Samanaikaisesti mitattiin ultraäänianturilla vaunun nopeus ajan funktiona (kuva b). Mittausohjelma antoi graafisen integraalin arvoksi $(0{,}130 \pm 0{,}005)$ Ns.

a) Minkä vuoksi vaunun vauhti muuttuu törmäyksessä?

b) Toteutuuko impulssiperiaate vaunun ja anturin törmäyksessä saatujen tulosten perusteella?



kuva b

Ratkaisu

$m = 0{,}21655$ kg, $I = (0{,}130 \pm 0{,}005)$ Ns

a) Vaunun vauhti pienenee törmäyksessä hieman, koska osa vaunun liike-energiasta muuntuu törmäyksessä vaunujen sisäenergiaksi sekä vaunujen ja ilman värähtelyiksi (ääneksi).

b) Kuvaajasta b saadaan liikemäärän muutokselle skalaariyhtälö

$$\Delta p = p_2 - p_1 = m(v_2 - v_1) = 0{,}21655\ \text{kg} \cdot \big(0{,}274\ \text{m/s} - (-0{,}324\ \text{m/s})\big)$$
$$\approx 0{,}129\ \text{kgm/s} = 0{,}129\ \text{Ns}.$$

Koska tulos on kuvasta a määritetyn impulssin $(0{,}130 \pm 0{,}005)$ Ns virherajojen sisällä, laki $\overline{I} = \Delta\overline{p}$ toteutuu törmäyksessä.

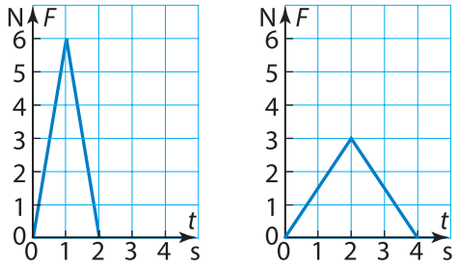
TEHTÄVÄT

15-1. Amerikkalaisessa jalkapallossa hyökkääjän ja hänen varusteidensa massa on 89 kg ja nopeus 8,0 m/s.

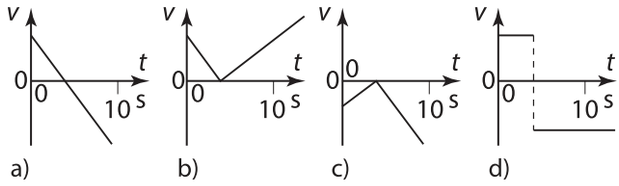
a) Laske hyökkääjän liikemäärän suuruus.

b) Puolustajan massa on 105 kg. Kuinka suuri puolustajan nopeuden pitäisi olla, jotta hänellä olisi yhtä suuri liikemäärä kuin hyökkääjällä?

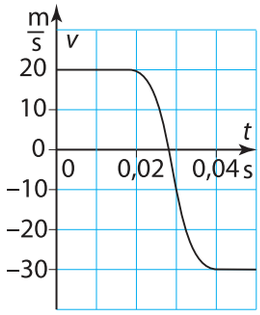
15-2. Miten kuvissa a ja b esitetyt impulssit eroavat toisistaan?



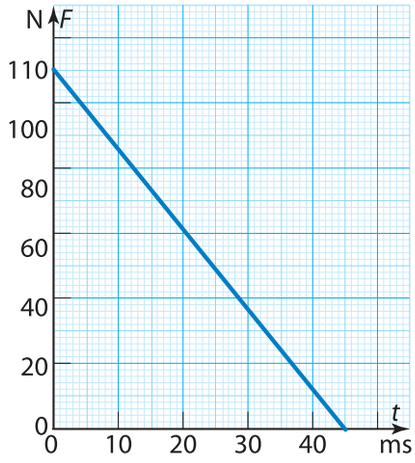
15-3. Vakiovoima antaa liikkeessä olevalle kappaleelle 10 s:n aikana tietyn impulssin. Mikä oheisista kuvista a, b, c ja d kuvaa kappaleen nopeutta parhaiten? Voima ja nopeus ovat alussa yhdensuuntaiset (samansuuntaiset tai vastakkaissuuntaiset).



15-4. Kuva esittää tennispallon nopeuden muuttumista mailan iskiessä sitä vastalyönnin aikana. Kuinka suurella keskimääräisellä voimalla maila vaikuttaa palloon kosketusaikana? Pallon massa on 57 g.



15-5. Mallinnetaan jousiammunnassa käytettävän jousipyssyn jänteen nuoleen kohdistamaa voimaa siten, että voima pienenee tasaisesti arvosta 110 N nollaan ajassa 45 ms. Nuolen massa on 36 g. Määritä nuolen lähtönopeus.



15-6. Vaakasuoralla vaunuradalla olevaan vaunuun kiinnitettiin kimmoisa jousi. Vaunun annettiin törmätä tukevasti radan päähän kiinnitettyyn voima-anturiin. Kopioi mittaustulokset palvelimelta ja avaa ne mittausohjelmassa.

a) Määritä vaunun pysäyttävän voiman impulssi graafisesti integroimalla.

b) Määritä vaunun nopeus ennen ja jälkeen törmäyksen, kun vaunun massa on 0,215 kg.

c) Määritä vaunun liikemäärän muutos vuorovaikutuksessa.

15-7. Pallo, jonka massa on 65 g, lentää nopeudella 25 m/s. Sitä lyödään mailalla, minkä jälkeen pallon nopeus on 35 m/s vastakkaiseen suuntaan. Kuinka suuren keskimääräisen voiman maila kohdistaa palloon, jos kosketusaika on 4,0 ms?

15-8. Kumipallo, jonka massa on 150 g, pudotetaan 1,0 m:n korkeudelta lattiaan, josta se pomppaa likimain samalla nopeudella, joka sillä on sen osuessa lattiaan. Laske lattian palloon kohdistaman voiman impulssi.

15-9. Heinäsirkkaan vaikuttaa sen hypätessä keskimäärin 0,38 N:n suuruinen, ylöspäin suuntautuva voima ja ponnistusvaihe kestää 19 ms. Vastusvoimat oletetaan vähäisiksi.

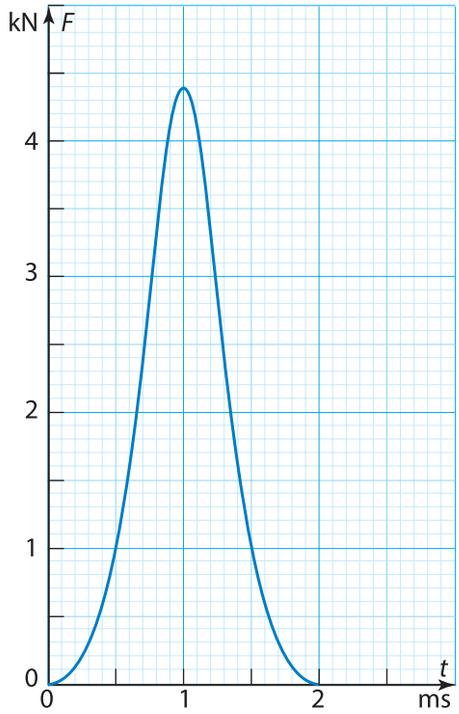
a) Arvioi, kuinka korkealle 2,5 g:n massainen heinäsirkka hyppää.

b) Mikä heinäsirkan ominaisuus vaikuttaa sen hyviin hyppääjänkykyihin?

15-10. Kananmuna, jonka massa on 0,060 kg, putoaa 1,0 m:n korkeudelta lattialle, jolloin se rikkoutuu. Laske kananmunan lattiaan kohdistaman voiman impulssi.

15-11. Pallo, jonka massa on 0,20 kg, pudotetaan lattiaan, ja se pomppaa siitä 3,1 m:n korkeuteen. Liikemäärän suuruus pieneni törmäyksessä 0,91 kgm/s. Kuinka korkealta pallo pudotettiin? Ilmanvastusta ei oteta huomioon.

15-12. Pystysuoraan putoavaa pesäpalloa lyödään mailalla siten, että maila kohdistaa palloon vaakasuoran voiman, jonka suuruus riippuu ajasta oheisen kuvan mukaisesti. Kuinka suurella nopeudella ja mihin suuntaan pallo lähtee lyönnin jälkeen, kun pallon massa on 150 g ja putoamisnopeus lyöntihetkellä 11,2 m/s?



15-13. **a)** Auto törmää kolaritestissä seinään nopeudella 15,6 m/s ja se pysähtyy 0,072 s:n kuluttua ensikosketuksesta. Auton massa on 1300 kg. Laske seinän autoon törmäyksen aikana kohdistama keskimääräinen voima.

b) Autossa olevan testinuken (massa 75 kg) pysähtyminen kestää 0,115 s. Pysähtymistä hidastaa turvatyyny. Laske nukkeen vaikuttava keskimääräinen voima.

15-14. Kopioi mittaustulokset palvelimelta ja avaa ne mittausohjelmassa. Mittausaineisto on saatu törmäyttämällä vaunua voima-anturiin. Vaunun massa on 0,570 kg.

a) Kuinka kauan törmäys kesti?

b) Kuinka suuri on suurin törmäyksessä syntyvä voima?

c) Määritä impulssi.

16 Liikemäärän säilyminen

Osa keilapallon liikemäärästä muuttuu osumassa keilojen liikemääräksi.

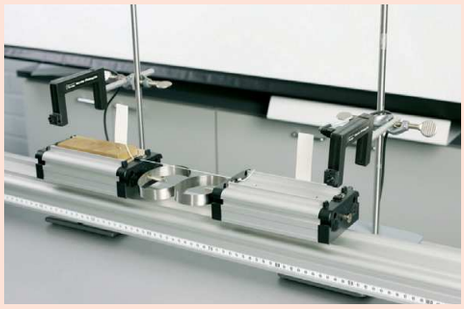
! Keskeisiä asioita

- **eristetty mekaaninen systeemi**
- **liikemäärän säilyminen**
- **kimmoinen törmäys**
- **kimmoton törmäys**

T Tutki

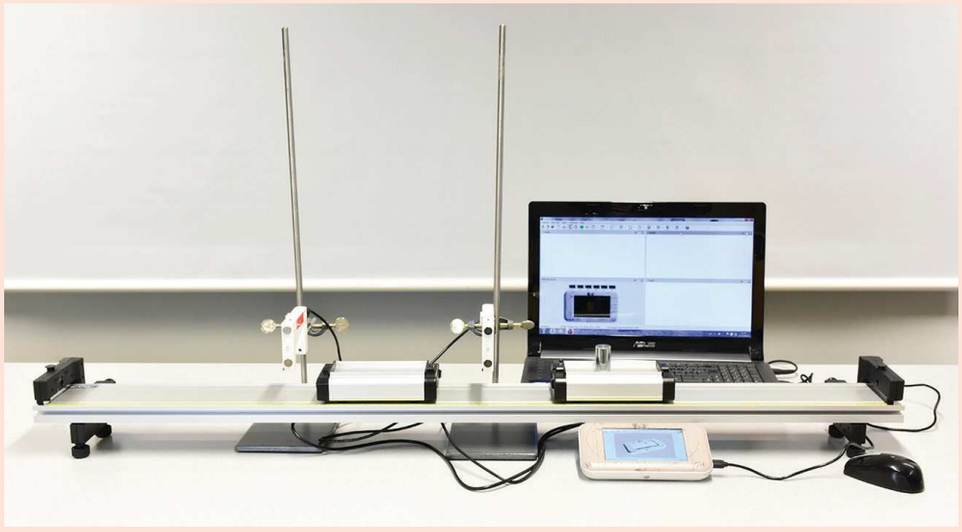
1. Liikemäärän säilyminen

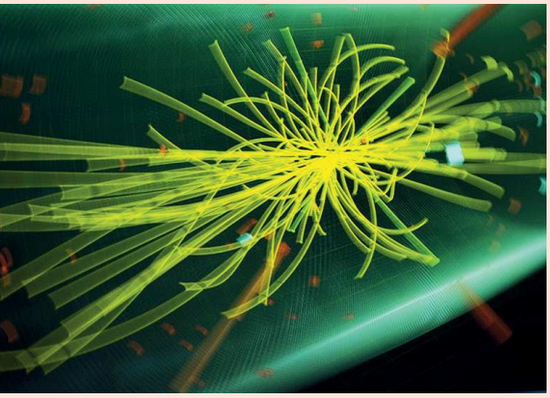
Aseta kahden vaunuradalla olevan vaunun väliin kokoonpuristettu jousi. Vapauta jousi ja tutki valoporttien avulla vaunujen liikettä.



2. Liike-energian ja liikemäärän säilyminen

Törmäytä vaunuradalla erimassaisia vaunuja useilla eri nopeuksilla täysin kimmottomasti toiseen vaunuun. Tutki törmäävien vaunujen liikettä valoporttien avulla.





Liikemäärä säilyy alkeishiukkasten vuorovaikutuksissa.

Liikemäärän säilyminen

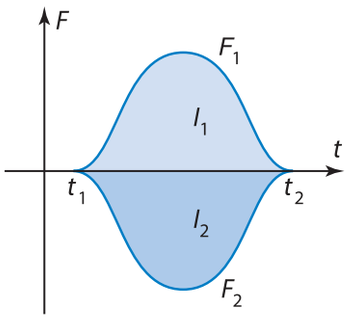
Tutkimuksessa 1 vaunut olivat aluksi paikallaan, jolloin niiden liikemäärät olivat nollia eli $\overline{p}_{1a} = m_1\overline{v}_1 = \overline{0}$ ja $\overline{p}_{2a} = m_2\overline{v}_2 = \overline{0}$. Kun jousi vapautettiin, vaunut lähtivät liikkeelle vastakkaisiin suuntiin nopeuksilla $\overline{u}_1$ ja $\overline{u}_2$.

	m_1 (kg)	u_1 (m/s)	p_1 (kgm/s)	m_2 (kg)	u_2 (m/s)	p_2 (kgm/s)
Mittaus 1	0,150	–0,448	–0,0672	0,340	0,197	0,0670
Mittaus 2	0,255	–0,334	–0,0852	0,350	0,245	0,0858
Mittaus 3	0,310	–0,291	–0,0902	0,310	0,289	0,0896

Kun nopeuksien ja massojen mittaustuloksista määritettiin vaunujen liikemäärät, niiden huomattiin olevan mittaustarkkuuden rajoissa yhtä suuret ja vastakkaismerkkiset eli $\overline{p}_1 = -\overline{p}_2$. Liikemäärien summa on silloin nolla, $\overline{p}_1 + \overline{p}_2 = \overline{0}$. Ennen jousen vapauttamista liikemäärien summa oli niin ikään nolla, $\overline{p}_{1a} + \overline{p}_{2a} = \overline{0}$, joten vaunujen muodostaman systeemin kokonaisliikemäärä eli vaunujen liikemäärien summa ei muutu tapahtumassa. Vaunujen muodostaman systeemin **liikemäärä säilyy**.

Törmäysten käsittelyssä usein nopeuksia ennen törmäystä merkitään symbolilla $\overline{v}$ ja nopeuksia törmäyksen jälkeen symbolilla $\overline{u}$.

Liikemäärän säilyminen kahden kappaleen vuorovaikutuksessa
Kappaleiden kokonaisliikemäärä ennen vuorovaikutusta on yhtä suuri kuin vuorovaikutuksen jälkeen:
$m_1\overline{v}_1 + m_2\overline{v}_2 = m_1\overline{u}_1 + m_2\overline{u}_2$,
kun m_1 ja m_2 ovat kappaleiden massat, $\overline{v}_1$ ja $\overline{v}_2$ kappaleiden 1 ja 2 nopeudet ennen vuorovaikutusta ja $\overline{u}_1$ ja $\overline{u}_2$ nopeudet vuorovaikutuksen jälkeen.



Vaunuihin vaikuttavien voimien impulssien graafinen määrittäminen. Koska vaunuun 2 vaikuttava voima on negatiiviseen suuntaan, on sen impulssi t-akselin alapuolella olevan pinnan fysikaalinen pinta-ala, joka on negatiivinen.

Impulssiperiaatteen mukaan kappaleen liikemäärän muutos on yhtäsuuri kuin kappaleeseen kohdistuvan voiman impulssi, eli $\overline{I} = \overline{F}\Delta t = \Delta\overline{p}$. Vaunujen liikemäärien muutokset $\Delta\overline{p}_1 = m_1\overline{u}_1 - m_1\overline{v}_1$ ja $\Delta\overline{p}_2 = m_2\overline{u}_2 - m_2\overline{v}_2$ olivat mittauksien mukaan yhtä suuret mutta vastakkaismerkkiset eli $\overline{p}_1 = -\overline{p}_2$. Myös vaunuihin vaikuttavien voimien impulssit ovat yhtä suuret ja vastakkaismerkkiset, $\overline{I}_1 = -\overline{I}_2$.

Kappaleiden välisiin vuorovaikutuksiin pätee Newtonin III laki, jonka mukaan vuorovaikuttavat kappaleet kohdistavat toisiinsa yhtäsuuret, vastakkaissuuntaiset voimat. Tutkimuksessa 1 vaunuihin kohdistuneet voimat olivat yhtä suuret ja vastakkaissuuntaiset. Nämä voimat vaikuttivat yhtä pitkän aikaa, joten niiden impulssit $\overline{I}_1$ ja $\overline{I}_2$ olivat yhtä suuret ja vastakkaismerkkiset eli $\overline{I}_1 = -\overline{I}_2$.

Kun luistelijat vetävät toisiaan puoleensa, heidän liikemäärien-sä muutokset ovat yhtä suuret ja vastakkaissuuntaiset. Liikemäärien summa ei muutu.

Liikemäärän säilymislaki

Vaunuradalla olevien vaunujen voidaan katsoa muodostavan eristetyn systeemin: ne ovat tarkastellun liikkeen kannalta vuorovaikutuksessa vain keskenään, sillä esimerkiksi kitka on merkityksettömän pieni. **Liikemäärän on havaittu säilyvän kaikissa eristetyissä systeemeissä.**

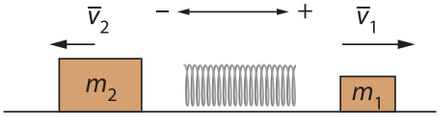
Liikemäärän säilymislaki

- Eristetyssä systeemissä kappaleiden kokonaisliikemäärä ei muutu, $\sum \overline{p}_{\text{alussa}} = \sum \overline{p}_{\text{lopussa}}$.
- Liikemäärä voi jakautua kappaleiden kesken uudella tavalla, mutta sitä ei synny eikä häviä.

Liikemäärän säilyminen on yksi fysiikan suurista säilymislaeista. Säilymislaeiksi kutsutaan luonnonlakeja, joiden mukaan suureiden kokonaismäärät pysyvät muuttumattomina vuorovaikutuksissa. Liikemäärän säilymislain lisäksi on olemassa mm. energian ja sähkövarauksen säilymislait.

E Esimerkki 1

Kahden vaunuradalla olevan vaunun (massat 2,0 kg ja 4,0 kg) välissä on kokoonpuristettu jousi. Kun jousi vapautetaan, se sysää vaunut liikkeeseen vastakkaisiin suuntiin. Kevyempi vaunu lähtee liikkeelle nopeudella 5,0 m/s. Mikä on raskaamman vaunun lähtönopeus?



Ratkaisu

$m_1 = 2{,}0$ kg, $m_2 = 4{,}0$ kg, $v_1 = 5{,}0$ m/s

Alussa systeemin liikemäärä on nolla eli $\sum \overline{p}_{\text{alussa}} = \overline{0}$. Koska kitka on pieni, liikemäärä säilyy eli $\sum \overline{p}_{\text{lopussa}} = m_1\overline{v}_1 + m_2\overline{v}_2 = \overline{0}$. Sovitaan kevyemmän vaunun liikkeen suunta positiiviseksi. Skalaariyhtälö on $m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$ eli $m_1 v_1 = -m_2 v_2$. Raskaamman vaunun nopeuden suunnan kertoo ratkaistavan nopeuden v_2 etumerkki. Nopeus on

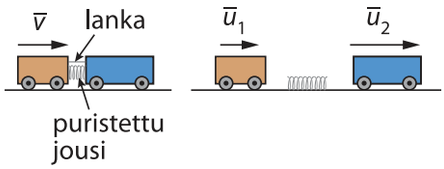
$$v_2 = -\frac{m_1 v_1}{m_2} = -\frac{2{,}0 \text{ kg} \cdot 5{,}0 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4{,}0 \text{ kg}} = -2{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Vaunun 2 nopeuden suuruus on 2,5 m/s ja suunta on negatiiviseen suuntaan eli piirroksessa vasemmalle.

Vastaus

Raskaamman vaunun nopeuden suuruus on 2,5 m/s ja suunta päinvastainen kuin pienemmän vaunun suunta.

E Esimerkki 2



Kaksi vaunua liikkuu vaunuradalla oikealle nopeudella 0,14 m/s. Vaunut on liitetty langalla toisiinsa, ja niiden välissä on kokoon puristettu jousi. Vaunujen massat ovat 0,15 kg ja 0,40 kg. Liitos pettää yhtäkkiä. Painavamman vaunun nopeus jousen laukeamisen jälkeen on suuruudeltaan 0,22 m/s. Laske, mikä on kevyemmän vaunun nopeus heti jousen laukeamisen jälkeen.

Ratkaisu

$m_1 = 0{,}15$ kg, $m_2 = 0{,}40$ kg, $u_2 = 0{,}22$ m/s, $v = 0{,}14$ m/s

Oletetaan kitka ja ilmanvastus pieniksi. Tarkastellaan vaunuja kahden kappaleen vuorovaikutuksena, jonka jousi välittää. Vuorovaikutuksessa ilmenevät voimat noudattavat voiman ja vastavoiman lakia. Liikemäärä säilyy, joten liikemäärä $\overline{p}_1 = (m_1 + m_2)\overline{v}$ ennen jousen laukeamista on yhtä suuri kuin liikemäärä $\overline{p}_2 = m_1\overline{u}_1 + m_2\overline{u}_2$ jousen laukeamisen jälkeen eli liikemäärän säilymislaki saa muodon $(m_1 + m_2)\overline{v} = m_1\overline{u}_1 + m_2\overline{u}_2$.

Kevyemmän vaunun liikesuuntaa jousen laukeamisen jälkeen ei tunneta. Sovitaan painavamman vaunun nopeuden u_2 suunta törmäyksen jälkeen positiiviseksi suunnaksi. Kevyemmän vaunun nopeuden u_1 etumerkki vastauksessa kertoo kevyemmän vaunun nopeuden suunnan. Liikemäärän säilymislaista saadaan yhtälö $(m_1 + m_2)\, v = m_1 u_1 + m_2 u_2$.

Kevyemmän vaunun nopeus on

$$u_1 = \frac{(m_1 + m_2)v - m_2 u_2}{m_1}$$

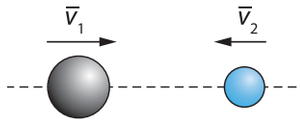
$$= \frac{(0{,}15\ \text{kg} + 0{,}40\ \text{kg}) \cdot 0{,}14\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0{,}40\ \text{kg} \cdot 0{,}22\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0{,}15\ \text{kg}}$$

$$\approx -0{,}073\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Vastaus

Kevyemmän vaunun nopeus on 0,073 m/s. Liikkeen suunta on kuvassa vasemmalle.

Törmäykset

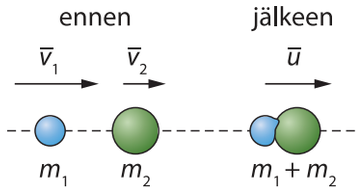


Kappaleet liikkuvat ennen suoraa, keskeistä törmäystä molempien painopisteiden kautta kulkevalla suoralla.

Kahden kappaleen välistä lyhytkestoista vuorovaikutusta kutsutaan **törmäykseksi**. Niitä ovat esimerkiksi curlingkivien iskeytyminen toisiinsa, asteroidin osuminen Maahan tai varattujen hiukkasten törmääminen toisiinsa hiukkaskiihdyttimessä. Törmäyksessä vaikuttavat voimat ovat usein suuria kappaleisiin samaan aikaan vaikuttaviin muihin voimiin verrattuna.

Törmäystä sanotaan **suoraksi ja keskeiseksi törmäykseksi**, jos molemmat kappaleet liikkuvat niiden painopisteiden kautta kulkevaa suoraa pitkin ja jos kappaleiden kosketuskohta on samalla suoralla.

Jos kappaleet eivät tartu törmäyksessä yhteen ja niiden muodot palaavat ennalleen törmäyksen jälkeen, törmäystä sanotaan **kimmoisaksi törmäykseksi**.



Täysin kimmottomassa törmäyksessä törmäävät kappaleet tarttuvat toisiinsa kiinni.

Jos törmäyksessä osa kappaleiden liike-energiasta muuntuu muihin energiamuotoihin, esimerkiksi kappaleiden sisäenergiaksi kappaleiden muodonmuutosten takia, on törmäys **täysin kimmoton**. Jos kappaleet tarttuvat törmäyksessä yhteen ja jatkavat liikettä toisiinsa kiinnittyneinä, törmäystä sanotaan täysin kimmottomaksi. Kahden kappaleen suorassa ja keskeisessä täysin kimmottomassa törmäyksessä kappaleet tarttuvat yhteen, joten niillä on yhtä suuri nopeus törmäyksen jälkeen eli $\overline{u}_1 = \overline{u}_2 = \overline{u}$. Liikemäärän säilymislaista seuraa tässä tapauksessa yhtälö $m_1\overline{v}_1 + m_2\overline{v}_2 = (m_1 + m_2)\overline{u}$.

E Esimerkki 3

Kun maalivahti vangitsee kiekon, kyseessä on kiekon ja maalivahdin täysin kimmoton törmäys.

Jääkiekko-ottelussa vastustajan laukaisema jääkiekko iskeytyy levossa olevaan maalivahtiin. Kiekko jää maalivahdin varusteisiin. Jääkiekon nopeus on 150 km/h. Maalivahdin ja hänen varusteidensa massa on 95 kg, ja kiekon massa 170 g. Kuinka suurella nopeudella maalivahti ja kiekko liikkuvat välittömästi törmäyksen jälkeen? Kitka oletetaan pieneksi.

Ratkaisu

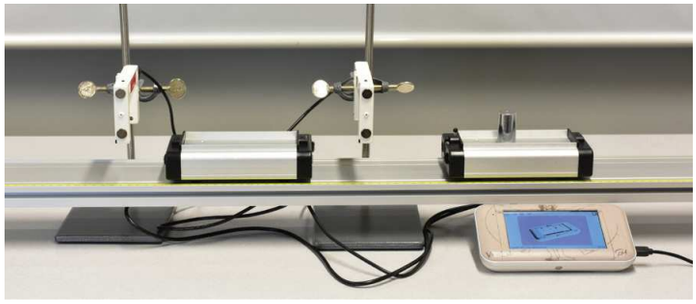
$m_1 = 0{,}170$ kg, $m_2 = 95$ kg, $v_1 = 150$ km/h, $v_2 = 0{,}0$ m/s

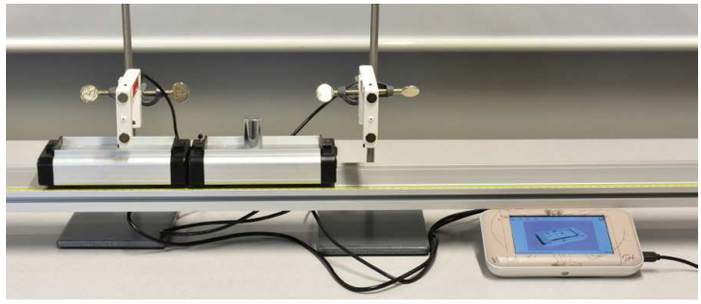
Kiekon törmäystä maalivahtiin voidaan käsitellä kahden kappaleen vuorovaikutuksena ja soveltaa siihen liikemäärän säilymislakia $m_1\overline{v}_1 + m_2\overline{v}_2 = (m_1 + m_2)\overline{u}$, jossa $\overline{u}$ on maalivahdin ja kiekon yhteinen nopeus törmäyksen jälkeen. Sovitaan kiekon nopeuden suunta alussa positiiviseksi, ja koska maalivahti on alussa paikallaan, saadaan skalaariyhtälö $m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u$. Maalivahdin ja kiekon yhteinen nopeus törmäyksen jälkeen on

$$u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{0{,}170\ \text{kg} \cdot \frac{150}{3{,}6}\ \text{m/s}}{0{,}170\ \text{kg} + 95\ \text{kg}} \approx 0{,}074\ \text{m/s}.$$

Vastaus

Maalivahdin ja kiekon nopeus on 0,074 m/s kiekon nopeuden alkuperäiseen suuntaan.





Säilymislait törmäyksissä

Tutkimuksessa 2 tarkasteltiin vaunuradalla kahden vaunun täysin kimmotonta törmäystä. Mittaustuloksista saatiin seuraava taulukko:

	m_1 (kg)	v_1 (m/s)	m_2 (kg)	v_2 (m/s)	u (m/s)	Ennen törmäystä $\Sigma p = m_1v_1 + m_2v_2$ (kgm/s)	Törmäyksen jälkeen $\Sigma p = (m_1 + m_2)u$ (kgm/s)
Mittaus 1	0,250	0,000	0,250	0,216	0,105	0,0540	0,0525
Mittaus 2	0,300	0,000	0,350	0,256	0,137	0,0896	0,0891
Mittaus 3	0,150	0,000	0,200	0,308	0,173	0,0616	0,0606

Havaittiin, että liikemäärä säilyi törmäyksessä eli vaunujen liikemäärä $m_1\overline{v}_1 + m_2\overline{v}_2$ oli mittaustarkkuuden rajoissa sama kuin vaunujen yhteinen liikemäärä törmäyksen jälkeen eli $(m_1 + m_2)\overline{u}$.

	$E_{k,ennen}$ (J)	$E_{k,jälkeen}$ (J)
Mittaus 1	0,00583	0,00276
Mittaus 2	0,01147	0,00610
Mittaus 3	0,00949	0,00524

Kun tarkasteltiin liike-energiaa, huomattiin jokaisessa mittauksessa, että liike-energia ennen törmäystä, eli $E_{k,ennen} = \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}^2$, oli merkittävästi suurempi kuin liike-energia törmäyksen jälkeen eli $E_{k,jälkeen} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2$.

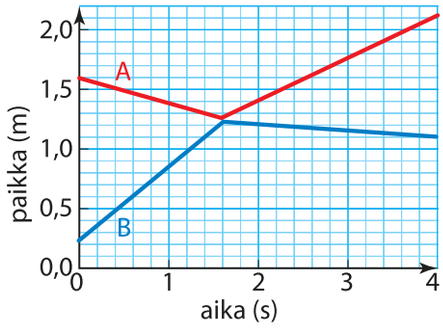
Melko suuri osa liike-energiasta muuntui toisiin muotoihin vaunujen tarttuessa toisiinsa (esimerkiksi jos tarttuminen perustui magneettisuuteen, energiaa sitoutui magneettikenttään). Liike-energia ei siis säily kimmottomassa törmäyksessä.

Säilymislait törmäyksissä

Kimmoisissa törmäyksissä
- kappaleiden kokonaisliikemäärä säilyy
- liike-energia säilyy
- mahdolliset muodonmuutokset palautuvat täysin.

Kimmottomissa törmäyksissä
- kappaleiden kokonaisliikemäärä säilyy
- liike-energia ei säily
- kappaleiden muodonmuutokset jäävät pysyviksi.

E Esimerkki 4



Oheinen kuva esittää kahden vaunuradalla liikkuvan vaunun A ja B paikkaa ajan funktiona ultraääniantureilla mitattuna. Selitä kuvattu tapahtuma. Tutki säilymislakien toteutumista tapahtumassa. Vaunun A massa on 650 g ja vaunun B 550 g.

Ratkaisu

$m_A = 0{,}650\,\text{g}, m_B = 0{,}550\,\text{kg}$

Kuva esittää vaunujen A ja B törmäystä, joka tapahtuu hetkellä 1,6 s. Vaunut liikkuvat ennen törmäystä toisiaan kohti ja erkanevat törmäyksen jälkeen toisistaan. Määritetään vaunujen nopeudet kuvaajasta fysikaalisina kulmakertoimina. Nopeudet ennen törmäystä ovat

$$v_A = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{0{,}32\,\text{m}}{1{,}6\,\text{s}} = -0{,}20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ ja}$$

$$v_B = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0{,}96\,\text{m}}{1{,}6\,\text{s}} = 0{,}60\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ja törmäyksen jälkeen $u_A = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0{,}82\,\text{m}}{2{,}4\,\text{s}} \approx 0{,}342\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ja

$$u_B = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{0{,}11\,\text{m}}{2{,}4\,\text{s}} \approx -0{,}0458\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Tutkitaan liikemäärän säilymistä. Vaunujen yhteinen liikemäärä ennen törmäystä oli

$$m_A v_A + m_B v_B = 0{,}650\,\text{kg} \cdot (-0{,}20\,\text{m/s}) + 0{,}550\,\text{kg} \cdot 0{,}60\,\text{m/s} \approx 0{,}20\,\frac{\text{kgm}}{\text{s}}$$

ja törmäyksen jälkeen

$$m_A u_A + m_B u_B = 0{,}650\,\text{kg} \cdot 0{,}342\,\text{m/s} + 0{,}550\,\text{kg} \cdot (-0{,}0458\,\text{m/s})$$
$$\approx 0{,}20\,\frac{\text{kgm}}{\text{s}}.$$

Mittaustarkkuuden rajoissa liikemäärä säilyi törmäyksessä.

Tutkitaan liike-energian säilymistä. Vaunujen liike-energia ennen törmäystä oli

$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0{,}650\,\text{kg} \cdot \left(-0{,}20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}550\,\text{kg} \cdot \left(0{,}60\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \approx 0{,}112\,\text{J}$$

ja törmäyksen jälkeen

$$\frac{1}{2} m_A u_A^2 + \frac{1}{2} m_B u_B^2$$

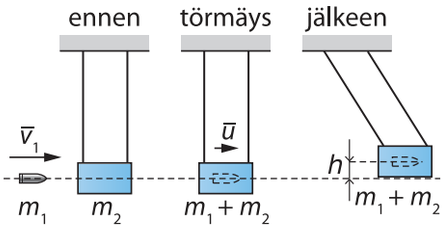
$$= \frac{1}{2} \cdot 0{,}650\,\text{kg} \cdot \left(0{,}342\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}550\,\text{kg} \cdot \left(-0{,}0458\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \approx 0{,}039\,\text{J}.$$

Liike-energia ei säilynyt törmäyksessä.

Vastaus

Liikemäärä säilyy, liike-energia ei.

E Esimerkki 5



Ballistisella heilurilla voidaan määrittää luodin nopeus.

Vaakasuoraan ammuttu luoti, jonka massa on 10,0 g, uppoaa langan varassa roikkuvaan puukappaleeseen. Puukappale, jonka massa on 3,5 kg, heilahtaa luoti sisällään 25 cm lähtötasoa korkeammalle. Laske luodin nopeus sen osuessa puukappaleeseen. Oletetaan ilmanvastus pieneksi.

Ratkaisu

$m_1 = 0{,}0100$ kg, $m_2 = 3{,}5$ kg, $h = 0{,}25$ m, $g = 9{,}81$ m/s^2, $v_2 = 0$ m/s

Törmäykseen voidaan soveltaa liikemäärän säilymislakia. Luoti ja puukappale liikkuvat törmäyksen jälkeen yhdessä, joten törmäys on kimmoton. Liikemäärän säilymislain mukaan on $m_1\overline{v}_1 + m_2\overline{v}_2 = (m_1 + m_2)\overline{u}$, kun $\overline{v}_1$ on luodin nopeus ennen osumaa ja $\overline{u}$ luodin ja puukappaleen yhteinen nopeus heti osuman jälkeen. Sovitaan luodin nopeuden suunta positiiviseksi. Koska puupala oli aluksi levossa eli $v_2 = 0$ m/s, liikemäärän säilymislaki skalaariyhtälönä on $m_1 v_1 = (m_1 + m_2)\,u$, joten luodin nopeus ennen törmäystä oli

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} u.$$

Huomaa, että nopeutta u ei vielä tiedetä.

Sovelletaan törmäyksen jälkeiseen puupalan kohoamiseen mekaanisen energian säilymislakia. Sovitaan luodin lentoradan taso alussa potentiaalienergian nollatasoksi. Luotia ja puukappaletta voidaan pitää törmäyksen jälkeen yhtenä kappaleena, jonka liike-energia muuntuu potentiaalienergiaksi, kun se kohoaa ylöspäin.

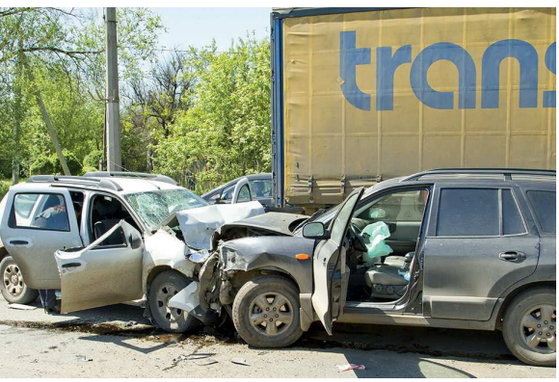
Mekaanisen energian säilymislain mukaan on

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 = (m_1 + m_2)gh,$$

joten luodin ja puukappaleen yhteinen nopeus heti törmäyksen jälkeen on $u = \sqrt{2gh}$. Luodin nopeus ennen törmäystä oli

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} u = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\sqrt{2gh}$$

$$= \frac{0{,}0100\text{ kg} + 3{,}5\text{ kg}}{0{,}0100\text{ kg}} \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}25\text{ m}} \approx 780\text{ m/s}.$$



Autojen nokkakolarissa kumpaankin osapuoleen kohdistuu Newtonin III lain mukaan yhtä suuret (vastakkaissuuntaiset) voimat. Miksi kevyemmän auton matkustajat ovat suuremmassa vaarassa kuin raskaamman auton matkustajat?

Vastaus

Luoti osui puukappaleeseen nopeudella 780 m/s.

TEHTÄVÄT

16-1. Mitkä seuraavista vuorovaikutuksista voidaan mallintaa parhaiten kimmoisina törmäyksinä, mitkä kimmottomina?

a) Jääkiekon osuminen kiekkokaukalon reunaan.
b) Kahden biljardipallon törmäys.
c) Kananmunan putoaminen lattialle.
d) Asteroidin iskeytyminen Maahan.
e) Kahden elektronin törmäys.

16-2. Katso palvelimelta video Liikemäärä törmäyksessä ja selvitä, säilyykö vaunujen törmäyksessä

a) liikemäärä
b) liike-energia.
c) Onko törmäys kimmoinen vai kimmoton?

16-3. Mies seisoo herkkäliikkeisen vaunun lavalla. Miehen massa on 75 kg ja vaunun massa 210 kg. Mies lähtee kävelemään vaunun päästä kohti toista päätä nopeudella 1,5 m/s.

a) Miten vaunu alkaa liikkua?
b) Mitä tapahtuu, kun mies lopettaa kävelyn saavuttuaan vaunun toiseen päähän?

16-4. Moottoriliikennetiellä tapahtuu peräänajo. Takaa tuleva auto, jonka massa on 940 kg ja nopeus 102 km/h, törmää edessään ajavaan autoon, jonka massa on 920 kg ja nopeus 85 km/h. Autot tarttuvat kiinni toisiinsa. Laske autojen nopeus törmäyksen jälkeen.

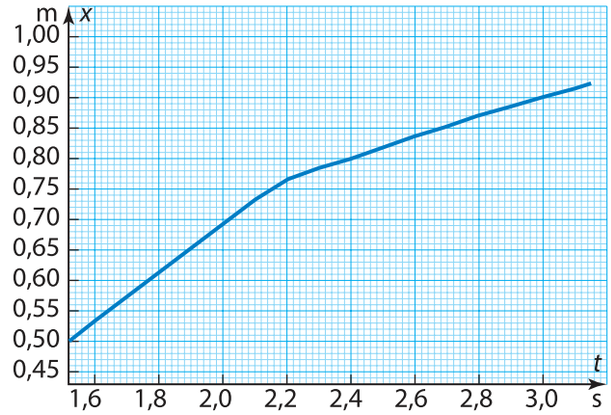
16-5. Tyynellä järvellä on laiturin päässä paikallaan oleva vene, jonka massa on 34 kg. Tyttö juoksee nopeudella 2,5 m/s pitkin laituria ja hyppää veneeseen. Tällöin vene saa nopeuden 1,5 m/s. Laske tytön massa.

16-6. Vaunuradalla oleva vaunu (massa 1,000 kg) törmää paikallaan olevaan toiseen vaunuun (massa 0,500 kg). Kopioi mittaustulokset palvelimelta.

a) Mitä tietoja saat mittausohjelmasta saaduista kuvaajista?
b) Selvitä, säilyykö törmäyksessä liikemäärä.

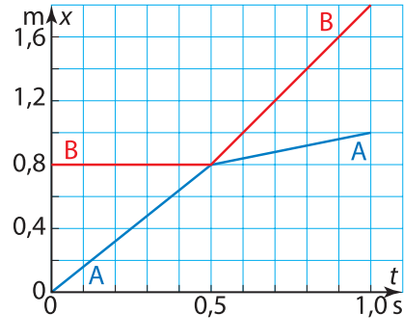
16-7. Kuvaaja esittää vaunun täysin kimmotonta törmäystä vaunuradalla paikallaan olevaan toiseen vaunuun. Mittaus on tehty tutkan avulla.

a) Mitä on tapahtunut hetkellä 2,2 s?
b) Määritä vaunujen nopeudet.



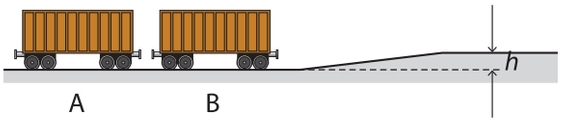
16-8. Kappaleet A ja B voivat liikkua vaunuradalla kitkattomasti samaa suoraa pitkin. Oheisessa kuviossa esitetään kummankin kappaleen paikka ajan funktiona.

a) Selosta tapahtuma, johon kuvio liittyy.
b) Määritä kappaleen A massa, kun B:n massa on 51 g.



16-9. Jousipyssyn nuoli, jonka massa oli 45 g, ammuttiin langan päässä olevaan pehmeään kappaleeseen. Nuoli jäi kappaleen sisään. Osuman seurauksena kappale nousi 80,0 mm. Kappaleen massa oli 950 g. Millä nopeudella nuoli osui kappaleeseen?

16-10. Vaunu A, jonka massa on 80 kg, törmää nopeudella 5,0 m/s paikallaan olevaan vaunuun B, jonka massa on 320 kg, ja kimpoaa takaisin nopeudella 1,45 m/s. Kuinka korkea kuvan mukainen ylätasanne voi olla, jotta vaunu B pääsisi sille? Vaunujen vierimisvastus on merkityksetön. [S2000, 11]



16-11. Kuorma-auto ja henkilöauto ajavat suoralla tiellä nokkakolarin. Autot tarttuvat toisiinsa ja kulkevat pienen matkan yhdessä. Ennen törmäystä kuorma-auton nopeus oli 72 km/h ja henkilöauton 108 km/h. Kuorma-auton massa on 21 500 kg ja henkilöauton 980 kg.

a) Mihin suuntaan ja millä nopeudella autot liikkuvat välittömästi törmäyksen jälkeen?

b) Oletetaan, että nokkakolariin kuluu aikaa 50 ms. Laske keskimääräiset voimat, jotka vaikuttavat autoihin törmäystilanteissa.

16-12. Taitoluistelun pariluistelupari on ohjelman alussa paikallaan jäällä. Mies, jonka massa on 75 kg, käyttää 41 J energiaa ja työntää parinsa, jonka massa on 53 kg, irti itsestään.

a) Mitkä nopeudet luistelijat saavat?

b) Kuinka pitkän matkan he liukuvat, jos liukukitkakerroin jäällä on 0,020?

16-13. Katso palvelimelta hidastettu video Liikemäärä, pallon pudotus. Pallon massa on 55 g ja pudotuskorkeus 1,0 m.

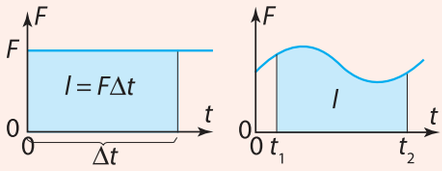
a) Onko pallon törmäys pöytään kimmoisa, kimmoton vai täysin kimmoton törmäys. Perustele vastauksesi.

b) Määritä pallon liikemäärän muutos ensimmäisessä törmäyksessä pöytään.

16-14. Kahden kiekon törmäystä tutkittiin lähes kitkattomalla alustalla. Kiekko, jonka massa oli 0,71 kg ja nopeus 1,6 m/s, törmäsi 90°:n kulmassa kiekkoon, jonka massa oli 0,52 kg ja nopeus 3,8 m/s. Laske yhteen tarttuneiden kiekkojen nopeus törmäyksen jälkeen.
Ohje: Liikemäärän x- ja y-suuntaiset komponentit säilyvät törmäyksessä molemmat erikseen.

16-15. Katso palvelimelta video Liikemäärä. Siinä pudotetaan yhdessä koripallo ja sen päälle asetettu jalkapallo. Miksi jalkapallo pomppaa hyvin korkealle?

Tiivistelmä



Impulssi

Voiman impulssi on

$\overline{I} = \overline{F}\Delta t$,

jossa $\overline{F}$ on voima ja Δt on voiman vaikutusaika.

Liikemäärä

- Kappaleen liikemäärä on
  $\overline{p} = m\overline{v}$,
  jossa m on kappaleen massa ja $\overline{v}$ nopeus.
- Impulssiperiaate: $\overline{I} = \Delta\overline{p}$ eli $\overline{F}\Delta t = \Delta\overline{p}$.

Liikemäärän säilyminen

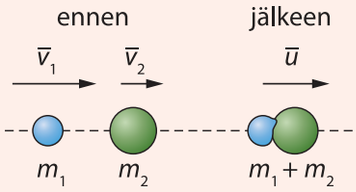
Kahden kappaleen vuorovaikutuksessa kappaleiden kokonaisliikemäärä ennen vuorovaikutusta on yhtä suuri kuin vuorovaikutuksen jälkeen:

$m_1\overline{v}_1 + m_2\overline{v}_2 = m_1\overline{u}_1 + m_2\overline{u}_2$.

Liikemäärän säilymislaki

Eristetyssä systeemissä kappaleiden kokonaisliikemäärä ei muutu,

$\sum \overline{p}_{\text{alussa}} = \sum \overline{p}_{\text{lopussa}}$.



Suora ja keskeinen kimmoton törmäys.

Törmäyslajit

- kimmoisa törmäys
- kimmoton törmäys
- täysin kimmoton törmäys.

Säilymislait törmäyksissä

Kimmoisissa törmäyksissä

- kappaleiden kokonaisliikemäärä säilyy
- liike-energia säilyy
- ei tapahdu pysyviä muodonmuutoksia.

Kimmottomissa törmäyksissä

- kappaleiden kokonaisliikemäärä säilyy
- liike-energia ei säily
- kappaleiden muodonmuutokset jäävät pysyviksi.

TESTAA, OSAATKO

Oikeita vaihtoehtoja voi olla yksi tai useampi

1. Seuraavista ovat vektorisuureita
a) nopeus
b) liikemäärä
c) impulssi.

2. Kun jarrutat pyörääsi, liikemääräsi
a) on nolla
b) pienenee
c) säilyy.

3. Impulssi on
a) voima kertaa voiman vaikutusaika
b) liikemäärän muutos
c) liikemäärän toinen nimi.

4. Pieni ja iso pallo törmäävät, jolloin molempiin niistä kohdistuu voima. Silloin
a) voimien impulssit ovat yhtä suuret
b) pieneen palloon kohdistuvan voiman impulssi on suurempi kuin suureen palloon kohdistuvan voima impulssi
c) impulssit ovat vastakkaisuuntaiset.

5. Biljardipallo osuu toiseen biljardipalloon. Törmäyksessä
a) palloihin kohdistuvat yhtä suuret voimat
b) toinen palloista voi jäädä paikalleen
c) pallojen liikemäärät muuttuvat yhtä paljon.

6. Koska liikemäärä säilyy,
a) myös liike-energia säilyy
b) kappaleiden nopeudet eivät muutu
c) systeemin liikemäärä ennen ja jälkeen törmäyksen on sama.

7. Täysin kimmottomassa törmäyksessä
a) törmäävät kappaleet tarttuvat toisiinsa kiinni
b) osa kappaleiden liike-energiasta muuntuu muihin energiamuotoihin
c) kokonaisenergia säilyy.

8. Kokonaisliikemäärä säilyy
a) kimmoisissa törmäyksissä
b) kimmottomissa törmäyksissä
c) vinoissa törmäyksissä.

9. Liike-energia säilyy
a) kimmoisissa törmäyksissä
b) kimmottomissa törmäyksissä
c) kaikissa törmäyksissä.

10. Henkilöautot A (800 kg, 70 km/h) ja B (700 kg, 80 km/h) ajavat nokkakolarin ja tarttuvat toisiinsa. Törmäyksen jälkeen autot
a) liikkuvat auton A menosuuntaan
b) jäävät paikoilleen
c) liikkuvat auton B menosuuntaan.

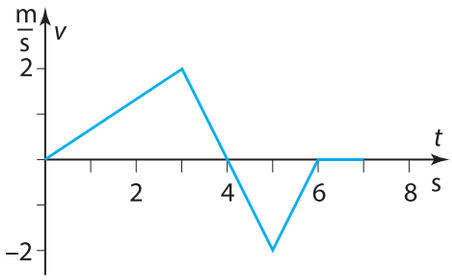
KERTAUSTEHTÄVÄT

Suoraviivainen liike

1. Lataa palvelimelta video Veturi2. Määritä veturin nopeus.

2. Autoa jarrutetaan 15 sekunnin ajan, jolloin sen nopeus pienenee arvosta 72 km/h arvoon 18 km/h. Kun jarrutus tapahtuu tasaisesti, auton kolmannen sekunnin aikana kulkema matka on
a) 70 m **b)** 60 m **c)** 18 m **d)** 56 m.

3. Kuvaaja esittää kappaleen nopeutta 7,0 sekunnin aikana.



a) Kuinka pitkän matkan kappale on kulkenut kyseisenä aikana?
b) Kuinka kaukana kappale on lopuksi lähtöpaikasta?
c) Mikä on kappaleen keskinopeus?

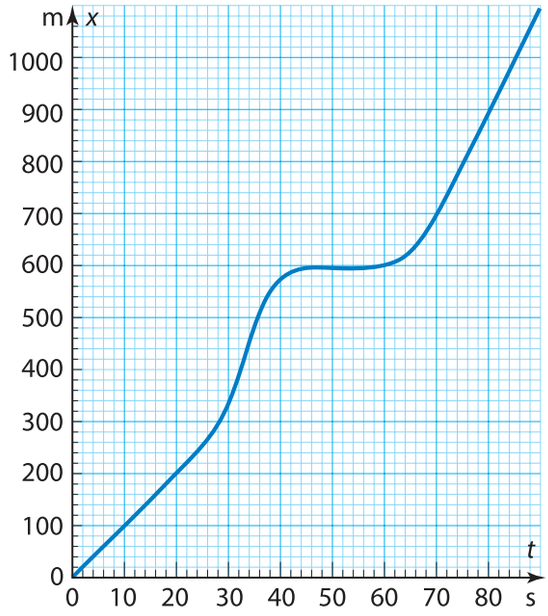
4. Auton nopeus kasvaa tasaisesti kiihtyvyydellä 3,0 m/s^2. Auto lähtee levosta. Laske auton
a) loppunopeus 8,0 sekunnin kuluttua
b) keskinopeus 8,0 sekunnin aikana
c) 8,0 sekunnissa kulkema matka.

5. Radio-ohjattavan leikkiauton suoraviivaista liikettä kuvattiin videokameralla. Kopioi palvelimelta mittaustulokset. Taulukossa on auton paikka ajan funktiona.
a) Piirrä auton paikan kuvaaja $x(t)$.
b) Määritä auton keskinopeus aikavälillä 1,7…4,2 s.
c) Kuinka kauan auto liikkuu? [K2014/2]

6. Lataa palvelimelta video Kappale kaltevalla tasolla.
a) Esitä kappaleen paikan kuvaaja.
b) Esitä kappaleen nopeuden kuvaaja.
c) Onko kappaleen liike tasaisesti kiihtyvää?

7. Liikennetekniikan laboratorio suunnittelee ilmatyynyn tutkimista autossa, joka törmää kohtisuoraan joustamattomaan seinämään. Auton ilmatyyny on ohjauspyörän ja ohjaajana olevan nuken välissä. Auton nopeus ennen törmäystä on 82 km/h, ja auton etuosa lyhenee törmäyksessä 65 cm. Kuinka pitkän matkan auton ilmatyynyn on joustettava, jotta nuken kiihtyvyys ei ylitä arvoa 250 m/s^2?

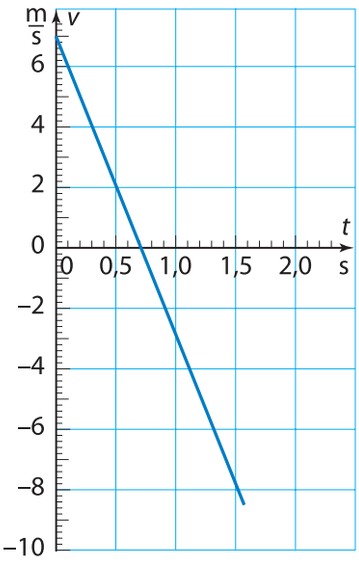
8. Testiajossa oleva auto liikkuu moottoritien suoralla osalla liikenneruuhkassa. Alla olevassa kuviossa on esitetty auton paikka ajan funktiona eräänä 1,5 minuutin ajanjaksona.



a) Kuvaile auton liikettä tällä aikavälillä.
b) Määritä kuvaajasta auton keskinopeus aikavälillä 20…80 s.
c) Määritä auton nopeuden suurin ja pienin arvo tarkasteluaikana.

9. Kivi heitetään 15 m korkeasta tornista vaakasuoraan alkunopeudella 19 m/s.
a) Kuinka kaukana tornin juuresta kivi kohtaa vaakasuoran maanpinnan?
b) Laske kiven nopeuden suuruus sen osuessa maahan.

10. Kuvaaja esittää erään kappaleen liikettä. Vastaa kuvaajan perusteella.



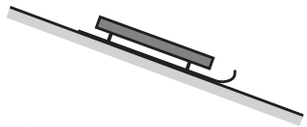
a) Mikä on kappaleen alkunopeus?
b) Kuinka pitkän matkan kappale on kulkenut 0,70 s aikana?
c) Mitä kappaleen liikkeelle tapahtuu hetkellä 0,70 s?
d) Mihin tavalliseen liikkeeseen kuvaaja voisi liittyä?

Voima

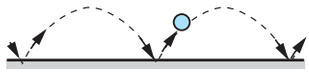
11. **a)** Mainitse kolme esimerkkiä kosketusvuorovaikutuksesta.
b) Mainitse kolme esimerkkiä etävuorovaikutuksesta.
c) Piirrä kursivoidun kappaleen voimakuvio. Kappaleisiin vaikuttava kokonaisvoima on nolla.
i) Pöydällä oleva *kirja*.
ii) Ilmassa vaakasuoraan vasemmalle lentävä *pallo*.
d) Mitkä ovat c-kohdassa kappaleisiin vaikuttavien voimien vastavoimat.

12. Oheiset kuviot esittävät **a)** jyrkkää mäkeä alas liukuvaa kelkkaa **b)** pomppivaa palloa. Oletetaan kumpaankin kappaleeseen kohdistuva ilmanvastus pieneksi.

a)



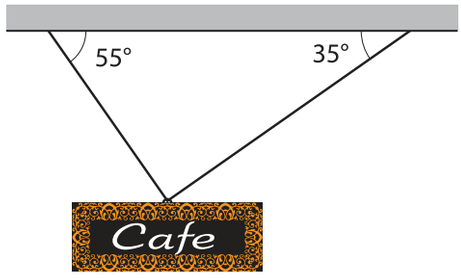
b)



Jäljennä kuviot ja piirrä niihin kappaleiden nopeus- ja kiihtyvyysvektorit sekä kappaleisiin vaikuttava kokonaisvoima. Selitä myös (uuden voimakuvion avulla), mistä osavoimista kokonaisvoima muodostuu.

13. Voimien suuruudet ovat 12 N, 15 N, 9,0 N ja 6,0 N. Kaikkien voimien vaikutuspisteet ovat origossa. Voimat muodostavat mainitussa järjestyksessä positiivisen x-akselin kanssa vastapäivään kuljettaessa kulmat 45°, 120°, 200° ja 310°. Määritä voimien resultantin suuruus ja suunta.

14. Kahvilan mainoskyltti on kiinnitetty kuvan mukaisesti kahden narun varaan.



Kyltin massa on 7,3 kg. Laske narujen jännitysvoimat.

15. Rakettia ylöspäin työntävän voiman suuruus on 6450 N. Väliaineen vastus on 470 N.
Raketin massa on 450 kg.
a) Piirrä rakettiin vaikuttavat voimat.
b) Laske raketin saama kiihtyvyys.
c) Kuinka korkealle raketti nousee 3,0 sekunnissa?
Massan muutoksia ei oteta huomioon.

16. Punnus, jonka massa on 1,6 kg, riippuu hissin kattoon kiinnitetyssä jousivaa'assa. Mitä lukemaa jousivaaka näyttää, kun hissi
a) liikkuu nopeudella 1,3 m/s ylöspäin
b) lähtee kiihtyvyydellä 1,7 m/s^2 alaspäin
c) lähtee kiihtyvyydellä 1,7 m/s^2 ylöspäin?

17. Henkilöauto vetää peräkärryä vaakasuoralla tiellä. Auton massa on 1450 kg ja perävaunun 370 kg. Eräällä hetkellä autoa kiihdyttävän kitkavoiman suuruus on 5,7 kN ja autoon kohdistuva liikevastusvoima (ilmanvastus + vierimisvastus) on 1,7 kN. Tällöin yhdistelmän kiihtyvyys on 1,7 m/s^2.
a) Laske perävaunuun kohdistuvan liikevastusvoiman suuruus.
b) Laske auton vetokoukkuun kohdistuva voiman suuruus.

18. Kappaleeseen, jonka massa on 5,0 kg, vaikuttaa vaakasuoran pinnan suuntainen vakiovoima. Kitkakerroin on 0,30.
a) Kuinka suuri voima pitää kappaleen liikkeessä?
b) Miten kappale liikkuu, kun siihen vaikuttavan pinnan suuntaisen voiman suuruus on 24 N?

19. **a)** 1,0 kg:n kappaletta vedetään vaakasuoralla pinnalla 4,0 N:n voimalla. Kappale saa tällöin kiihtyvyyden 2,0 m/s^2. Laske kitkakerroin. Ilmanvastus oletetaan vähäiseksi.
b) Kuinka suurella voimalla kappaletta pitäisi vetää, että sen liike olisi tasaista? Selitä energian muuntuminen kappaletta vedettäessä.

20. Rekeen vaikuttaa vetovoima, jonka suuruus on 85 N. Voima muodostaa 31°:n kulman vaakatason kanssa. Reen kokonaismassa on 78 kg. Reki liikkuu vakionopeudella. Määritä lumen ja reen jalasten välinen kitkakerroin.

21. **a)** Laske kiihtyvyys, jolla hiihtäjä, jonka massa on 62 kg, liukuu pitkin rinnettä. Rinteen kaltevuuskulma on 25°, ja kitkakerroin lumen ja suksen pohjan välillä on 0,12.
b) Kuinka kauan hiihtäjältä kuluu aikaa 25 metrin liukumiseen, kun hän lähtee levosta liikkeelle?
c) Vaikuttaako hiihtäjän massa kiihtyvyyden suuruuteen?

22. Alumiinipalaan kohdistuvaksi painoksi saatiin ilmassa 1,02 N. Punnitustulos vedessä oli 0,63 N ja bensiinissä 0,75 N. Laske bensiinin tiheys.

23. Maailmanympärilennolla oleva kuumailmapallo, jonka kokonaismassa on 1210 kg, laskeutuu kiihtyvyydellä 0,2 m/s^2. Kuinka paljon ennätystä tavoittelevien pallolentäjien on vähennettävä kuormaa, jotta pallo nousisi kiihtyvyydellä 0,03 m/s^2?

24. Samasta aineesta valmistettuja erilaisia esineitä punnittiin sekä ilmassa että veteen upotettuina. Mittauksissa saatiin seuraavat tulokset:

esine	1	2	3	4	5	6
paino ilmassa (N)	0,12	0,26	0,39	0,53	0,69	0,79
paino vedessä (N)	0,11	0,23	0,34	0,46	0,59	0,69

Esitä graafisesti esineiden tilavuus massan funktiona ja määritä aineen tiheys.

25. Henkilöauton pyörän kiinnityspultit on kiristetty voimalla, jonka momentti on 110 Nm.

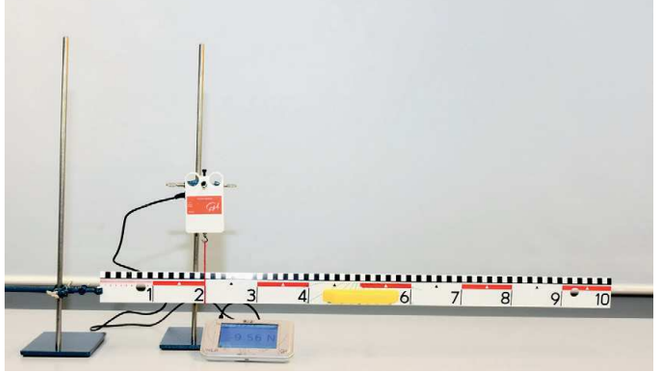
a) Kuinka suuri voima vähintään tarvitaan avaamaan pultti kuvassa olevalla avaajalla, kun voiman vääntövarren pituus on 0,45 m.

b) Arvioi, millaiset mahdollisuudet pulttien avaamiseen on henkilöllä, jonka massa on 66 kg.

c) Miksi pulttien avaamiseen tarvitaan yleensä suurempi momentti kuin kiristämisessä käytetty momentti?

26. Leenan massa on 30 kg ja isän 80 kg. Leena istuu 6,0 m pitkän keinulaudan päässä. Lauta on tuettu keskipisteestään. Kuinka kauas Leenasta isän pitäisi laudalla asettua, jotta lauta pysyisi vaakasuorassa asennossa?

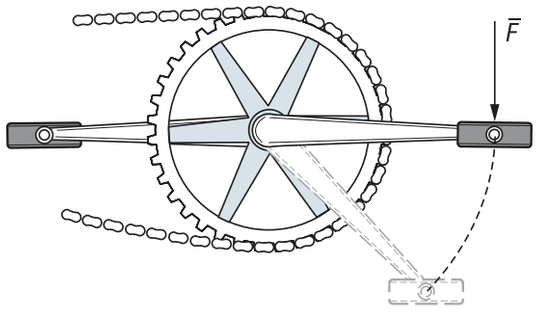
27. Katso palvelimelta video Voiman momentti 2. Määritä videon perusteella tasapainottavan voiman momentti. Kiertoakseli on kohdassa 0,00 m. Kuvassa on $F_1 = 9{,}56$ N ja $r_1 = 0{,}200$ m.



28. Polkupyörän polkimen etäisyys keskiön keskipisteestä on 17 cm. Poljinta painetaan 35 N:n voimalla suoraan alaspäin. Laske tämän voiman momentti, kun

a) poljin on vaakatasossa

b) polkimen asento on 45° vaakatasoon nähden?



29. Pasi työntää tasapaksua puupölkkyä rakennustyömaalla portaalle, jonka korkeus on 7,7 cm. Laske pienin vaakasuora voima, jolla hänen täytyy työntää pölkyn painopisteen korkeudelta, jotta pölkky nousisi portaalle. Pölkyn halkaisija on 66 cm ja massa 144 kg. Oletetaan, että pölkky ei pääse liukumaan.

30. **a)** Kartiomainen karttakeppi katkeaa painopisteensä kohdalta. Mitä voit sanoa osien massoista?

b) Selvitä, kuinka määrittäisit kappaleen painopisteen paikan luotilangan (lanka, jonka toisessa päässä on paino) avulla.

31. Suoran ympyrälieriön muotoinen öljysäiliö on täynnä öljyä. Säiliö seisoo pohjallaan kaltevalla tasolla. Säiliön pohjan halkaisija on 0,40 m, ja säiliön korkeus on 1,3 m. Kuinka suuri voi enintään olla sen kaltevan tason kaltevuuskulma, jolle asetettuna säiliö pysyy pystyssä?

32. Ovatko seuraavat väitteet tosia? Perustele vastauksesi.

a) Kappale on tasapainossa, jos siihen vaikuttava kokonaisvoima on nolla.

b) Kappale ei pyöri, jos siihen vaikuttavien momenttien summa on nolla.

33. Katso palvelimelta video Jäykän kappaleen tasapaino. Tutki laskemalla, ovatko jäykän kappaleen tasapainoehdot voimassa. Tangossa on mustat merkit 5,0 cm:n välein. Tangon massa on 0,657 kg ja pituus 0,750 m.

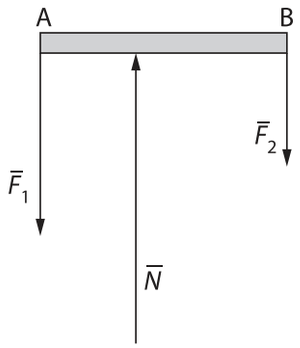
34. Vaakasuoran sauvan AB pituus on 2,0 m ja sen päihin kohdistuvat alaspäin suuntautuvat voimat ovat suuruudeltaan 55 N ja 35 N. Sauva on tasapainossa yhden tuen varassa.

a) Määritä mainittujen voimien momentti pisteiden A ja B kautta kulkevien akselien suhteen.

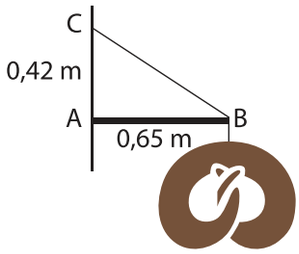
b) Määritä sauvaan kohdistuva tukivoima.

c) Mihin kohtaan sauvaa tuki on asetettava?

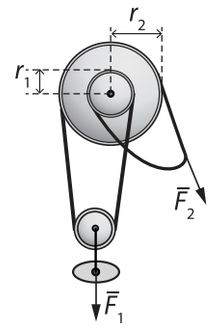
Sauvaan kohdistuvaa painoa ei oteta huomioon.



35. Leipuriliikkeen mainoskyltti, jonka massa on 5,2 kg, on ripustettu oheisen kuvan mukaisesti seinälle. Kuinka suuri on kevyeen tukivaijeriin BC kohdistuva jännitysvoima? Kuinka suuren ja minkä suuntaisen voiman tukitanko AB kohdistaa seinään? Tukitangon AB massa on 1,2 kg. [S2008, 6]



36. a) Differentiaalitaljassa ylemmät ketjupyörät on lukittu toisiinsa ja alempi pyörä on liikkuva. Ketjupyörissä liikkuva päättymätön ketju ei pääse luistamaan.



Johda differentiaalitaljan tasapainoehto $F_2 = \frac{r_2 - r_1}{2r_2} F_1$ ylempiin ketjupyöriin kohdistuvien voimien momenttien avulla. Alempaan pyörään kohdistuvaa painoa ei oteta huomioon.

b) Kuinka suuri taljalla nostettavan kuorman paino $\overline{F}_1$ voi korkeintaan olla, kun kuormaa nostettaessa ketjua vedetään 850 N:n voimalla ja pyörien säteet ovat 15 cm ja 22 cm?

Energia

37. Laatikkoa, jonka massa on 11 kg, vedetään vakiovoimalla niin, että sen kiihtyvyys on 2,0 m/s^2. Alustan ja laatikon välinen kitka on merkityksettömän pieni.

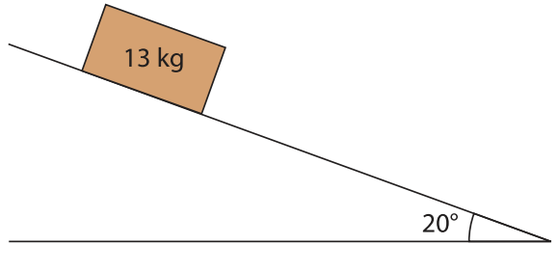
a) Laske vetävän voiman suuruus.

b) Kuinka suuren työn voima tekee, kun kappale liikkuu 5,0 m?

38. Laatikko on tasolla, joka muodostaa 20,0° kulman vaakatason kanssa. Laatikon massa on 13 kg ja laatikon ja tason välinen liukukitkakerroin on 0,22. Laatikko liikkuu alaspäin 2,0 m matkan. Laske laatikkoon kohdistuvan

a) gravitaatiovoiman tekemä työ

b) kokonaisvoiman tekemä työ.



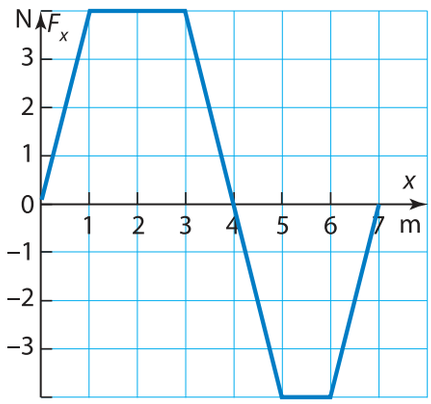
39. Kappale, jonka massa on 4,0 kg, on aluksi levossa kohdassa $x = 0{,}0$ m. Kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima on esitetty kuvassa.

a) Määritä voiman tekemä työ, kun kappale liikkuu kohdasta $x = 0{,}0$ m kohtaan $x = 3{,}0$ m

b) Määritä voiman tekemä työ, kun kappale liikkuu kohdasta $x = 3{,}0$ m kohtaan $x = 6{,}0$ m.

c) Laske kappaleen nopeus ja liike-energia kohdassa $x = 3{,}0$ m.

d) Laske kappaleen nopeus ja liike-energia kohdassa $x = 6{,}0$ m.



40. Koira vetää kelkassa olevan lapsen mäen juurelta 8,0 m:n korkuisen mäen laelle. Lapsen ja kelkan yhteinen massa on 18 kg, ja kelkan ja lumen välinen liikekitkakerroin on 0,20.

a) Kuinka suuren työn koira tekee vetäessään kelkan suoraan rinnettä ylös, kun rinteen kaltevuus vaakatasoon nähden on 19°?

b) Perustele fysikaalisesti, miksi vetotyö on pienin, kun koira vetää kelkan mäen päälle jyrkintä reittiä?

41. Kahden kappaleen massat ovat 2,0 kg ja 6,0 kg, ja kappaleet liikkuvat samalla nopeudella. Kevyemmän kappaleen liike-energia on 4,0 J. Mikä on raskaamman kappaleen liike-energia?

a) 12 J **b)** 18 J **c)** 24 J.

42. Kun aluksi levossa olevaan kappaleeseen vaikuttava kokonaisvoima tekee työn $W = 23$ J, kappale saa nopeuden 3,4 m/s. Kuinka suuren nopeuden kappale saavuttaa, jos kokonaisvoiman tekemä työ on kaksinkertainen eli $W = 46$ J?

43. Ihminen kävelee nopeudella 2,0 m/s ja juoksee nopeudella 6,0 m/s. Onko juoksevan ihmisen liike-energia kolminkertainen, kuusinkertainen vai yhdeksänkertainen kävelevän ihmisen liike-energiaan verrattuna?

44. Gepardi on nopein kissaeläin. Sen massa on noin 65 kg, ja huippunopeudella juostessaan sen liike-energia on noin 42 kJ. Kuinka nopeasti gepardi voi juosta 100 m matkan?

45. Pulkan tullessa mäen alla olevalle tasaiselle, sen nopeus on 3,0 m/s. Pulkkaan vaikuttaa 32 N:n suuruinen vastusvoima. Kuinka pitkän matkan pulkka liukuu ennen pysähtymistään, jos pulkan ja siinä istuvan tytön massa on 48 kg?

a) 3,0 m, **b)** 6,8 m, **c)** 32 m.

46. Auto lähtee liikkeelle liikennevaloista ja saavuttaa 150 m:n matkalla tasaisesti kiihdyttäen nopeuden 40 km/h. Sen jälkeen se jatkaa seuraavat 200 m tällä nopeudella ja pienentää sitten nopeuttaan tasaisesti 100 m:n matkalla nopeuteen 20 km/h. Auton massa on 1150 kg.

a) Laske autoon liikkeen eri vaiheissa vaikuttava kokonaisvoima.

b) Laske kokonaisvoiman tekemä työ.

47. Lataa palvelimelta video Pallon pudotus – lyhyt. Pallon pudotuskorkeus on 4,0 m.

a) Mistä voit päätellä, että mekaaninen energia ei säily pallon pudotuksessa?

b) Määritä mittausohjelman avulla pallon nopeus sen osuessa terassin lattiaan.

c) Määritä ilmanvastuksen tekemä työ.

48. **a)** Autoilija huomaa vaakasuoralla tiellä myrskyn kaataman puun. Auton nopeus jarrutuksen alkaessa on 79 km/h. Auto pysähtyy 96 m:n matkalla juuri ennen kaatunutta puuta. Laske, kuinka suuri keskimääräinen voima autoon kohdistuu jarrutuksen aikana. Auton kokonaismassa on 1200 kg.

b) Samaa puuta lähestyvän seuraavan auton nopeus on 104 km/h. Jarrutus alkaa samassa paikassa kuin ensimmäisen auton jarrutus alkoi. Kuinka suurella nopeudella nopeampi auto törmää puuhun? Oletetaan, että autojen massat ja keskimääräiset liikettä vastustavat voimat ovat yhtä suuria.

49. Nopeudella 60 km/h liikkuvan auton jarrutusmatka autoa pysäytettäessä on 20 m. Kuinka pitkä jarrutusmatka on, kun auton nopeus on kaksinkertainen eli 120 km/h? Oleta, että auton jarrujen autoa jarruttava voima on molemmissa tapauksissa sama.

50. Korjausmies korjaa Puijon tornia isolla jakoavaimella. Työn päätyttyä hän toimittaa jakoavaimen maanpinnalle, jonne on matkaa 75 m. Laske seuraavissa tilanteissa jakoavaimen vauhti sen osuessa maahan. Ilmanvastus voidaan olettaa pieneksi.

a) Korjausmies päästää jakoavaimen putoamaan kädestään.

b) Korjausmies viskaa jakoavaimen nopeudella 2,4 m/s suoraan alaspäin.

c) Korjausmies heittää jakoavaimen nopeudella 5,6 m/s yläviistoon.

Törmäys

51. Kahden erimassaisen vaunun kimmoisia törmäyksiä tutkittiin ilmatyynyradalla. Vaunun 1 massa ja nopeus ovat nelinkertaiset vaunun 2 nopeuteen ja massaan verrattuina.

a) Kuinka moninkertainen on törmäyksen aikana vaunuun 2 kohdistuva voima verrattuna vaunuun 1 kohdistuvaan voimaan?

b) Piirrä samaan koordinaatistoon periaatekuvio molempiin vaunuihin kohdistuvista voimista.

c) Kuinka moninkertainen on törmäyksen aikana vaunuun 2 kohdistuvan voiman impulssi verrattuna vaunuun 1 kohdistuvan voiman impulssiin?

d) Kuinka suuri ja minkä suuntainen liikemäärän kokonaismuutos on törmäyksessä?

52. Avaruusalus etenee suoraviivaisesti vauhdilla 2100 km/h (Auringon suhteen). Aluksesta irrotetaan pieni luotain, jonka massa on 15 % aluksen alkuperäisestä massasta. Tämän jälkeen sekä luotain että alus etenevät samaan alkuperäiseen suuntaansa. Laske aluksen uusi vauhti (Auringon suhteen), kun vauhdin tiedetään olevan luotaimen suhteen 500 km/h.

53. Avaruusalukseen vaikuttaa 1,0 kN:n voima 60,0 s:n ajan. Aluksen massa on 10 t. Kuinka paljon aluksen nopeus muuttuu?

54. Harrasteraketin testauksissa määritettiin rakettimoottorin impulssia. Rakettimoottoria käytettiin 2,1 s:n ajan ja samalla mitattiin raketiin kohdistunut voima. Kopioi mittaustulokset palvelimelta.

a) Määritä mittausohjelman avulla rakettimoottorin aiheuttaman voiman impulssi.

b) Raketin massa oli 3,4 kg. Kuinka suuren nopeuden rakettimoottori antaa raketille?

55. Testauspöydällä olevaan puukappaleeseen ammutaan luoti, joka jää puukappaleen sisään. Osuman seurauksena puukappale liukuu 2,0 cm. Puukappaleen massa on 250 g ja luodin 2,0 g. Testauspöydän pinnan ja puukappaleen välinen kitkakerroin on 0,16. Laske luodin nopeus sen törmätessä puukappaleeseen.

56. Matti ja Maija istuvat vedessä paikallaan olevan kajakin vastakkaisissa päissä. Matin massa on 68 kg, Maijan massa 51 kg ja kajakin massa 28 kg. Maija heittää Matille retkirepun, jonka massa on 14 kg. Reppu lentää nopeudella 3,1 m/s. Oletetaan, että kajakki liikkuu vedessä kitkattomasti.

a) Miksi kajakki lähtee liikkeelle, kun Maija heittää repun?

b) Mikä on kajakin nopeus repun ollessa ilmassa?

c) Mikä on kajakin nopeus Matin otettua repun kiinni?

57. Kaksi autoa törmäsi toisiinsa liukkaalla kelillä risteyksessä. Auto, jonka massa oli 1700 kg ja nopeus 33 km/h, törmäsi kohtisuorasti toiseen autoon, jonka massa oli 2500 kg ja nopeus 54 km/h. Laske yhteen tarttuneiden autojen nopeus heti törmäyksen jälkeen.
Ohje: Jaa autojen yhteinen nopeus törmäyksen jälkeen x- ja y-suuntaisiin komponentteihin.

58. Vastakkaisiin suuntiin liikkuvat raskas auto ja kevyt auto törmäävät toisiinsa.

a) Miksi kevyessä autossa olevat matkustajat ovat suuremmassa vaarassa kuin raskaassa autossa olevat?

b) Tarkastele turvavöiden ja turvatyynyjen merkitystä törmäyksessä. Perustele vastauksesi fysiikan käsitteiden ja suureyhtälöiden avulla. Käytä tarvittaessa numeroarvoja.
[Preliminäärikoe (MFKA) 2001, 3]

VANHOJA YLIOPPILASTEHTÄVIÄ

S2016/2 Taulukossa on annettu pomppivan pallon etäisyys lattiasta ajan funktiona.

t (s)	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70
h (m)	1,16	0,93	0,62	0,20	0,17	0,48	0,69	0,80

t (s)	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40
h (m)	0,82	0,74	0,56	0,29	0,01	0,28	0,45

a) Piirrä etäisyyden kuvaaja ajan funktiona. (3 p.)
b) Merkitse kuvaajaan kohdat, joissa pallon nopeus on nolla. (2 p.)
c) Kuinka korkealle pallo nousee osuttuaan ensimmäisen kerran lattiaan? (1 p.)

K2016/2 Levosta lähtevä rautakuula pudotetaan eri korkeuksilta. Kuulan putoamisaika mitataan. Putoamiskorkeudet ja -ajat on annettu taulukossa.

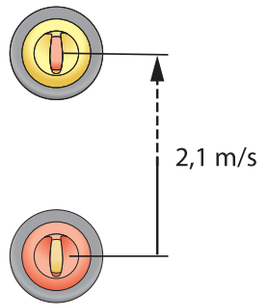
h (m)	1,00	5,00	10,0	15,0	20,0
t (s)	0,47	1,00	1,41	1,76	2,04

a) Piirrä mittaustuloksista kuvaaja putoamiskorkeudesta putoamisajan neliön funktiona t^2,h-koordinaatistoon. (4 p.)
b) Määritä kuvaajan avulla kuulan kiihtyvyys. (2 p.)

S2014/5 Näsinneulan näköalatornin hississä on kuvan esittämä nopeusmittari.

Hissin lähtiessä ylöspäin nopeus kasvaa mittarin mukaan tasaisesti 11 sekunnissa nollasta huippunopeuteen 6,0 m/s. Fysiikan opiskelija haluaa tarkistaa, näyttääkö hissin nopeusmittari oikein. Hissin ollessa paikoillaan opiskelija ripustaa reppunsa tarkan vaa'an koukkuun, jolloin vaaka näyttää lukemaa 5,03 kg. Kun hissi lähtee ylöspäin, vaa'an lukema on 5,31 kg.
a) Piirrä voimakuvio, josta ilmenevät reppuun vaikuttavat voimat heti hissin liikkeelle lähdön jälkeen. Kiinnitä huomiota voimien keskinäisiin suhteisiin. (1 p.)
b) Kuinka suuri on hissin huippunopeus opiskelijan mittauksen perusteella? (3 p.)
c) Mitä vaaka näyttää hissin liikkuessa tasaisella nopeudella ylöspäin? Perustele. (2 p.)

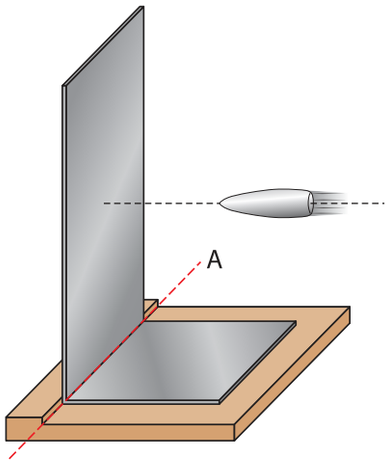
K2016/5 (osa). a) Curling-pelissä punainen ja keltainen joukkue laittavat vuorotellen kiven (massa 20,0 kg) liukumaan tasaista jäärataa pitkin kohti maalialuetta.



Punaisen joukkueen kivi liukuu nopeudella 2,1 m/s jäätä pitkin. Kivi törmää kimmoisasti vastustajan samanlaiseen, levossa olevaan keltaiseen kiveen kuvan mukaisesti. Mihin suuntaan ja millä nopeudella kivet liikkuvat törmäyksen jälkeen? Perustele. (4 p.)

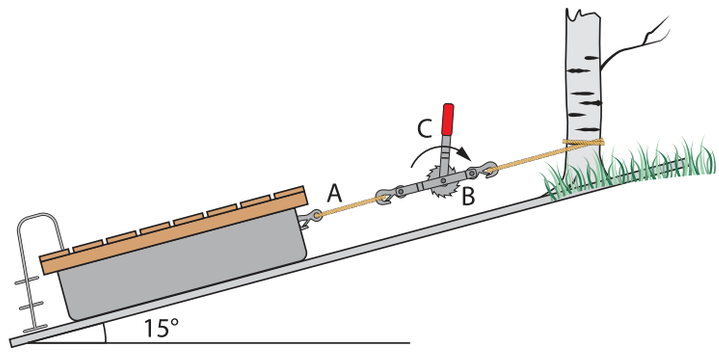
S2015/10 (osa) Suorakulmainen, L-kirjaimen muotoinen kappale on valmistettu ohuesta, lujasta teräslevystä. Kappale on kuvan mukaisesti vaakasuoralla alustalla. Alustassa on matala koroke, joka estää kappaletta liukumasta. Kappaleen massa on 5,5 kg, pystysuoran osan korkeus on 62 cm ja vaakasuoran osan pituus on 31 cm. Levyn hitausmomentti akselin A suhteen on 0,529 kgm^2. Sylinterin muotoinen luoti (massa 10,2 g, pituus 16,7 mm ja nopeus 235 m/s) osuu kuvan esittämällä tavalla kappaleen pystyosan keskipisteeseen. Törmäys on kimmoton. Luoti hidastuu tasaisesti ja litistyy ohueksi kiekoksi, joka ei tartu kappaleeseen.

a) Oletetaan, että kappaleen mahdollinen liike törmäyksen aikana on hyvin vähäinen. Kuinka suuren voiman luoti kohdistaa kappaleeseen?



K2011/5. Urheiluharjoituksissa kilpaillaan siitä, kuka liu'uttaa voimistelumattoa pisimmälle hyppäämällä vauhdilla sen päälle. Poika, jonka massa on 29 kg, hyppää patjalle vaakasuoralla nopeudella 5,0 m/s, jolloin patja ja poika liukuvat yhdessä 1,3 m. Laske patjan ja lattian liukukitkakerroin, kun patjan massa on 21 kg.

K2009/6 Ponttonilaituria hinataan maihin pitkin nostoluiskaa yksinkertaisen vaijerivinssin avulla. Vinssi on ankkuroitu puuhun kuvan mukaisesti. Kun kammesta C vedetään, hinausvaijeri A kiertyy rummun B ympärille. Kuinka suuri kampeen kohdistuva voima tarvitaan ponttonilaiturin (m = 480 kg) liikkeelle saamiseksi, jos rummun säde on 36 mm ja käsiotteen etäisyys rummun akselista 43 cm? Luiskan ja laiturin pohjan välinen lepokitkakerroin on 0,15.



VASTAUKSIA

1-1. **a)** 10…20 s **b)** 30…40 s **c)** 0…10 s, 20…30 s ja 40…50 s **d)** 30…40 s
1-2. **a)** 2,0 m **b)** 2,0 m/s **c)** –6,0 m **d)** 6,0 m/s, taaksepäin **e)** –4,0 m
1-3. **b)** 12 m **c)** 2,0 m/s ja 0,86 m/s, taaksepäin
1-4. **a)** 6,6 cm/s
1-5. $2{,}8 \cdot 10^8$ m/s
1-7. 11 m
1-8. **b)** 1,3 m/s
1-9. 8,3 m
1-10. 7,0 m/s
1-11. **b)** (180 s, 250 m)
1-12. 2,2 cm/s
1-14. **a)** $x = 1{,}5\,\text{m} + 2{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$ **b)** 5,0 m

2-1. **b)** 2,0 m/s^2, 0 m/s^2, 3,0 m/s^2, suunta nopeuden suunnalle vastakkainen **c)** 110 m
2-2. **b)** 88 km/h **c)** 73 m
2-3. a ja c
2-4. **a)** 40 m/s **b)** 20 m/s **c)** 200 m
2-5. **b)** on
2-6. **a)** 3,3 m/s^2 **b)** 60 m
2-7. **a)** 3,1 m/s^2, suunta nopeuden suunnalle vastakkainen **b)** 25 m **c)** 31 m
2-8. **b)** C **c)** 14 m
2-9. **c)** 16 m/s
2-10. **a)** 4,0 m/s **b)** 16 s
2-11. 57 min
2-12. **a)** 3,8 m/s **b)** 4,2 m/s^2
2-13. **b)** 1,0 s
2-14. **b)** 25 m

3-1. **a)** 5,0 km ja 12,5 km **b)** 9,4 km/h **c)** 9,1 km/h
3-2. **a)** 2,0 s **b)** 3,0 m/s **c)** 0 m/s **d)** 3,5 s
3-3. **b)** 18 m **c)** 1,1 m/s
3-4. 9,3 m/s^2 ± 0,2 m/s^2
3-5. **b)** 19 m/s **c)** 2,3 m/s^2
3-6. **a)** 3,0 m ja 1,3 m **b)** 0,38 m/s **c)** 7,2 s
3-7. **a)** 36 m/s **b)** 45 s **c)** 30 s **d)** 30 s **e)** 0,80 m/s^2, 1,2 m/s^2 suunta nopeuden suunnalle vastakkainen **f)** 2,4 km
3-8. **b)** 11 m/s^2 **c)** 130 m
3-9. 9,7 m/s^2
3-10. 11 s, 580 m, 47°
3-11. **b)** $7{,}1 \cdot 10^{-8}$ s **c)** 0,46 m **d)** 6,6 Mm/s

Testaa, osaatko s. 35
1. a c **2.** a c **3.** c **4.** b **5.** a b **6.** c **7.** b **8.** a b **9.** b c

4-3. Lukemat ovat yhtä suuret.
4-4. **a)** 150 N **b)** 150 N **c)** Siima kestää vedon.
4-9. Massan hitaudesta.

5-1. **a)** A 20 N vasemmalle, B 0 N **b)** A 8,0 m/s^2 vasemmalle, B 0 m/s^2
5-2. **a)** 8,7 m/s^2 alas **b)** 0 m/s^2
5-3. **b)** 135 N **c)** 3,9 m/s^2
5-4. 1,8 m/s^2 ylös
5-5. **b)** 460 N
5-6. 4,9 kN, 4,7 kN, 4,3 kN
5-7. **a)** 10 kN **b)** 6,3 kN
5-8. **c)** 720 N
5-9. 29 N
5-10. **a)** 1,2 m/s^2, m_1 ylös, m_2 alas, 77 N **b)** 1,6 m/s
5-11. **a)** 15 m/s^2 **b)** 5,0 N

6-1. 1,6 m/s^2, 25° vinosti vasemmalle ylös
6-2. 4,5 m/s^2, 27° vinosti vasemmalle ylös
6-3. 600 N
6-4. **b)** 550 N
6-5. ei (52 N > 40 N)
6-6. 630 kg
6-7. oikeanpuoleinen (44 N > 31 N)
6-8. 559 N, 564 N
6-9. 80 N, 90 N
6-10. **a)** 180 N **b)** 18 m/s
6-12. **a)** 32 N, 15 N **b)** 24 N
6-13. **a)** 250 N **b)** 680 N
6-14. 2,6 m/s^2

7-1. **a)** 1,1 s **b)** 0,14 **c)** 0,25
7-2. **a)** 940 N
7-3. **a)** 24 N **b)** 0,98 m/s^2
7-5. **a)** 2,2 N **b)** 2,5 N
7-6. 34 mN

7-7. 0,17
7-8. 0,38
7-9. 2,8 m/s^2
7-10. 0,43
7-11. **a)** 2,2 m/s^2 **b)** 54 N
7-12. 730 N
7-13. pysyy (7,2 N > 5,0 N)
7-14. **b)** ei (0,18 < 0,37)
7-15. 1,0 m/s^2
7-16. 5,1 m/s^2, tasolla oikealle, riippuva alas

8-2. **a)** 0,56 N **b)** 57 cm^3
8-3. **a)** 2,6 kN ja 4,3 kN **b)** 1,6 kN
8-4. **a)** 12 N **b)** 1,2 kg **c)** 4,7 N **d)** 7,1 N
8-8. 2100 g
8-9. 11 %
8-10. **b)** 7,9 g/cm^3
8-11. **a)** 640 cm^3 **b)** 5,1 m^3 **c)** 5100 kg
8-12. 49 kg
8-15. **b)** 2,0 m/s ja 5,4 m/s **d)** 9,5 mN
8-17. 6 kpl

9-1. **a)** Ei **b)** Kyllä **c)** Kyllä
9-2. Kääntyy kulkusuunnassa oikealle.
9-4. 540 N
9-5. 21 Nm
9-6. 0,62 Nm
9-7. **a)** 0,44 Nm myötäpäivään
b) 1,8 Nm ja 1,5 Nm myötäpäivään
9-8. 5,5 Nm
9-9. 1,6 Nm
9-10. 900 N, 450 N, 300 N, 230 N
9-11. **a)** 92 Nm **b)** 25 Nm
9-12. 1700 Nm myötäpäivään

10-1. 1, 5, 3, 4, 6 ja 2
10-2. b
10-5. **a)** 84 N **b)** 7,0-kertainen
10-6. 9,3 N
10-7. 460 N ja 920 N
10-8. **a)** 280 N ylös **b)** 5900 N ylös
10-9. **a)** 380 N **b)** 860 N, 63°
10-10. **a)** 120 N **b)** 290 N
10-11. 40°

Testaa, osaatko s. 101
1. c **2.** a **3.** a **4.** b **5.** a b **6.** b **7.** c **8.** b **9.** b c **10.** b

11-3. **a)** 410 J **b)** 290 J
11-4. **a)** –26 kJ **b)** 26 kJ
11-5. **b)** 620 J
11-6. $6{,}4 \cdot 10^{-19}$ J, 4,0 eV
11-7. 450 J
11-8. **a)** 37 kN **b)** 24 kN
11-9. **a)** 190 J
11-10. **a)** 60 GJ **b)** 24 MW
11-11. 350 MJ
11-12. 54 kN
11-13. 15 kW
11-14. **a)** 1,6 kJ **b)** 28 W
11-15. 1,3 kJ
11-16. **a)** 7,5 N **b)** 4,0 J **c)** 0,5 W

12-1. **a)** 83 J **b)** 3,9 kJ
12-2. 16 km/h
12-4. **a)** 0,48 MJ **b)** 90 m
12-5. 42 m/s
12-6. 80 m
12-7. **a)** 28 m
12-8. 0,4764 J
12-9. 120 N, tikan lentosuuntaa vastaan
12-10. **a)** 27, 9 ja 243 kert. **b)** 52 kW

13-1. **a)** Väärin **b)** Oikein **c)** Oikein **d)** Oikein
e) Oikein **f)** Väärin
13-2. **a)** 4,8 MJ **b)** –5,9 MJ
13-3. **b)**
13-4. **a)** 1,2 kJ **b)** –1,1 kJ
13-5. **a)** 0,26 MJ **b)** 0,24 MJ
13-6. 20 GJ
13-7. 1,9 kJ
13-8. **a)** 6,7 TJ, 5600 **b)** 0,78 **c)** 2,2 MW
d) 13 TJ, 190 m^3 **e)** 120 W

14-2. 22 m/s
14-4. **a)** 47 J **b)** 0,19 N
14-5. **a)** 46 km/h
14-6. –18 kJ
14-7. 11 m/s
14-8. 38 kJ
14-9. **a)** –340 J **b)** 1,7 m
14-10. 6,0 m/s, 21 m/s
14-11. **a)** 8,9 m/s **b)** 6,0 m
14-12. **a)** 0,73 m **b)** 2,9 m/s **c)** 0,34

Testaa osaatko s. 137

1. a, b, c **2.** b **3.** a, b **4.** c **5.** c **6.** c **7.** b **8.** c **9.** a, b, c **10.** a, c

15-1. **a)** 710 kgm/s **b)** 6,8 m/s
15-3. a
15-4. 140 N
15-5. 69 m/s
15-6. **a)** 0,061 Ns **b)** 0,29 m/s, −0,32 m/s **c)** −0,13 kgm/s
15-7. 0,98 kN
15-8. 1,3 Ns ylöspäin
15-9. **a)** 0,43 m
15-10. 0,27 Ns alaspäin
15-11. 7,8 m
15-12. 25 m/s, 27° alaviistoon
15-13. **a)** $2{,}8 \cdot 10^5$ N **b)** $1{,}0 \cdot 10^4$ N
15-14. **a)** 0,10 s **b)** 11 N **c)** 0,70 Ns, suunta päinvastaiseen suuntaan kuin vaunun nopeus alussa.

16-1. a, b, e
16-3. **a)** Nopeus 0,54 m/s, päinvastaiseen suuntaan kuin mies.
16-4. 94 km/h
16-5. 51 kg
16-7. **b)** 0,39 m/s, 0,16 m/s
16-8. **b)** 85 g
16-9. 28 m/s
16-10. 0,13 m
16-11. **a)** 64 km/h kuorma-auton alkuperäisen liikkeen suuntaan **b)** 0,94 MN päinvastaiseen suuntaan kuin kuorma-auton alkuperäinen liike
16-12. **a)** 0,95 m/s, 0,67 m/s **b)** 2,3 m, 1,2 m
16-13. **a)** kimmoton **b)** 0,44 kgm/s
16-14. 1,9 m/s, 60° raskaamman kiekon alkuperäiseen suuntaan nähden

Testaa osaatko s. 157

1. a, b, c **2.** b **3.** a, b **4.** a, c **5.** a, b **6.** c **7.** a, b, c **8.** a, b, c 9. a **10.** a

Kertaustehtäviä

1. 12 cm/s
2. **c)** 18 m
3. **a)** 6,0 m **b)** 2,0 m **c)** 0,86 m/s
4. a) 24 m/s **b)** 12 m/s **c)** 96 m
5. **b)** 0,46 m/s **c)** 3,9 s
7. 39 cm
8. **b)** 12 m/s **c)** 30 m/s ja 0 m/s
9. **a)** 33 m **b)** 26 m/s
10. **a)** 7,0 m/s **b)** 2,5 m
13. 14 N, 75° vasemmalle yläviistoon
14. 59 N, 41 N, narujen suuntaiset
15. **b)** 3,5 m/s^2 **c)** 16 m
16. **a)** 16 N **b)** 13 N **c)** 18 N
17. **a)** 910 N **b)** 1,5 kN
18. **a)** 15 N **b)** 1,9 m/s^2
19. **a)** 0,20 **b)** 2,0 N
20. 0,10
21. **a)** 3,1 m/s^2 **b)** 4,0 s
22. 690 kg/m^3
23. 30 kg
24. 7,4 g/cm^3
25. 240 N **b)** Avaaminen onnistuu.
26. 4,1 m
27. 1,9 Nm vastapäivään
28. **a)** 6,0 Nm myötäpäivään **b)** 4,2 Nm myötäpäivään
29. 1200 N
31. 17°
32. **a)** Väärin **b)** Väärin
33. Kyllä.
34. **a)** 70 Nm myötäpäivään, 110 Nm vastapäivään **b)** 90 N ylös **c)** Akselista A 0,78 m oikealle.
35. 100 N, 88 N, 3,8°
36. **b)** 5,3 kN
37. **a)** 22 N, **b)** 110 J
38. **a)** 87 J, **b)** 35 J
39. **a)** 10 J **b)** −4,0 J **c)** 10 J, 2,2 m/s **d)** 6,0 J, 1,7 m/s
40. **a)** 2,2 kJ
41. **a)**
42. 4,8 m/s
43. Yhdeksänkertainen
44. 2,8 s

45. **b)**

46. **a)** 470 N liikkeen suuntaan, 0 N, 530 N liikkeen suuntaa vastaan **b)** 18 kJ

47. **b)** 7,5 m/s **c)** −1,4 J

48. **a)** 3,0 kN liikkeen suuntaa vastaan **b)** 68 km/h

49. 80 m

50. **a)** 38 m/s **b)** 38 m/s **c)** 39 m/s

52. 2200 km/h

53. 6,0 m/s

54. **a)** 970 Ns **b)** 280 m/s

55. 32 m/s

56. **b)** 0,30 m/s repun liikkeen suuntaa vastaan

57. 35 km/h, 67° nopeudella 33 km/h liikkuneen auton alkuperäiseen liikesuuntaan nähden

Vanhoja ylioppilastehtäviä

S2016/2 **c)** 0,82 m

K2016/2 **b)** 9,6 m/s^2

S2014/5 **b)** 6,0 m/s **c)** 5,03 kg

K2016/5 **a)** punainen pysähtyy, keltainen 2,1 m/s

S2015/10 **a)** 16900 N

K2011/5 0,33

K2009/6 160 N

VALOKUVAT

kansi: Martchan / Shutterstock
s. 6 ylh. Markku Ulander / Lehtikuva
s. 6 kesk. Karamysh / Shutterstock
s. 6 alh. Herbert Kratky / Shutterstock
s. 7 ylh.vas. TonyV3112 / Shutterstock
s. 7 ylh.oik. Wolfgang Zwanzger / PantherMedia
s. 7 kesk. William West / AFP / Lehtikuva
s. 7 alh. NikoNomad / Shutterstock
s. 8 ylh. jojoo64 / Fotolia
s. 8 kesk.vas. Sciencephoto / MVphotos
s. 8 kesk.oik. Sampsa Kaijaluoto
s. 8 alh. Unclesam / Fotolia
s. 11 vas. Ventura / Shutterstock
s. 11 oik. Zuma Press - News / MVphotos
s. 12 Heikki Lehto
s. 16 ylh. Dominic Favre / AFP / Getty Images
s. 16 kesk. Mika Luomansivu
s. 16 alh.vas. Badahos / Shutterstock
s. 16 alh.oik. PhotoStock10 / Shutterstock
s. 17 vas. Chaoss / Fotolia
s. 17 kesk. sportpoint / Shutterstock
s. 17 oik. Ljupco Smokovski / Shutterstock
s. 18 Timo Suvanto
s. 19 viicha / Shutterstock
s. 20 ylh. Lightpoet / Shutterstock
s. 20 alh. Keantian / Fotolia
s. 23 Gerard Julien / AFP / Getty Images
s. 24 ylh. Michal Kalasek / Shutterstock
s. 24 kesk.vas. Natursports / Shutterstock
s. 24 kesk.oik. Lightpoet / Shutterstock
s. 24 alh. Sampsa Kaijaluoto
s. 25 Heikki Lehto
s. 27 ylh. William Perugini / Shutterstock
s. 27 alh. Palino Spisiak / Shutterstock
s. 30 ylh. Sampsa Kaijaluoto
s. 30 kesk. Heikki Lehto
s. 30 alh. Sciencephoto / MVphotos
s. 31 Heikki Lehto
s. 36 Bettmann Archive / Getty Images
s. 37 Caesart / Shutterstock
s. 38 ylh. gfdunt / Shutterstock
s. 38 kesk. Mika Luomansivu
s. 38 alh. Sampsa Kaijaluoto
s. 39 vas. ezer66 / Shutterstock
s. 39 kesk. Pavel Shchegolev / Shutterstock
s. 39 oik. Alexey Rotanov / Shutterstock
s. 39 alh. 3Dsculptor / Shutterstock
s. 40 vas. Jan Miko / Shutterstock
s. 40 kesk. Artur Synenko / Shutterstock
s. 40 oik. Nneirda / Shutterstock
s. 40 alh. Puwadol Jaturawutthichai / Shutterstock
s. 41 ylh. Lilyana Vynogradova / Shutterstock
s. 41 alh. Raimo Havukainen
s. 43 Sciencephoto / MVphotos
s. 44 ylh. Jaroslav Pachy sr / Shutterstock
s. 44 alh. NASA / Science Photo Library / MVphotos
s. 45 ylh. nielskliim / Fotolia
s. 45 alh. Sanoma Pro Oy
s. 46 ylh. wavebreakmedia / Shutterstock
s. 46 alh. Sergey Novikov / Shutterstock
s. 47 ylh. Vaclav Volrab / Shutterstock
s. 47 alh. karelnoppe / Shutterstock
s. 48 ylh. Fotolia
s. 48 kesk.vas. Mika Luomansivu
s. 48 kesk.oik. Raimo Havukainen
s. 48 alh.vas. Carol Dembinsky / Dembinsky Photo Associates / Alamy Stock Photo/MVphotos
s. 48 alh.oik. kasto / Fotolia
s. 49 ylh. NASA / AFP / Lehtikuva
s. 49 alh.vas. Mikko Stig / Lehtikuva
s. 49 alh.oik. Kycheryavuy / Shutterstock
s. 50 ylh. Andraž Cerar / Shutterstock
s. 50 alh. tphoto19 / Shutterstock
s. 51 Jan Novak / PantherMedia
s. 53 Nate Allred / Shutterstock
s. 56 Phoompiphat Phoomkaew / Shutterstock
s. 58 ylh. Kerttu Penttilä / Sanoma Pro Oy
s. 58 kesk.vas. Mika Luomansivu
s. 58 kesk.oik. Mika Luomansivu
s. 58 alh.vas. roibu / Shutterstock
s. 58 alh.kesk. Photobac / Shutterstock
s. 58 alh.oik. Verena Matthew / Shutterstock
s. 59 Jere Keskiaho
s. 62 Heikki Lehto
s. 66 ylh. Fotokvadrat / Shutterstock
s. 66 kesk.vas. Raimo Havukainen

s. 66 kesk.oik. Mika Luomansivu
s. 66 alh. Sampsa Kaijaluoto
s. 67 vas. Sorbis / Shutterstock
s. 67 kesk. Heikki Lehto
s. 67 oik. Oleksandr Grechin / Shutterstock
s. 67 alh. Billion Photos / Shutterstock
s. 70 ylh. Ivan Garcia / Shutterstock
s. 70 alh. Heikki Lehto
s. 73 Heikki Lehto
s. 76 ylh. vicspacewalker / Shutterstock
s. 76 kesk. Isvet Oy
s. 76 alh. Raimo Havukainen
s. 77 ylh. Mirelle / Shutterstock
s. 77 kesk. Nina Tuittu
s. 77 alh. Alvov / Shutterstock
s. 80 Jaromir Chalabala / Shutterstock
s. 81 Sciencephoto / MVphotos
s. 82 vas. Markku Ulander / Lehtikuva
s. 82 oik. Jan Martin Will / Shutterstock
s. 83 Mika Luomansivu
s. 84 ylh. Elena Elisseeva / Shutterstock
s. 84 kesk. Raimo Havukainen
s. 84 alh.vas. Creative Travel Projects / Shutterstock
s. 84 alh.kesk. Raimo Havukainen
s. 84 alh.oik. Raimo Havukainen
s. 86 vas. Cultura Creative (RF) / Alamy Stock Photo / MVphotos
s. 86 oik. Creative Travel Projects / Shutterstock
s. 90 ylh. KieferPix / Shutterstock
s. 90 alh. Raimo Havukainen
s. 91 Raimo Havukainen
s. 92 ylh. Tero Sivula / Lehtikuva
s. 92 kesk. Raimo Havukainen
s. 92 alh.vas. Monkey Business Images / Shutterstock
s. 92 alh.oik. Raimo Havukainen
s. 93 vas. Brad Young / Shutterstock
s. 93 oik. Alexander Mazurkevich / Shutterstock
s. 95 gorillaimages / Shutterstock
s. 98 ylh. Raimo Havukainen
s. 98 alh. Nattika / Shutterstock
s. 102 Bildagentur Zoonar GmbH / Shutterstock
s. 103 ylh. Photomarine / Shutterstock
s. 103 alh. goodluz / Shutterstock
s. 104 ylh. Africa Studio / Shutterstock
s. 104 kesk. Heikki Lehto
s. 104 alh.vas. Sciencephoto / MVphotos
s. 104 alh.oik. mariakraynova / Shutterstock
s. 105 Anna Moskvina / Shutterstock
s. 106 ylh. 2M media / Shutterstock
s. 106 alh. SpeedKingz / Shutterstock
s. 109 Diego Cervo / Shutterstock
s. 110 A.Punpleng / Shutterstock
s. 112 ylh. Cheryl Ann Quigley / Shutterstock
s. 112 kesk. Raimo Havukainen
s. 112 alh.vas. Tony Moran / Shutterstock
s. 112 alh.oik. Shutterstock
s. 113 Hadrian / Shutterstock
s. 114 ylh. ClS / Shutterstock
s. 114 alh. Ververidis Vasilis / Shutterstock
s. 115 ylh. Shutterstock
s. 115 alh. CroMary / Shutterstock
s. 116 vas. Nyvlt-art / Shutterstock
s. 116 oik. Ksander / Shutterstock
s. 117 FlashStudio / Shutterstock
s. 118 ylh.vas. Delmas Lehman / Shutterstock
s. 118 ylh.oik. YellowPaul / Shutterstock
s. 118 alh. Kichigin / Shutterstock
s. 119 ylh. keantian / Shutterstock
s. 119 kesk. dora modly-paris / Shutterstock
s. 119 alh. Evannovostro / Shutterstock
s. 120 ylh. Rob Bayer / Shutterstock
s. 120 kesk. Raimo Havukainen
s. 120 alh.vas. Steve Biegler / Shutterstock
s. 120 alh.oik. Konstantin Chalabov / Sputnik / MVphotos
s. 121 vas. Steve Pepple / Shutterstock
s. 121 oik. Maciej Kopaniecki / Shutterstock
s. 122 Shutterstock
s. 123 Lagutkin Alexey / Shutterstock
s. 123 Jari Joutsenvaara
s. 126 vas. Alexei Danichev / Sputnik / MVphotos
s. 126 oik. Frank Fiedler / Shutterstock
s. 127 ylh. Wolfilser / Shutterstock
s. 127 alh. Rigucci / Shutterstock
s. 128 ylh. Vibrant Image Studio / Shutterstock
s. 128 kesk. Raimo Havukainen
s. 128 alh.vas. Phill Beale / Shutterstock
s. 128 alh.oik. picturepartners / Shutterstock
s. 129 ylh. Elina-Lava / Shutterstock
s. 129 alh. Julie Eydman / Fotolia
s. 130 bikeriderlondon / Shutterstock
s. 131 ylh. Isvet Oy
s. 131 kesk. Jon Buckle / IOC via Getty Images
s. 131 alh. gorillaimages / Shutterstock
s. 133 Patrick Jennings / Shutterstock
s. 134 vas. Sivolob Igor / Shutterstock
s. 134 oik. Herbert Kratky / Shutterstock
s. 135 CTR Photos / Shutterstock
s. 137 ylh. Vixit / Shutterstock
s. 137 alh. T.W. van Urk / Shutterstock
s. 138 ylh. Sciencephoto / MVphotos
s. 138 alh.vas. Ilka Antonova / Shutterstock
s. 138 alh.oik. Tim Large / Shutterstock
s. 139 ylh. Jacek Chabraszewski / Fotolia
s. 139 kesk. Jarhe Photography / Shutterstock
s. 139 alh. Oxford University Images / Science Photo Library / MVphotos
s. 140 ylh. Ishara S.Kodikara / AFP / Getty Images
s. 140 kesk. Sampsa Kaijaluoto
s. 140 alh.vas. Natursports / Shutterstock
s. 140 alh.oik. Tasoph / Shutterstock
s. 141 ylh. Kzenon / Shutterstock
s. 141 alh. micromonkey / Fotolia
s. 142 Mika Luomansivu
s. 143 PongMoji / Shutterstock
s. 147 Sciencephoto / MVphotos
s. 148 ylh. ESB Professional / Shutterstock
s. 148 kesk. Isvet Oy
s. 148 alh.vas. Fabrice Coffrini / AFP / Lehtikuva
s. 148 alh.oik. Raimo Havukainen
s. 150 ylh. TravnikovStudio / Shutterstock
s. 152 lsantilli / Shutterstock
s. 153 Raimo Havukainen
s. 155 shinobi / Shutterstock
s. 157 Iurii Osadchi / Shutterstock
s. 163 kesk. Raimo Havukainen
s. 163 alh. Raimo Havukainen

HAKEMISTO

Arkhimedeen laki 77
dynamiikka 52
ei-konservatiivinen voima 124
etävoima 39
fysikaalinen pinta-ala 10
graafinen derivointi 26
hetkellinen kiihtyvyys 27
hetkellinen nopeus 26
hitaus 44
ilmanvastus 80
impulssi 141
impulssiperiaate 144
jännitysvoima 40
jäykkä kappale 94, 95
keskeinen törmäys 151
keskikiihtyvyys 27
keskinopeus 18, 25
kiertoakseli 85
kiertosuunta 86
kiertosuuntasopimus 86
kiihtyvyys 17
kimmoisa törmäys 151
kitka 40, 67
kokonaisvoima 50, 51
konservatiivinen voima 124
kosketusvoima 39
kuormittava voima 93
lepokitka 68
liike-energia 112
liikemäärä 143
liikemäärän säilyminen 149
liikemäärän säilymislaki 150
liukukitka 68
liukukitkakerroin 69
lähtökitka 68
lähtökitkakerroin 69
massa 44
matka 11
mekaaninen energia 129
mekaaninen työ 124
mekaanisen energian säilymislaki 129
mekaniikan energiaperiaate 131
momentti 85
momenttien summa nolla 94, 95
myötäpäivä 86
Newtonin I laki
Newtonin II laki 50
Newtonin III laki 41
nopeus 9
nopeus tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä 18
noste 78
paikka 11
paikka tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä 19
paino 40, 44
painopiste 93
potentiaalienergia 121
potentiaalienergian muutos 124
putoamiskiihtyvyys 45
rata 11
resultantti 59
skalaarimuoto 52
statiikka 93
suora törmäys 151
suuntasopimus 52
sähköinen voima 40
säilymislait törmäyksissä 152
tasainen suoraviivainen liike 9
tasaisesti kiihtyvä liike 17
tasapaino etenemisen suhteen 95
tasapaino pyörimisen suhteen 95
tasapainoehto 60
tasapainottava voima 93
teho 109
tukipinta 93
tukivoima 40
työ-energiaperiaate 115
täysin kehittynyt lepokitka 69
täysin kimmoton törmäys 151
vaikutuspiste 85
vaikutussuora 85
vakiokiihtyvyys 17
vapaakappalekuva 42
vastapäivä 86
vektorimuoto 52
voima 39, 41
vastavoima 41
voimakuvio 42
voiman komponentti 61
voiman momentti 85, 87
voiman momentti positiivinen 86
voiman teho 109
voiman tekemän työ 105
voiman varsi 85, 87
voimien summa nolla 94, 95
vuorovaikutus 39
väliaineen vastus 80
vääntövaikutus 85

KÄSITTEITÄ

Arkhimedeen laki (*Archimedes' principle*) Kun kappale on väliaineessa, siihen kohdistuu noste, joka on yhtä suuri kuin kappaleen syrjäyttämän väliainemäärän paino.

ei-konservatiivinen voima (*non-conservative force*) Ei-konservatiivisen voiman tekemä työ riippuu reitistä, jonka kappale kulkee voiman vaikuttaessa siihen. Esim. kitka. Ei-konservatiivisen voiman tekemä työ ei ilmene mekaanisena energiana vaan esimerkiksi kappaleen lämpenemisenä.

etenemisliike (*translational motion*) Etenemisliike tarkoittaa kappaleen paikan muuttumista.

etävuorovaikutus (*long-range interaction*) Vuorovaikutukset voidaan luokitella kosketusvuorovaikutuksiin ja etävuorovaikutuksiin. Kappaleet ovat etävuorovaikutuksessa, jos ne vaikuttavat toisiinsa vaikka eivät koskettaisi toisiaan. Esimerkiksi gravitaatio on etävuorovaikutus.

graafinen derivointi (*graphical derivation*) Graafinen derivointi tarkoittaa suureen kuvaajalle piirretyn tangenttisuoran fysikaalisen kulmakertoimen määrittämistä. Kulmakerroin kertoo suureen muutosnopeuden hetkellisen arvon.

graafinen integrointi (*graphical integration*) Graafinen integrointi tarkoittaa fysikaalisen pinta-alan määrittämistä kuvaajasta.

gravitaatio (*gravity*) Gravitaatio on yksi luonnon perusvuorovaikutuksista. Gravitaatiovuorovaikutus vaikuttaa kaikkiin hiukkasiin, joilla on massa.

hetkellinen nopeus (*instantaneous velocity*) Hetkellinen nopeus määritetään t,x-koordinaatiston kuvaajasta. Hetkellinen nopeus on paikan kuvaajalle hetkeä t vastaavaan kohtaan piirretyn tangentin fysikaalinen kulmakerroin eli $v(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.

hetkellinen kiihtyvyys (*instantaneous acceleration*) Hetkellinen kiihtyvyys määritetään piirtämällä nopeuden kuvaajalle $v(t)$ haluttuun kohtaan tangentti. Kappaleen hetkellinen kiihtyvyys hetkellä t on tangentin fysikaalinen kulmakerroin eli $a(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

ilmanvastus (*air resistance*) Ilmanvastus on voima, joka syntyy kappaleen ja ilman kosketusvuorovaikutuksesta.

impulssi (*impulse*) Impulssi on voiman ja sen vaikutus ajan tulo, $\overline{I} = \overline{F}\Delta t$, jossa $\overline{F}$ on voima ja Δt on voiman vaikutusaika.

Impulssiperiaate (*impulse-momentum change principle*) Kappaleeseen kohdistuvan voiman impulssi on yhtä suuri kuin voiman aiheuttama kappaleen liikemäärän muutos, eli $\overline{I} = \Delta\overline{p}$ jossa $\Delta\overline{p}$ on liikemäärän muutos, $\Delta\overline{p} = m\overline{v}_\mathrm{l} - m\overline{v}_\mathrm{a}$.

jäykkä kappale (*rigid body*) Kappale on jäykkä, jos sen koko ja muoto eivät muutu siihen kohdistuvien voimien vaikutuksesta.

keskikiihtyvyys (*average acceleration*) Suoraviivaisessa liikkeessä olevan kappaleen keskikiihtyvyys on $a_\mathrm{k} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, jossa $\Delta v = v_2 - v_1$ kappaleen nopeuden muutos ja $\Delta t = t_2 - t_1$ liikkeen kesto.

keskinopeus (*average velocity*) Keskinopeus v_k kuvaa liikkuvan kappaleen keskimääräistä nopeutta suoraviivaisen liikkeen aikana: $v_\mathrm{k} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, jossa $\Delta x = x_2 - x_1$ on siirtymä eli paikan muutos paikasta x_1 paikkaan x_2 ja $\Delta t = t_2 - t_1$ on paikan muutokseen kulunut aika eli liikkeen kesto.

kiertoakseli (*rotation axis*) Ks. momentti.

kitka (*friction*) Kitka on kosketusvoima, joka vastustaa kahden pinnan liukumista toistensa suhteen.

kimmoisa törmäys (*elastic collision*) Törmäys on kimmoisa, jos kappaleiden muodot palaavat törmäyksen jälkeen ennalleen ja jos kappaleet eivät tartu toisiinsa. Kimmoisessa törmäyksessä kokonaisliikemäärä ja liike-energia säilyvät.

kimmoton törmäys (*inelastic collision*) Törmäys on kimmoton, jos osa törmäävien kappaleiden liike-energiasta muuntuu muuksi kuin mekaaniseksi energiaksi. Kimmottomassa törmäyksessä säilyy kokonaisliikemäärä mutta ei liike-energia.

kokonaisvoima (*total force*) Kappaleeseen kohdistuvalla kokonaisvoimalla tarkoitetaan kaikkien kappaleeseen vaikuttavien voimien yhteisvaikutusta. Jos kappaleeseen kohdistuva kokonaisvoima eroaa nollasta, kappale on Newtonin II lain mukaan kiihtyvässä liikkeessä ja jos se on nolla, kappale on levossa tai tasaisessa liikkeessä.

konservatiivinen voima (*conservative force*) Voima, jonka tekemä työ ei riipu reitistä, jota pitkin kappale liikkuu voiman alaisena pisteestä toiseen, sanotaan konservatiiviseksi voimaksi. Esim. gravitaatiovoima.

kosketusvuorovaikutus (*contact interaction*) Vuorovaikutukset voidaan luokitella kosketusvuorovaikutuksiin ja etävuorovaikutuksiin. Kosketusvuorovaikutuksessa kappaleet koskettavat toisiaan. Kosketusvuorovaikutus on makromaailmaan liittyvä malli.

lepokitka (*static friction*) Lepokitka on kappaleen liikkeellelähtöä estävä voima. Lepokitka on muuttuva voima.

liike-energia (*kinetic energy*) Kappaleen liikkeeseen liittyvää energiaa sanotaan liike-energiaksi. Kappaleen liike-energia on $E_k = \frac{1}{2}mv^2$, jossa m on kappaleen massa ja v nopeus.

liikemäärä (momentum) Liikemäärä $\overline{p}$ on kappaleen massan ja nopeuden tulo, $\overline{p} = m\overline{v}$, jossa m on kappaleen massa ja $\overline{v}$ nopeus.

liikemäärän säilymislaki (*conservation of momentum*) Eristetyssä systeemissä kappaleiden kokonaisliikemäärä ei muutu, $\sum \overline{p}_{\text{alussa}} = \sum \overline{p}_{\text{lopussa}}$. Kahden kappaleen tapauksessa $m_1\overline{v}_1 + m_2\overline{v}_2 = m_1\overline{u}_1 + m_2\overline{u}_2$, jossa m_1 ja m_2 ovat kappaleiden massat, $\overline{v}_1$ ja $\overline{v}_2$ kappaleiden 1 ja 2 nopeudet ennen vuorovaikutusta ja $\overline{u}_1$ ja $\overline{u}_2$ nopeudet välittömästi vuorovaikutuksen jälkeen.

liukukitka (*kinetic friction*) Liukukitka on voima, joka vastustaa kappaleen liukumista toisen kappaleen pintaa vasten. Liukukitkan $\overline{F}$ suuruus on $F_\mu = \mu N$. Liukukitkakerroin μ on hankaaville pintapareille ominainen vakio.

lähtökitka (*maximum static friction*) Lähtökitka (täysin kehittynyt lepokitka) on lepokitkan suurin arvo. Lähtökitkan $\overline{F}_{\mu 0,\text{max}}$ suuruus on $F_{\mu 0,\text{max}} = \mu_0 N$. Lähtökitkakerroin μ_0 on koskettaville pintapareille ominainen vakio.

massa (*mass*) Massa ilmaisee kappaleen ominaisuutta, joka ilmenee kappaleen taipumuksena vastustaa liikkeensä muuttumista sekä kykynä aiheuttaa ja kokea gravitaatiovuorovaikutus.

matka (*distance*) Matkalla tarkoitetaan kappaleen kulkureitin pituutta sen siirtyessä paikasta toiseen.

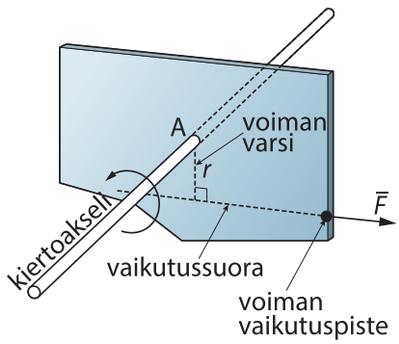
mekaaninen energia (*mechanical energy*) Kappaleen liike-energian ja potentiaalienergian summaa $E_p + E_k$ sanotaan kappaleen mekaaniseksi energiaksi.

mekaanisen energian säilymislaki (*conservation of mechanical energy*) Mekaaninen energia säilyy eli kappaleen potentiaali- ja liike-energian summa on vakio, $E_p + E_k$ = vakio mikäli vastusvoimien vaikutus on merkityksetön.

mekaniikan energiaperiaate (*energy principle of mechanics*) Jos kappaleeseen vaikuttaa konservatiivisten voimien lisäksi ei-konservatiivisia voimia, kuten kitka tai ilmavastus, on voimassa yhtälö $E_{k,a} + E_{p,a} + W = E_{k,l} + E_{p,l}$, jossa W on ei-konservatiivisten voimien tekemä työ.

mekaniikan peruslait (*Newton's laws of motion*) Mekaniikan peruslait ovat Newtonin I laki, Newtonin II laki ja Newtonin III laki.

momentti (*torque*) Voiman momentti kuvaa voiman vääntövaikutusta. Voiman $\overline{F}$ momentti akselin suhteen on $M = Fr$, jossa r on voiman vaikutussuoran kohtisuora etäisyys kiertoakselista. Etäisyyttä r nimitetään voiman varreksi eli momenttivarreksi. Momentin yksikkö on 1 Nm.



momenttiehto (*the rotational condition of equilibrium, the second condition of equilibrium*) Ks. tasapainoehdot.

Newtonin I laki eli jatkavuuden laki (*Newton's First Law, the law of inertia*) Jos kappale ei ole vuorovaikutuksessa muiden kappaleiden kanssa, se pysyy paikallaan tai jatkaa liikettään suoraviivaisesti muuttumattomalla nopeudella.

Newtonin II laki eli dynamiikan peruslaki (*Newton's Second Law*) Kappaleen kiihtyvyys $\overline{a}$ on suoraan verrannollinen kappaleeseen vaikuttavaan kokonaisvoimaan $\Sigma\overline{F}$, ja kääntäen verrannollinen kappaleen massaan m: $\overline{a} = \frac{\Sigma\overline{F}}{m}$ Kiihtyvyyden suunta on sama kuin kokonaisvoiman suunta.

Newtonin III laki eli voiman ja vastavoimanlaki (*Newton's Third Law, the law of action and reaction*) Kun kappale A vaikuttaa kappaleeseen B voimalla $\overline{F}_{AB}$, kappale B vaikuttaa kappaleeseen A yhtä suurella mutta vastakkaissuuntaisella voimalla $\overline{F}_{BA}$.

noste (*buoyancy*) Kappaleeseen kohdistuvan nosteen suuruus on $N = \rho Vg$, jossa V on kappaleen upoksissa olevan osan tilavuus ja ρ nesteen (tai kaasun) tiheys. Noste aiheutuu hydrostaattisen paineen erosta kappaleen ylä- ja alapinnoilla. Kappaleeseen kohdistuvan nosteen suuruus ei riipu siitä, mistä aineesta kappale on tehty.

paino (*weight*) Paino on gravitaatiovuorovaikutuksen aiheuttama voima. Kappaleeseen kohdistuvan painon suuruus on $G = mg$, jossa m on kappaleen massa ja g putoamiskiihtyvyys.

painopiste (*center of gravity, center of mass*) Painopiste on kappaleeseen kohdistuvan painon ajateltu vaikutuspiste.

Potentiaalienergia (*potential energy*) Kappaleen asemasta riippuvaa energiaa sanotaan potentiaalienergiaksi. Esimerkiksi gravitaatiokentässä tai sähkökentässä olevalla kappaleella voi olla potentiaalienergiaa. Gravitaatioon liittyvä potentiaalienergia on $E_p = mgh$, jossa m on kappaleen massa, g putoamiskiihtyvyys ja h kappaleen pystysuora etäisyys valitusta potentiaalienergian nollatasosta.

potentiaalienergian nollataso (*zero height position*) Se taso, jossa esimerkiksi gravitaatioon liittyvän potentiaalienergian arvoksi sovitaan nolla. Kappaleen potentiaalienergian arvo riippuu siitä, miten etäällä kappale on potentiaalin nollatasosta.

putoamiskiihtyvyys (*acceleration due to gravity*) Kappaleilla on massasta riippumatta sama painon aiheuttama putoamiskiihtyvyys. Maan pinnan läheisyydessä putoamiskiihtyvyys on $g_{Maa} \approx 9{,}81\ \text{m/s}^2$.

siirtymä (*displacement*) Siirtymällä tarkoitetaan kappaleen paikan muutosta: siirtymä on vektori kappaleen alkupaikasta loppupaikkaan.

statiikka (*statics*) Statiikka on mekaniikan osa-alue, jossa tutkitaan kappaleen tasapainoehtoja.

tasainen liike (*constant motion*) Tasaisessa liikkeessä kappaleen nopeus on vakio. Kappaleen nopeus $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$, on jossa x_1 on kappaleen paikka hetkellä t_1 ja x_2 kappaleen paikka hetkellä t_2. Kappaleen paikka hetkellä t on $x = x_0 + vt$, jossa x_0 on paikka hetkellä $t = 0$ s ja v on kappaleen vakionopeus. Kappaleen aikana 0...t kulkema matka on $s = vt$, jossa v on kappaleen vakionopeus.

tasaisesti kiihtyvä liike (*motion with a constant acceleration*) Kappaleen liike on tasaisesi kiihtyvää, jos kappaleen nopeus muuttuu yhtä pitkinä aikaväleinä aina yhtä paljon. Vakiokiihtyvyys on $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä kappaleen nopeus hetkellä t on $v = v_0 + at$, jossa v_0 on kappaleen nopeus hetkellä $t = 0$ s ja a on kappaleen vakiokiihtyvyys. Kappaleen keskinopeus tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä on $v_k = \frac{v_0 + v}{2}$, jossa v_0 on kappaleen alkunopeus ja v loppunopeus. Kappaleen paikka tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä hetkellä t on $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, jossa x_0 ja v_0 ovat kappaleen paikka ja nopeus hetkellä $t = 0$ s ja a on kappaleen vakiokiihtyvyys.

tasapainoehdot (*the conditions of equilibrium*) Kappaleen tasapainoehdot ovat etenemisliikkeeseen liittyvä voimaehto $\sum \overline{F} = \overline{0}$ ja pyörimiseen liittyvä momenttiehto $\Sigma M = 0$.

teho (*power*) Ks. voiman teho

tukivoima (*normal force*) Tukivoima on kosketusvoima, joka aiheutuu kappaleen pinnan kosketuksesta toisen kappaleen pintaan. Tukivoima on aina kohtisuorassa kosketuspintaa vastaan.

työ (*work*) Työ kuvaa voiman vaikutusta liikkuvaan kappaleeseen. Voiman tekemä työ on $W = F\cos\alpha\, s$, jossa F on voiman suuruus, α on voiman ja siirtymän välinen kulma ja s on siirtymä. Työ ilmenee kappaleen tai systeemin energian muutoksena.

työ-energiaperiaate (*work-energy principle*) Kappaleeseen vaikuttavan kokonaisvoiman tekemä työ on yhtä suuri kuin kappaleen liike-energian muutos: $W = \Delta E_k$.

työ nostossa (*the work of lifting force*) Kappaletta nostavan voiman tekemä työ on yhtä suuri kuin kappaleen potentiaalienergian muutos: $W = mg\Delta h = \Delta E_p$, jossa m on kappaleen massa, g putoamiskiihtyvyys ja Δh kappaleen aseman muutos pystysuorassa suunnassa.

täysin kimmoton törmäys (*perfectly inelastic collision*) Jos törmäävät kappaleet liikkuvat törmäyksen jälkeen toisiinsa kiinnittyneinä, törmäys on täysin kimmoton.

vaikutussuora (*the line of action*) Ks. momentti

voima (*force*) Kappaleen ja sen ympäristön väliset vuorovaikutukset ilmenevät kappaleeseen kohdistuvina voimina. Voima aiheuttaa kappaleen kiihtyvyyden.

voimakuvio (*force diagram*) Voimakuviolla tarkoitetaan piirrosta, johon on merkitty kaikki kappaleeseen vaikuttavat voimat.

voiman komponentit (*components of the force*) Voima $\overline{F}$ on komponenttiensa summa: $\overline{F} = \overline{F}_x + \overline{F}_y$. Voiman $\overline{F}$ suuruus on $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$.

voiman teho (*power*) Voiman teho kuvaa sitä, miten nopeasti voima tekee työtä. Voiman keskimääräinen teho on $P = \frac{W}{t}$, jossa W on voiman tekemä työ ja t voiman vaikutusaika.

voiman varsi (*lever arm, moment arm*) Voiman $\overline{F}$ momentti akselin suhteen on $M = Fr$, jossa r on voiman vaikutussuoran kohtisuora etäisyys kiertoakselista (momenttiakselista). Tätä etäisyyttä r nimitetään voiman varreksi eli momenttivarreksi. Voiman momentti kuvaa voiman vääntövaikutusta. Ks. momentti.

vuorovaikutus (*interaction*) Vuorovaikutus on esimerkiksi kahden kappaleen tai hiukkasen vaikutussuhde, jossa molemmat osapuolet vaikuttavat toisiinsa. Vuorovaikutus voi ilmetä kappaleiden liikkeen tai muodon muuttumisena. Kappale voi olla samanaikaisesti osallisena useassa vuorovaikutuksessa. Vuorovaikutukset voidaan jakaa kosketusvuorovaikutuksiin ja etävuorovaikutuksiin. Vuorovaikutus ilmenee kappaleeseen kohdistuvana voimana.

väliaineen vastus (*fluid resistance*) Nesteessä tai kaasussa liikkuvan kappaleen liikettä vastustavaa voimaa sanotaan väliaineen vastukseksi.

TEHTÄVIEN RATKAISUT

1-1. **a)** Kappaleen nopeus on suurin aikavälillä 10…20 s.

b) Kappale liikkuu hitaimmin aikavälillä 30…40 s.

c) Kappale on liikkumatta aikavälillä 0…10 s, aikavälillä 20…30 s ja aikavälillä 40…50 s.

d) Kappaleen nopeus on negatiivinen aikavälillä 30…40 s.

1-2. **a)** Kappaleen siirtymä on $\Delta x = x_2 - x_1 = 4{,}0\text{ m} - 2{,}0\text{ m} = 2{,}0\text{ m}$.

b) Nopeus on $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{2{,}0\text{ m}}{1{,}0\text{ s}} = 2{,}0\text{ m/s}$, suunta eteenpäin.

c) Kappaleen siirtymä on $\Delta x = x_2 - x_1 = -2{,}0\text{ m} - 4{,}0\text{ m} = -6{,}0\text{ m}$.

d) Nopeus on $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{-6{,}0\text{ m}}{1{,}0\text{ s}} = -6{,}0\text{ m/s}$: nopeus on 6,0 m/s, suunta taaksepäin.

e) Kappaleen siirtymä aikavälillä 0,0…3,0 s on $\Delta x = x_2 - x_1 = (-2{,}0\text{ m}) - (2{,}0\text{ m}) = -4{,}0\text{ m}$.

1-3. **a)** Aluksi auto liikkuu eteenpäin 3,0 s ajan vakionopeudella. Tämän jälkeen auto lähtee taaksepäin pienemmällä nopeudella. Hetkellä 10,0 s auto on lähtöpaikassaan. Matka jatkuu vielä tästä taaksepäin, ja lopuksi auton paikka on 6,0 m lähtöpaikasta taaksepäin.

b) Kappaleen aikavälillä 0,0…10,0 s kulkema matka on

$s = 6{,}0\text{ m} + 6{,}0\text{ m} = 12\text{ m}$.

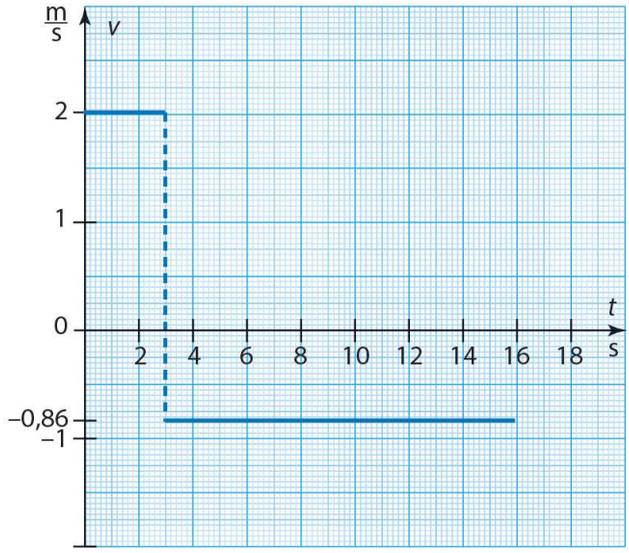
c) Nopeudet ovat

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{6{,}0\ \text{m} - 0{,}0\ \text{m}}{3{,}0\ \text{s} - 0{,}0\ \text{s}} = \frac{6{,}0\ \text{m}}{3{,}0\ \text{s}} = 2{,}0\ \text{m/s}, \text{ suunta eteenpäin.}$$

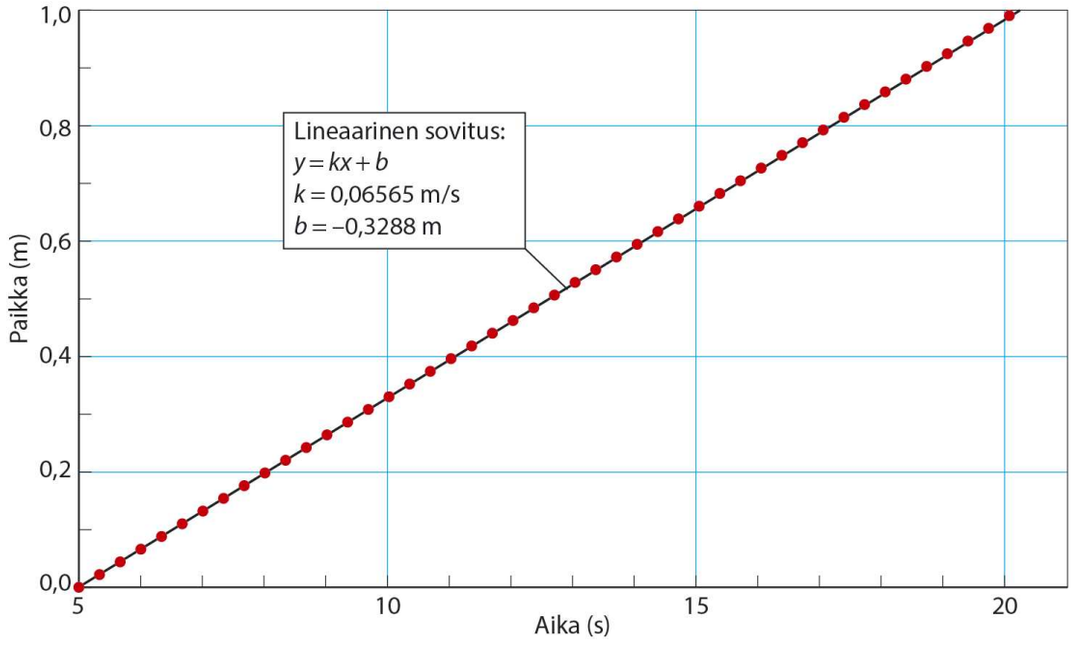
ja

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0{,}0\ \text{m} - 6{,}0\ \text{m}}{10{,}0\ \text{s} - 3{,}0\ \text{s}} = \frac{-6{,}0\ \text{m}}{7{,}0\ \text{s}} \approx -0{,}86\ \text{m/s}$$: nopeus on 0,86 m/s, suunta taaksepäin.

d) Nopeuden kuvaaja:

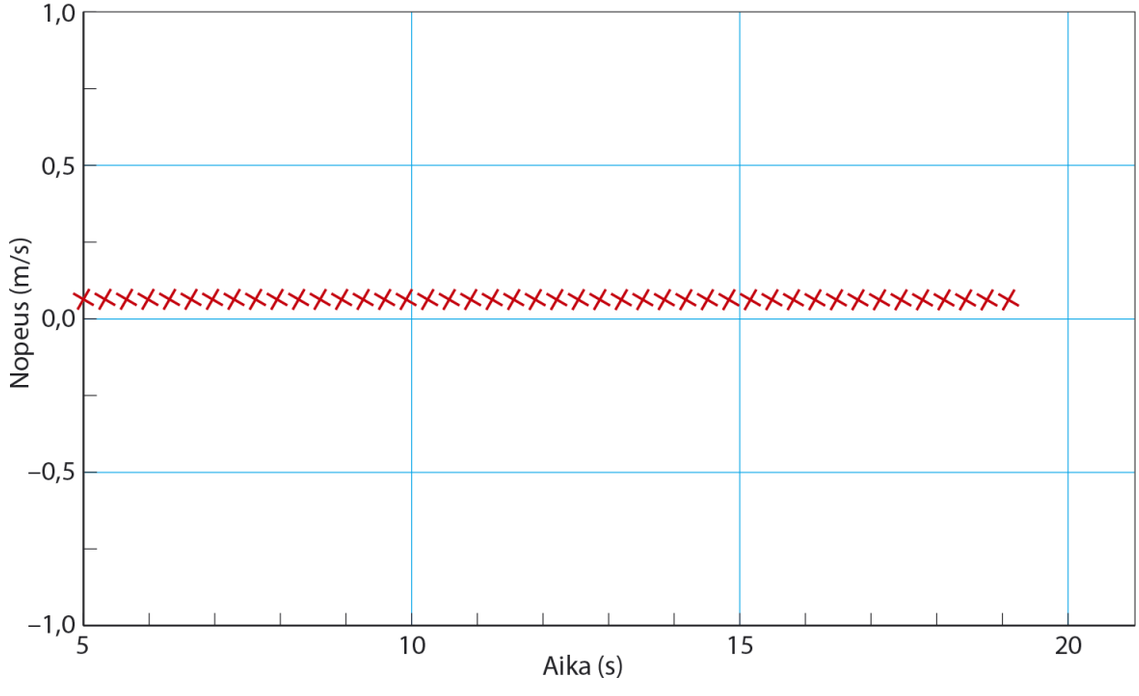


1-4. **a)** Paikan kuvaaja:



Suoran fysikaalinen kulmakerroin on kysytty ilmakuplan nopeus eli $v = 6{,}6$ cm/s.

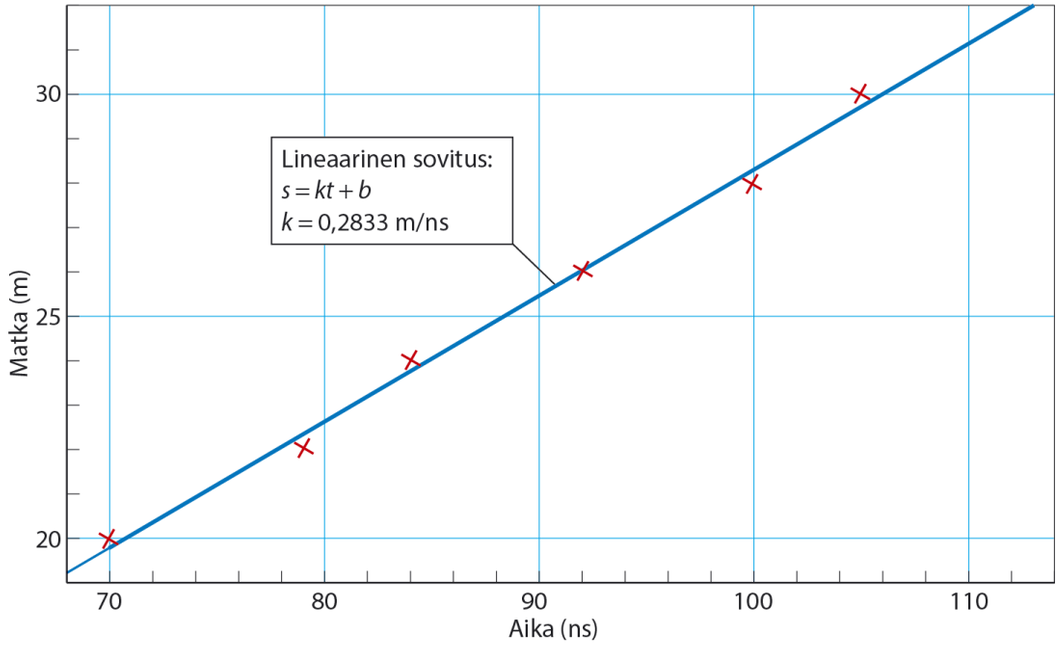
b) Nopeuden kuvaaja:



1-5. Koska valo heijastuu peilistä takaisin, peilin etäisyys on kerrottava kahdella, jotta saadaan valon kulkema matka.

t (ns)	s (m)
70	20,00
79	22,00
84	24,00
92	26,00
100	28,00
105	30,00
113	32,00

Viedään mittausdata mittausohjelmaan.



Suoran fysikaalinen kulmakerroin on kysytty valon nopeus eli $c = 0{,}2833 \text{ m/ns} \approx 2{,}8 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

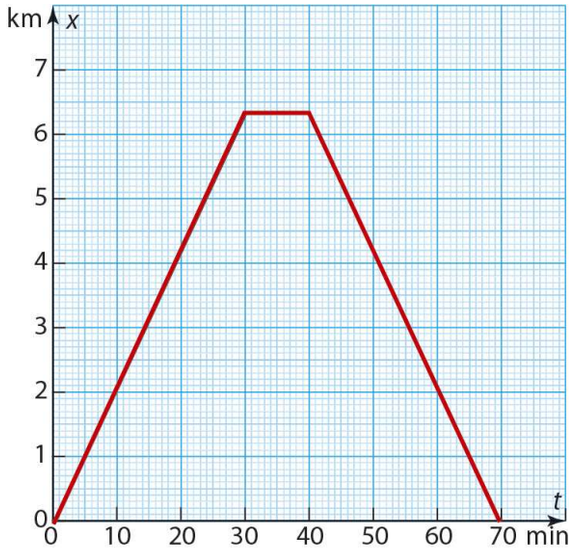
1-6. Valitaan liikkeen positiiviseksi suunnaksi liikkeen alkusuunta, paikan nollakohdaksi lähtöpiste (origo) ja ajan nollakohdaksi liikkeelle lähtemisen hetki.

Paikka 30 minuutin kuluttua on

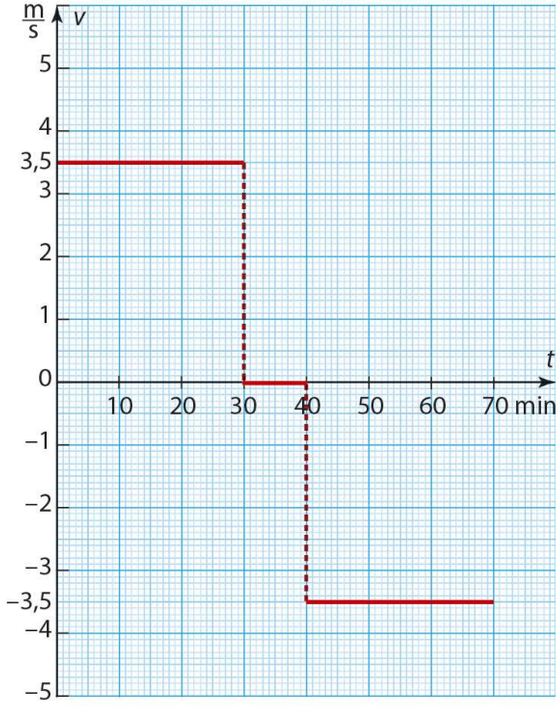
$s = vt = 3{,}5 \text{ m/s} \cdot 1800 \text{ s} = 6300 \text{ m} = 6{,}3 \text{ km}.$

Koska paluumatkalla nopeus on myös 3,5 m/s, paluumatkaan kuluu aikaa 30 min. Kokonaisaika on siis 70 min.

Liike t,x-koordinaatistossa:



Liike t,v-koordinaatistossa:



1-7. Jääpalan paikka on $x = x_0 + vt = 2{,}3\text{ m} + 1{,}9\text{ m/s} \cdot 4{,}5\text{ s} \approx 11\text{ m}$.

1-8. Oikea vaihtoehto on b.

Paikan yhtälöstä $x = x_0 + vt$ nopeus on

$$v = \frac{x - x_0}{t} = \frac{8{,}3\text{ m} - 0{,}35\text{ m}}{6{,}1\text{ s}} \approx 1{,}3\text{ m/s}.$$

1-9. Pesäpallon nopeus on 150 km/h ≈ 41,6667 m/s. Reaktioajassa 0,20 s pallo kulkee matkan

$s = vt = 41{,}6667\text{ m/s} \cdot 0{,}20\text{ s} \approx 8{,}3\text{ m}$.

Siepparin tulee olla vähintään noin 8,3 m etäisyydellä lyöjästä ehtiäkseen reagoida palloon.

1-10. Ääneltä kuluva aika on $\Delta t_{\text{ääni}} = \frac{\Delta x}{v_{\text{ääni}}} = \frac{16{,}5\text{ m}}{340\text{ m/s}} \approx 0{,}048529\text{ s}$.

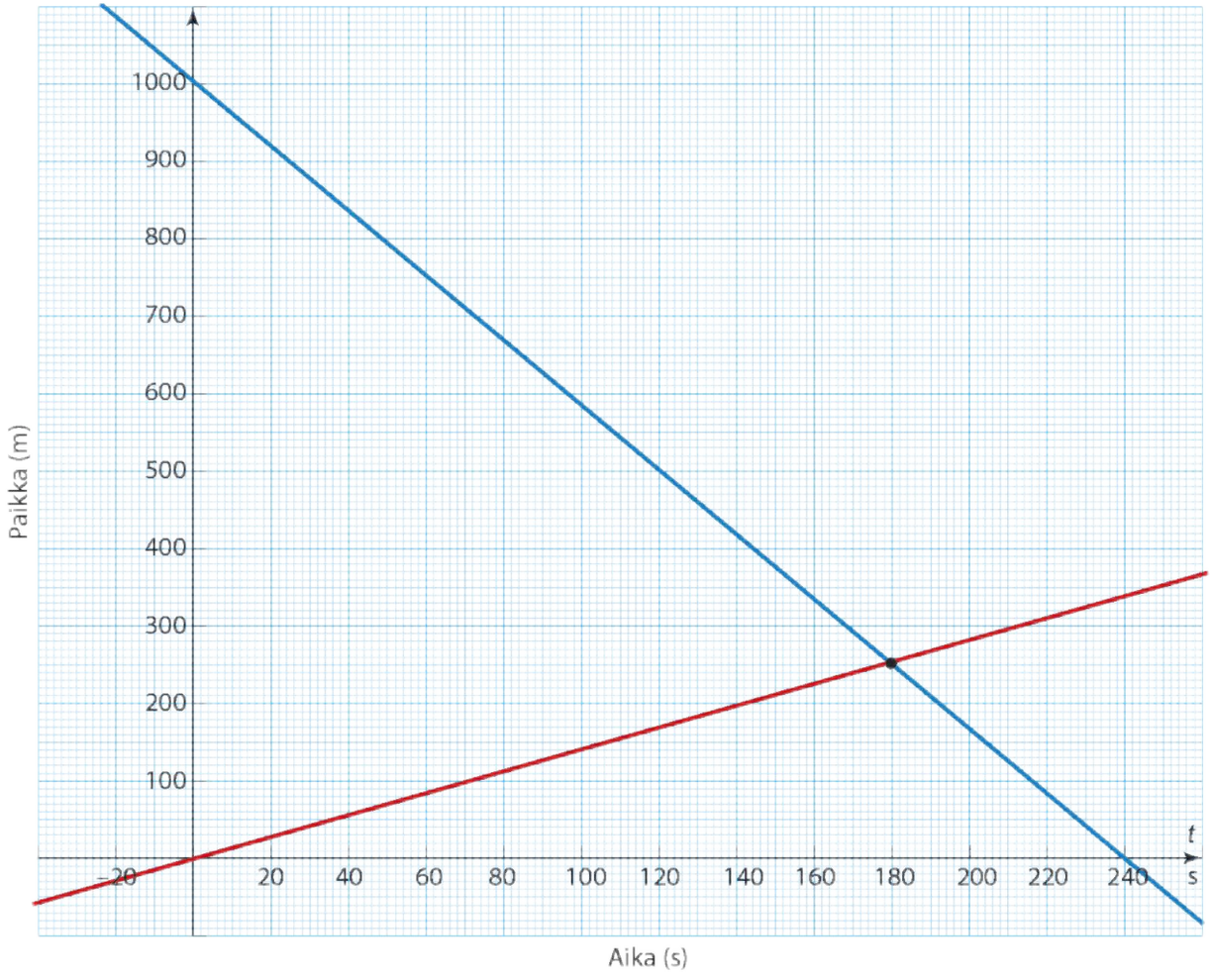
Keilapallon matkaan kuluva aika on

$\Delta t_{\text{kp}} = \Delta t - \Delta t_{\text{ääni}} = 2{,}4\text{ s} - 0{,}048529\text{ s} = 2{,}35147\text{ s}$.

Keilapallon nopeus on $v_{\text{kp}} = \frac{\Delta x}{\Delta t_{\text{kp}}} = \frac{16{,}5\text{ m}}{2{,}35147\text{ s}} \approx 7{,}0\text{ m/s}$.

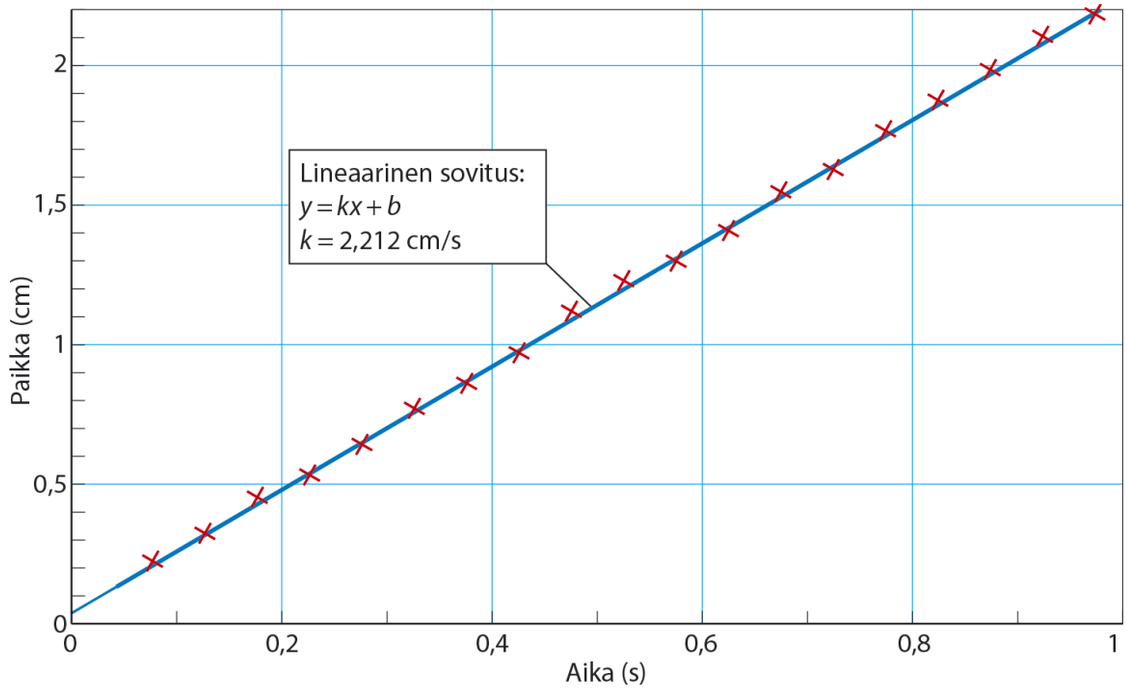
1-11. **a)** Valitaan liikkeen positiiviseksi suunnaksi Sinin liikkeen suunta, paikan nollakohdaksi Sinin lähtöpiste ja ajan nollakohdaksi liikkeelle lähtemisen hetki. Tällöin Sinin rata on suora, joka alkaa origosta ja jonka fysikaalinen kulmakerroin on 5,0 km/h ≈ 1,4 m/s.

Jonin rata on suora, joka lähtee pisteestä $(t, x) = (0, 1000\ \text{m})$ ja jonka kulmakerroin on -15 km/h ≈ $-$ 4,2 m/s. Suoran kulmakerroin on negatiivinen, koska Jonin siirtymä x on negatiivinen.



b) Kuvasta todetaan, että Sini ja Joni kohtaavat pisteessä $(t,x) \approx (180\ \text{s}, 250\ \text{m})$. Kohtaamispaikka on siis 250 m etäisyydellä Sinin lähtöpisteestä ja aikaa lähdöstä on kulunut 180 s.

1-12. Koska kappaleen paikan kuvaaja on suora, kappaleen liike on tasaista.



Kappaleen nopeus oli 2,2 cm/s.

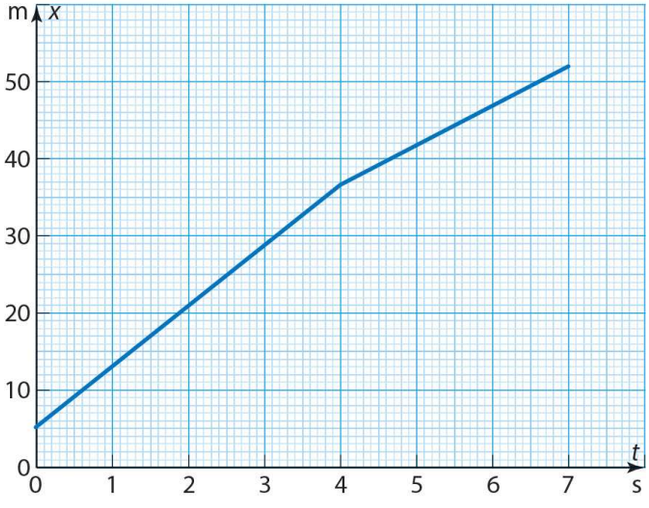
1-13. Kappaleen nopeus aikavälillä 0,0…4,0 s on 8,0 m/s ja aikavälillä 4,0…7,0 s on 5,0 m/s. Kappaleen paikka

– hetkellä 0,0 s on $x_0 = 5{,}0$ m

– hetkellä 4,0 s on $x = x_0 + vt = 5{,}0\text{ m} + 8{,}0\text{ m/s} \cdot 4{,}0\text{ s} = 37$ m ja

– hetkellä 7,0 s on $x = x_0 + vt = 37\text{ m} + 5{,}0\text{ m/s} \cdot 3{,}0\text{ s} = 52$ m.

Kappaleen rata:

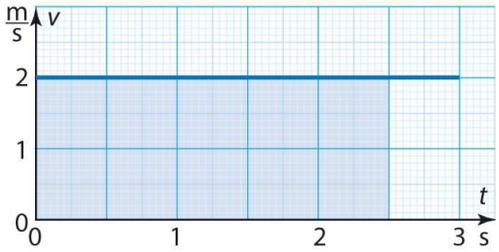


1-14 **a)** Tasaisessa liikkeessä olevan kappaleen nopeus on

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{5{,}5\,\text{m} - 1{,}5\,\text{m}}{2{,}0\,\text{s} - 0{,}0\,\text{s}} = \frac{4{,}0\,\text{m}}{2{,}0\,\text{s}} = 2{,}0\,\text{m/s}.$$

Kappaleen paikan yhtälö on $x = x_0 + vt$. Koska kappaleen paikka hetkellä $t_0 = 0$ s on $x_0 = 1{,}5$ m ja kappaleen nopeus $v_0 = 2{,}0$ m/s, kappaleen paikan riippuvuus ajasta on $x = 1{,}5\,\text{m} + 2{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$.

b) Kappaleen nopeus t, v-koordinaatistossa:



Kappaleen aikavälillä 0…2,5 s kulkema matka saadaan fysikaalisena pinta-alana:

$\Delta s = v \cdot \Delta t = 2{,}0$ m/s $\cdot$ 2,5 s = 5,0 m.

TEHTÄVIEN RATKAISUT

2-1. **a)** Mopoauto on lähtenyt liikkeelle levosta.

Aikavälillä 0,0…6,0 s mopoauton nopeus kasvaa tasaisesti.

Aikavälillä 6,0…10,0 s mopoauto etenee vakionopeudella.

Aikavälillä 10,0…14,0 s mopoauton nopeus pienenee tasaisesti, ja lopuksi mopoauto pysähtyy.

b) Aikavälillä 0,0…6,0 s mopoauton kiihtyvyys on

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{12{,}0\,\text{m/s} - 0{,}0\,\text{m/s}}{6{,}0\,\text{s} - 0{,}0\,\text{s}} = 2{,}0\ \text{m/s}^2.$$

Aikavälillä 6,0…10,0 s liike on tasaista, joten kiihtyvyys $a = 0\ \text{m/s}^2$.

Aikavälillä 10,0…14,0 s kiihtyvyys on

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{0{,}0\,\text{m/s} - 12{,}0\,\text{m/s}}{14{,}0\,\text{s} - 10{,}0\,\text{s}} = -3{,}0\ \text{m/s}^2$$: kiihtyvyys on 3,0 m/s^2, kiihtyvyyden suunta on nopeuden suunnalle vastakkainen.

c) Mopoauton 14,0 sekunnin aikana kulkema matka saadaan t,v-koordinaatistosta fysikaalisena pinta-alana. Kuvaajan ja t-akselin rajaama kuvio on puolisuunnikas. Kuljettu matka on

$$s = \frac{14{,}0\,\text{s} + 4{,}0\,\text{s}}{2} \cdot 12{,}0\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 110\ \text{m}.$$

2-2. **a)** Nopeus alkuhetkellä on 75 km/h ≈ 21 m/s ja 3,0 sekunnin kuluttua 101 km/h ≈ 28 m/s.

Nopeuden kuvaaja:

b) Koska liike on tasaisesti kiihtyvää, keskinopeus voidaan laskea alku- ja loppunopeuden keskiarvona:

$$v_k = \frac{v_0 + v}{2} = \frac{75\ \text{km/h} + 101\ \text{km/h}}{2} = 88\ \text{km/h}.$$

c) Kappaleen kulkema matka on

$$x = v_k \cdot t = \frac{88}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3{,}0\,\text{s} \approx 73\ \text{m}.$$

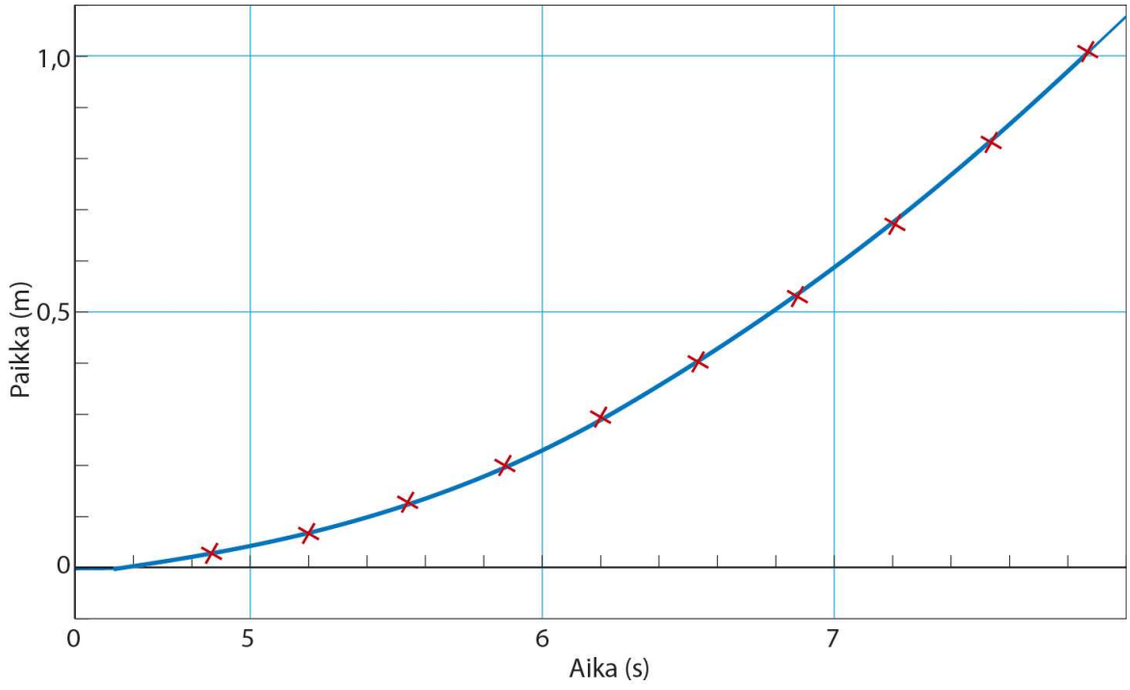
2-3. Tasaisesti kiihtyvään liikkeeseen liittyvät kuvaajat ovat a ja c.

2-4. **a)** Moottorikelkan loppunopeus on $v = at = 4{,}0\ \text{m/s}^2 \cdot 10{,}0\ \text{s} = 40\ \text{m/s}$.

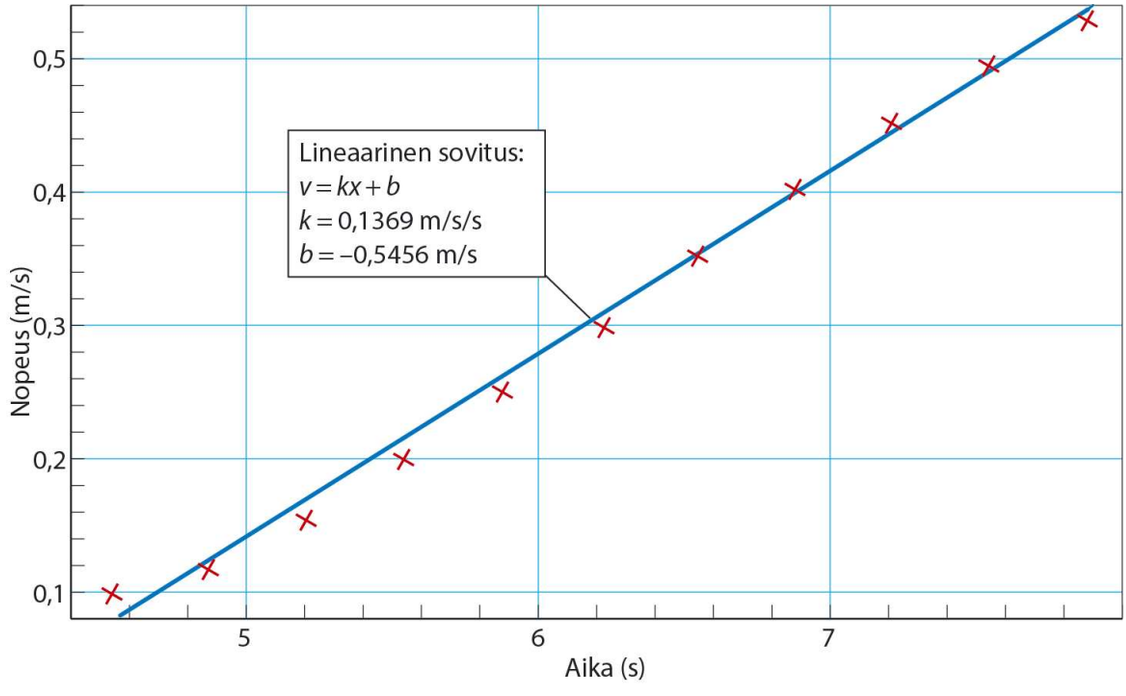
b) Kelkan keskinopeus on $v_k = \frac{v_0 + v}{2} = \frac{0\ \text{m/s} + 40\ \text{m/s}}{2} = 20\ \text{m/s}$.

c) Kelkka kulkee matkan $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 4{,}0\,\text{m/s}^2 \cdot (10{,}0\,\text{s})^2 = 200\ \text{m}$.

2-5. Paikan kuvaaja:



Nopeuden kuvaaja:



Kappaleen liike on mittaustarkkuuden rajoissa tasaisesti kiihtyvää. Kiihtyvyys saadaan aika-nopeus-koordinaatistosta fysikaalisena kulmakertoimena; kiihtyvyys on 0,14 m/s^2.

2-6. **a)** Moottoripyörän kiihtyvyys on

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{25\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3{,}0\,\text{s}} = \frac{10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3{,}0\,\text{s}} = 3{,}33333\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 3{,}3\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

b) Ohituksen aikana pyörä kulkee matkan

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3{,}0\,\text{s} + \frac{1}{2} \cdot 3{,}33333\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (3{,}0\,\text{s})^2 \approx 60\ \text{m}.$$

2-7. **a)** Kiihtyvyys jarrutuksen aikana on

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0\ \text{km/h} - 45\ \text{km/h}}{4{,}0\ \text{s}} = \frac{-\frac{45}{3{,}6}\ \text{m/s}}{4{,}0\ \text{s}} = -3{,}125\ \text{m/s}^2 \approx -3{,}1\ \text{m/s}^2.$$

Kiihtyvyys on 3,1 m/s^2, kiihtyvyyden suunta on nopeuden suunnalle vastakkainen.

b) Jarrutuksen aikana kuljettu matka on

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = \frac{45}{3{,}6}\text{m/s} \cdot 4{,}0\,\text{s} + \frac{1}{2} \cdot (-3{,}125\ \text{m/s}^2) \cdot (4{,}0\,\text{s})^2 = 25\ \text{m}.$$

c) Reaktioaikana skootterin kulkema matka on

$$s = vt = \frac{45}{3{,}6}\ \text{m/s} \cdot 0{,}50\ \text{s} = 6{,}25\ \text{m}.$$

Skootterin kulkema matka on 25 m + 6,25 m ≈ 31 m.

2-8. **a)** Tilanteessa A jarrupoljinta painetaan ensin kevyesti, mutta painaminen kasvaa jarrutuksen edetessä. Tilanteessa B jarrupoljinta painetaan koko ajan samalla voimakkuudella.

Tilanteessa C jarrupoljinta painetaan ensi hyvin voimakkaasti, mutta jarrutuksen edetessä poljinta löysätään hieman.

b) Kuljettu matka saadaan *t*,*v*-koordinaatistosta fysikaalisena pinta-alana.

Koska käyrän C ja koordinaattiakselien rajaama pinta-ala on pienin, on

tämän mallin mukaan myös jarrutusmatka pienin jarrutettaessa mallin C mukaan.

c) Jarrutusmatka saadaan fysikaalisena pinta-alana:

$$\begin{aligned} s &= v_1 t_1 + v_2 t_2 + v_3 t_3 \\ &= 5{,}0\ \text{m/s} \cdot 0{,}90\ \text{s} + \frac{15{,}0\ \text{m/s} \cdot 0{,}90\,\text{s}}{2} + \frac{5{,}0\ \text{m/s} \cdot 1{,}20\,\text{s}}{2} \\ &= 14{,}25\ \text{m} \approx 14\ \text{m}. \end{aligned}$$

2-9. **a)** Sijoitetaan yhtälö $v = v_0 + at$ yhtälöön $\Delta x = v_k t$:

$$\begin{aligned} \Delta x = v_k t &= \frac{v_0 + v}{2} \cdot t = \frac{v_0 + (v_0 + at)}{2} \cdot t = \frac{2v_0 + at}{2} \cdot t \\ &= \left(v_0 + \frac{1}{2} at \right) \cdot t = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2. \end{aligned}$$

Koska $\Delta x = x - x_0$, saadaan $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$.

b) Yhtälöstä $v = at$ saadaan $t = \frac{v}{a}$, joka sijoitetaan:

$$x = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} a \frac{v^2}{a^2} = \frac{1}{2} \frac{v^2}{a}.$$

Yhtälöstä saadaan $2ax = v^2$, josta nopeudeksi saadaan $v = \sqrt{2ax}$.

c) Loppunopeus on $v = \sqrt{2ax} = \sqrt{2 \cdot 8{,}5\ \text{m/s}^2 \cdot 15\ \text{m}} \approx 16\ \text{m/s}$.

2-10. **a)** Koska hissin kiihtyvyys on vakio, ja hissi lähtee levosta ($v_0 = 0$ m/s), hissin keskinopeus ensimmäisen 5,0 m matkalla on $v_k = \frac{v_0 + v}{2} = \frac{v}{2}$, jossa v on tällä matkalla saavutettu loppunopeus ja myös hissin nopeus tasaisen liikkeen aikana.

Ensimmäisen 5,0 m matkalla hissin keskinopeus on

$$v_{\mathrm{k}} = \frac{s}{t} = \frac{5{,}0\ \mathrm{m}}{2{,}5\ \mathrm{s}} = 2{,}0\ \mathrm{m/s}.$$

Hissin loppunopeus ensimmäisen osuuden jälkeen eli hissin nopeus tasaisen liikkeen aikana on

$v = 2v_{\mathrm{k}} = 2 \cdot 2{,}0\ \mathrm{m/s} = 4{,}0\ \mathrm{m/s}.$

b) Hissi kulkee 19 kerrosväliä eli matkan $19 \cdot 2{,}8\ \mathrm{m} = 53{,}2\ \mathrm{m}$. Jarrutusmatka on $53{,}2\ \mathrm{m} - 5{,}0\ \mathrm{m} - 44{,}0\ \mathrm{m} = 4{,}2\ \mathrm{m}$ ja tähän kuluva aika

$$t = \frac{s}{v_{\mathrm{k}}} = \frac{4{,}2\,\mathrm{m}}{\frac{4{,}0\ \mathrm{m/s} + 0{,}0\ \mathrm{m/s}}{2}} = 2{,}1\ \mathrm{s}.$$

Koska hissi kulkee 44,0 m vakionopeudella, tähän kuluu aikaa

$$t = \frac{s}{v} = \frac{44{,}0\,\mathrm{m}}{4{,}0\,\mathrm{m/s}} = 11\ \mathrm{s}.$$

Koko matkaan kuluva aika on $2{,}5\ \mathrm{s} + 2{,}1\ \mathrm{s} + 11\ \mathrm{s} \approx 16\ \mathrm{s}$.

2-11. Yhtälöstä $v = at$ kiihdytykseen ja myös jarrutukseen kuluva aika on

$$t = \frac{v}{a} = \frac{\frac{155}{3{,}6}\ \mathrm{m/s}}{1{,}1\ \mathrm{m/s^2}} \approx 39{,}1414\ \mathrm{s}$$

eli kaikkiaan $2 \cdot 39{,}1414 = 78{,}2828\ \mathrm{s} = 1{,}3047\ \mathrm{min}$.

Tässä ajassa kuljettu matka (kiihdytys ja jarrutus) on

$$s = \frac{1}{2}at^2 + \frac{1}{2}at^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}at^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}1\ \mathrm{m/s^2} \cdot (39{,}1414\ \mathrm{s})^2 \approx 1{,}68525\ \mathrm{km}.$$

Huippunopeudella voidaan ajaa matka

$145\ \mathrm{km} - 1{,}68525\ \mathrm{km} \approx 143{,}315\ \mathrm{km}.$

Tähän kuluu aikaa

$$t = \frac{s}{v} = \frac{143{,}315\ \text{km}}{155\ \text{km/h}} \approx 0{,}92461\ \text{h} = 55{,}4768\ \text{min}.$$

Lyhin aika on 55,4768 min + 1,3047 min ≈ 57 min.

2-12. **a)** Koska kuula on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä, kuulan keskinopeus saadaan yhtälöstä $v_\text{k} = \frac{v_0 + v}{2}$. Koska kuula lähtee levosta, on $v_0 = 0$ m/s ja keskinopeuden yhtälö saadaan muotoon $v_\text{k} = \frac{v}{2}$. Kuulan loppunopeudeksi saadaan $v = 2v_\text{k} = 2 \cdot 1{,}9\ \text{m/s} = 3{,}8\ \text{m/s}$.

b) Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä olevan kappaleen nopeuden yhtälö on $v = v_0 + at$. Koska alkunopeus on $v_0 = 0$ m/s, loppunopeus on $v = at$, josta saadaan kiihtyvyys $a = \frac{v}{t}$. Jotta kiihtyvyys voidaan laskea, on tiedettävä liikkeen kesto eli aika t.

Yhtälöstä $x = v_\text{k}t$ saadaan aika $t = \frac{x}{v_\text{k}} = \frac{1{,}70\ \text{m}}{1{,}9\ \text{m/s}} \approx 0{,}894737\ \text{s}$.

Kiihtyvyys on $a = \frac{v}{t} = \frac{3{,}8\,\text{m/s}}{0{,}894737\,\text{s}} \approx 4{,}2\,\text{m/s}^2$.

2-13. Oikein on b.

Laskijan kulkema matka on $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ eli $\frac{1}{2}at^2 + v_0 t - s = 0$.
Ratkaistaan yhtälö toisen asteen ratkaisukaavaa käyttäen ja huomioidaan alkuarvot $a = 5{,}4\ \text{m/s}^2$, $v_0 = 22$ m/s ja $s = 25$ m:

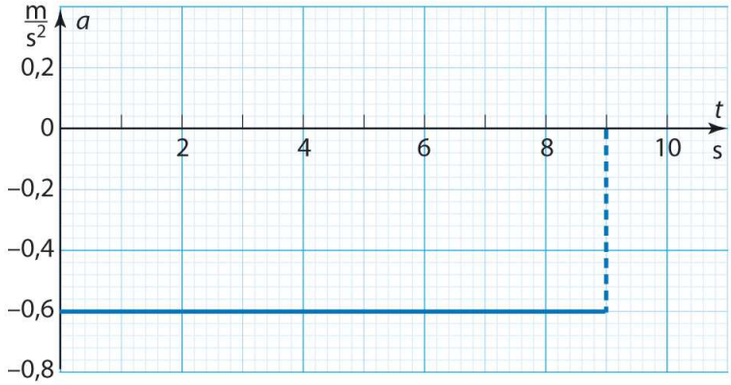
$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{{v_0}^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}a \cdot (-s)}}{2 \cdot \frac{1}{2}a} = \frac{-22\ \text{m/s} \pm \sqrt{(22\ \text{m/s})^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (5{,}4\ \text{m/s}^2) \cdot (-25\ \text{m})}}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (5{,}4\ \text{m/s}^2)}$$

Yhtälön ratkaisut ovat $t_1 \approx 1{,}01094$ s tai $t_2 \approx -9{,}15909$ s. Ajan negatiivinen arvo ei käy, joten kysytty aika on 1,0 s.

2-14. **a)** Nopeuden kuvaaja on suora, joten kiihtyvyys on vakio. Kiihtyvyys saadaan kuvaajan fysikaalisena kulmakertoimena:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0{,}0 \text{ m/s} - 3{,}65 \text{ m/s}}{9{,}0 \text{ s} - 3{,}0 \text{ s}} \approx -0{,}61 \text{ m/s}^2.$$

Raitiovaunun kiihtyvyyden kuvaaja:



b) Matka saadaan t, v-kuvaajasta fysikaalisena pinta-alana:

$$s = \frac{1}{2} \cdot 9{,}0 \text{ s} \cdot 5{,}5 \text{ m/s} \approx 25 \text{ m}.$$

(Vaihtoehtoisesti matkan voi laskea yhtälöstä

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 5{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 9{,}0 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot \left(-0{,}608333 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \cdot (9{,}0 \text{ s})^2 \approx 25 \text{ m}.)$$

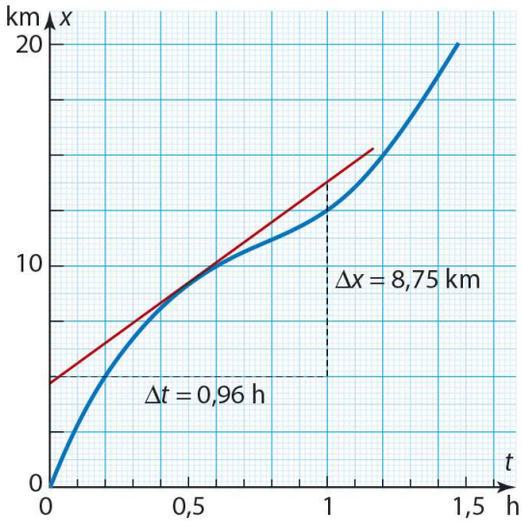
TEHTÄVIEN RATKAISUT

3-1. **a)** Pyöräilijän paikka hetkellä 0,20 h on 5,0 km ja hetkellä 1,00 h on 12,5 km.

b) Pyöräilijän keskinopeus välillä 0,20…1,00 h on

$$v_{\mathrm{k}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{12{,}5\ \mathrm{km} - 5{,}0\ \mathrm{km}}{1{,}00\ \mathrm{h} - 0{,}20\ \mathrm{h}} = \frac{7{,}5\ \mathrm{km}}{0{,}80\ \mathrm{h}} \approx 9{,}4\ \mathrm{km/h}.$$

c)

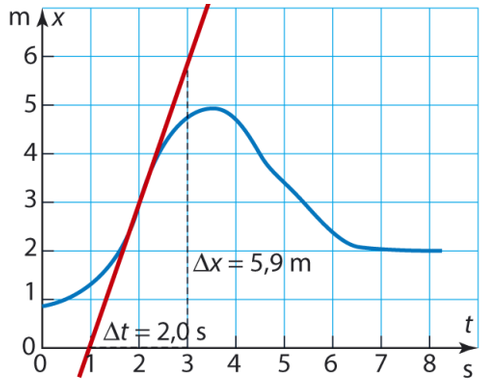


Nopeus hetkellä 0,50 h saadaan tangentin fysikaalisena kulmakertoimena:

$$v(0{,}50\,\mathrm{h}) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{8{,}75\ \mathrm{km}}{0{,}96\ \mathrm{h}} \approx 9{,}1\ \mathrm{km/h}.$$

3-2. **a)** Kappaleen nopeus on suurin hetkellä 2,0 s, koska tällöin kuvaaja on jyrkin.

b)

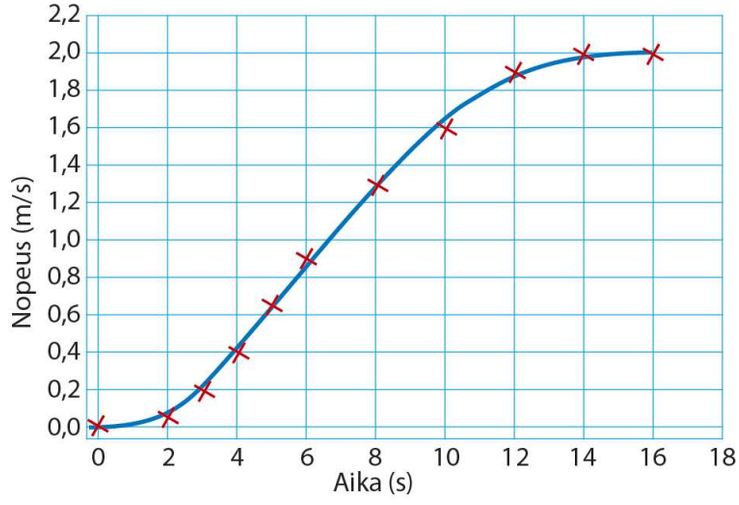


Suurin nopeus on $v(2{,}0\,\text{s}) = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{5{,}9\ \text{m}}{2{,}0\ \text{s}} \approx 3{,}0\ \text{m/s}$.

c) Kappaleen pienin nopeus on 0 m/s.

d) Kappaleen liikkeen suunta muuttuu hetkellä 3,5 s.

3-3. **a)** Nopeuden kuvaaja.

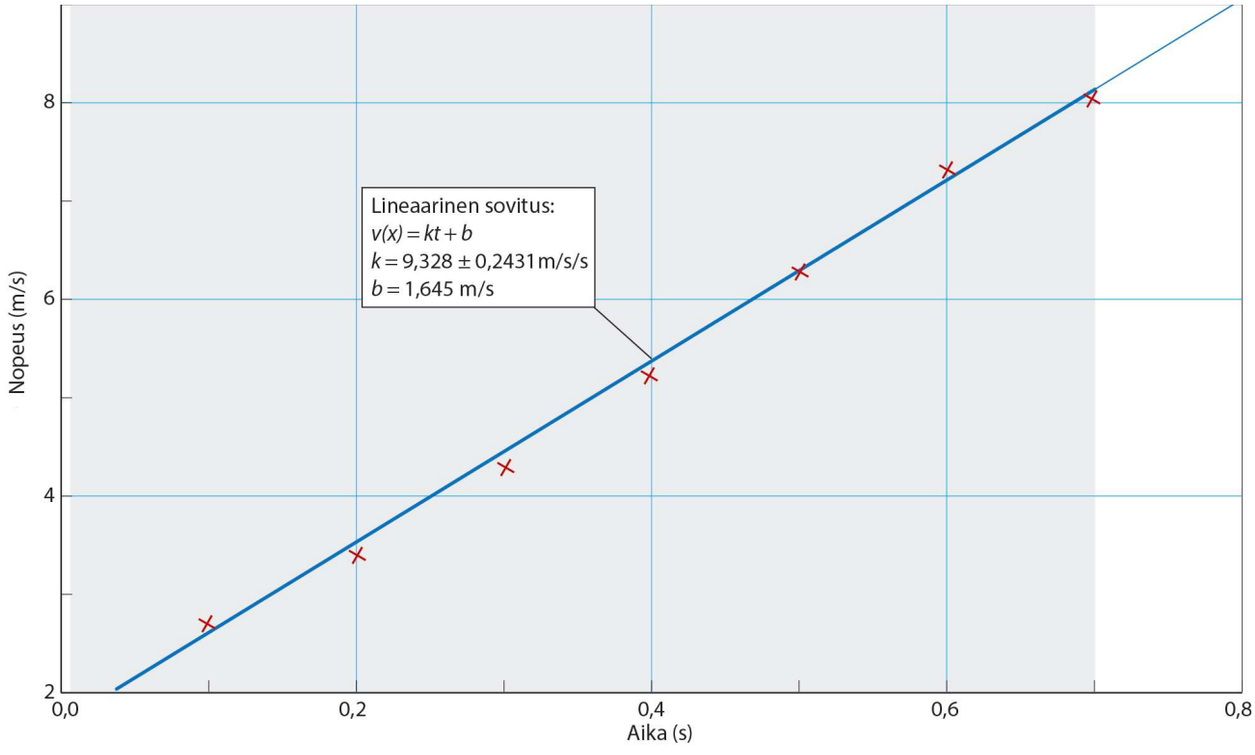


b) Mittausohjelman mukaan matka on 18 m.

Matkan voi myös laskea t,v-koordinaatistosta graafisen integroinnin avulla. Kuvaajan ja aika-akselin väliin jäävä pinta-ala on 45 ruutua. Kukin ruutu vastaa matkaa 0,20 m/s · 2,0 s = 0,40 m. Kokonaismatka aikavälillä 0…16 s on 45 · 0,40 m = 18 m.

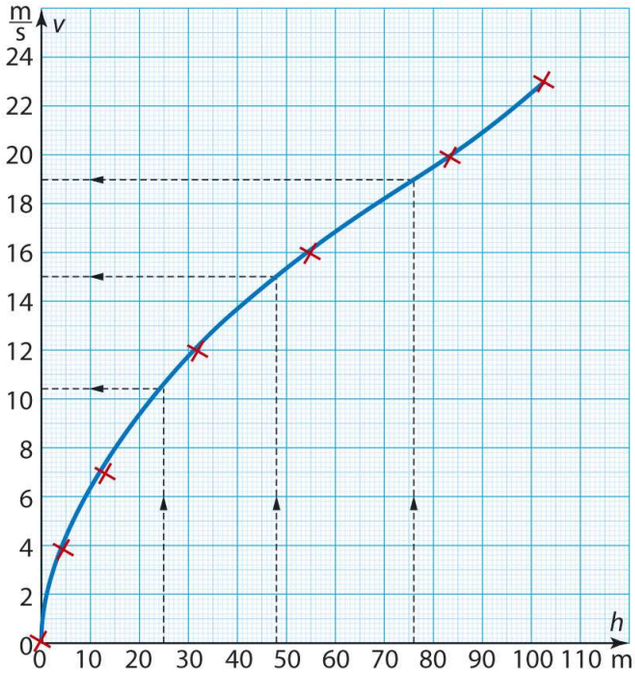
c) Keskinopeus saadaan kohdan b avulla jakamalla kokonaismatka siihen kuluneella ajalla: $v_k = \frac{s}{t} = \frac{18\,\text{m}}{16\,\text{s}} \approx 1{,}1\ \text{m/s}$.

3-4. Pallon nopeuden kuvaaja:



Pallon kiihtyvyys on 9,3 m/s² ± 0,2 m/s².

3-5. **a)** Nopeuden kuvaaja korkeuden funktiona:



b) Kun raketin lentokorkeus on 76 m, sen nopeus on 19 m/s.

c) Kun raketti on korkeudella 25 m, sen nopeus on 10,5 m/s.

Kun raketti on korkeudella 48 m, sen nopeus on 15,0 m/s.

Raketin keskikiihtyvyys aikavälillä 4,0…6,0 s on

$$a_{\mathrm{k}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{15{,}0\,\mathrm{m/s} - 10{,}5\,\mathrm{m/s}}{6{,}0\,\mathrm{s} - 4{,}0\,\mathrm{s}} \approx 2{,}3\,\mathrm{m/s^2}.$$

3-6. **a)** Kuvaajasta saadaan kappaleiden siirtymät:

$\Delta x_{\mathrm{A}} = 3{,}0\ \mathrm{m} - 0{,}0\ \mathrm{m} = 3{,}0\ \mathrm{m}$ ja

$\Delta x_{\mathrm{B}} = 2{,}0\ \mathrm{m} - 0{,}7\ \mathrm{m} = 1{,}3\ \mathrm{m}.$

Koska kappaleet liikkuvat suoraviivaisesti, kappaleiden kulkemat matkat ovat samat kuin siirtymät.

b) Kummallakin kappaleella on sama keskinopeus, koska kummankin aikavälillä 2,0…10,0 s kulkema matka on sama:

$$v_{\mathrm{kA}} = v_{\mathrm{kB}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{3{,}8\ \mathrm{m} - 0{,}8\ \mathrm{m}}{10{,}0\ \mathrm{s} - 2{,}0\ \mathrm{s}} \approx 0{,}38\ \mathrm{m/s}.$$

c) Kappaleilla on sama nopeus silloin, kun nopeutta kuvaavat käyrien fysikaaliset kulmakertoimet ovat yhtä suuret eli hetkellä $t = 7{,}2$ s.

3-7. **a)** Metrojunan suurin nopeus on 30 m/s.

b) Junan kiihdytysaika on 45 s.

c) Junan jarrutusaika on 30 s.

d) Junan liike on tasaista 45 s.

e) Junan keskikiihtyvyys pysäkiltä lähdettäessä on

$$a_{\mathrm{k}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{30{,}0\ \mathrm{m/s} - 0{,}0\ \mathrm{m/s}}{45{,}0\ \mathrm{s} - 0{,}0\ \mathrm{s}} = \frac{30{,}0\ \mathrm{m/s}}{45{,}0\ \mathrm{s}} \approx 0{,}67\ \mathrm{m/s^2}.$$

ja jarrutettaessa ennen seuraavaa pysäkkiä

$$a_{\mathrm{k}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{0{,}0\ \mathrm{m/s} - 30\ \mathrm{m/s}}{120{,}0\ \mathrm{s} - 90{,}0\ \mathrm{s}} = \frac{-30\ \mathrm{m/s}}{30{,}0\ \mathrm{s}} = -1{,}0\ \mathrm{m/s^2}:$$

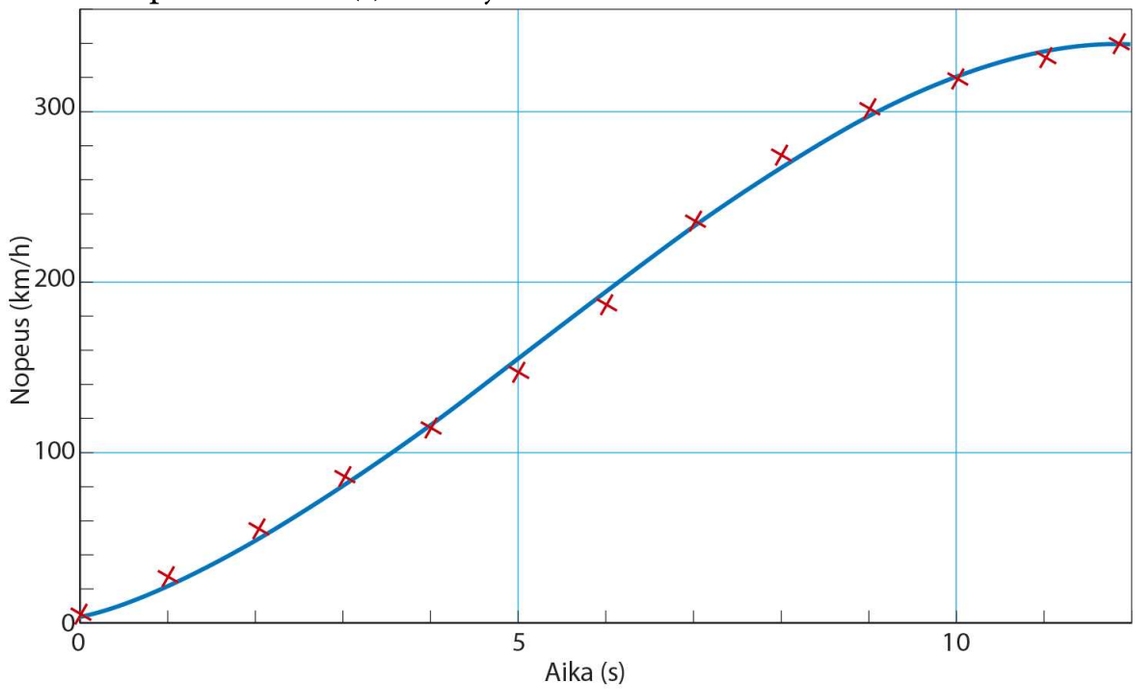
jarrutettaessa kiihtyvyys on 1,0 m/s², kiihtyvyyden suunta on nopeuden suunnalle vastakkainen.

f) Metroasemien välinen etäisyys saadaan fysikaalisena pinta-alana:

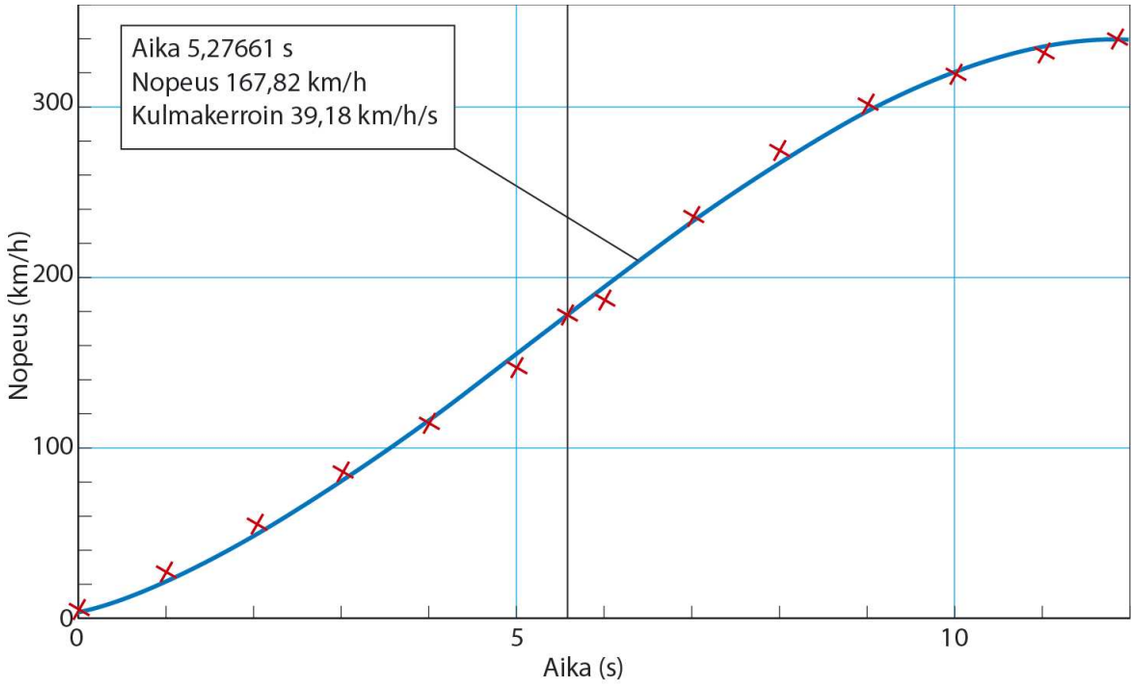
$$s = \frac{\Delta t_1 v}{2} + \Delta t_2 v + \frac{\Delta t_3 v}{2}$$

$$= \frac{45{,}0\,\mathrm{s} \cdot 30{,}0\,\mathrm{m/s}}{2} + (90{,}0\,\mathrm{s} - 45{,}0\,\mathrm{s}) \cdot 30{,}0\,\mathrm{m/s} + \frac{(120{,}0\,\mathrm{s} - 90{,}0\,\mathrm{s}) \cdot 30{,}0\,\mathrm{m/s}}{2} \approx 2{,}5\ \mathrm{km}.$$

3-8. Auton nopeuden $v = v(t)$ kuvaaja:



b) Mittausohjelman mukaan kiihtyvyyden suurin arvo saavutetaan hetkellä $t = 5{,}3$ s.



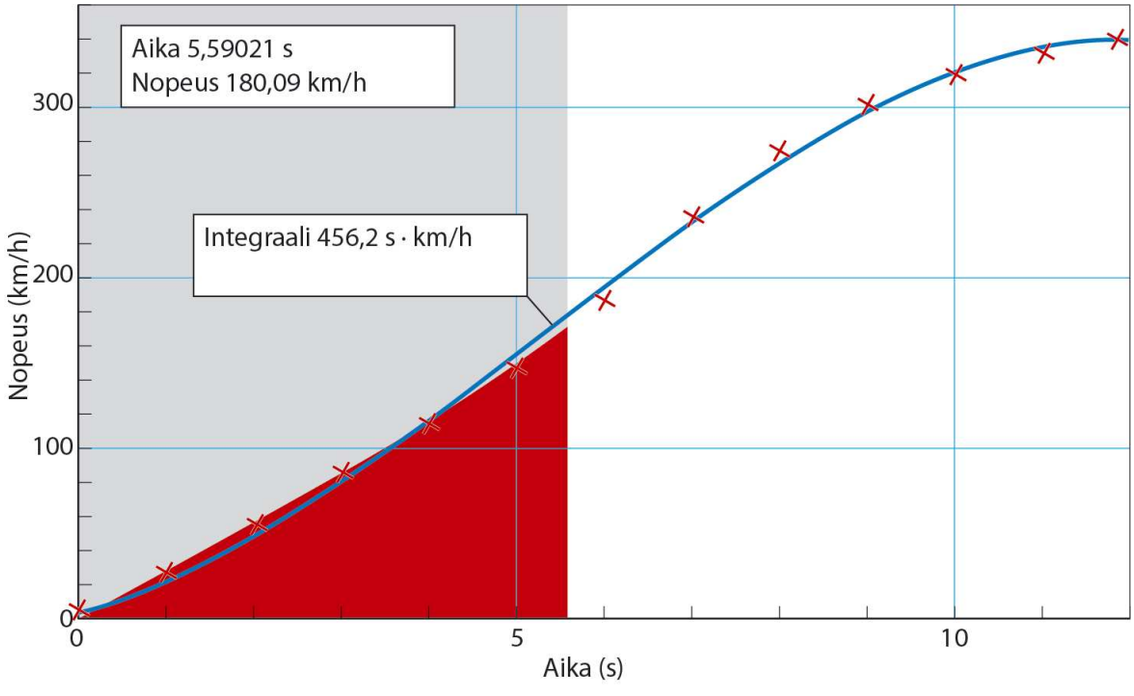
Suurin kiihtyvyys on

$$a_{\max}(5{,}3\,\text{s}) = \frac{39{,}18\ \text{km/h}}{\text{s}} = \frac{\frac{39{,}18}{3{,}6}\ \text{m/s}}{\text{s}} \approx 11\ \text{m/s}^2.$$

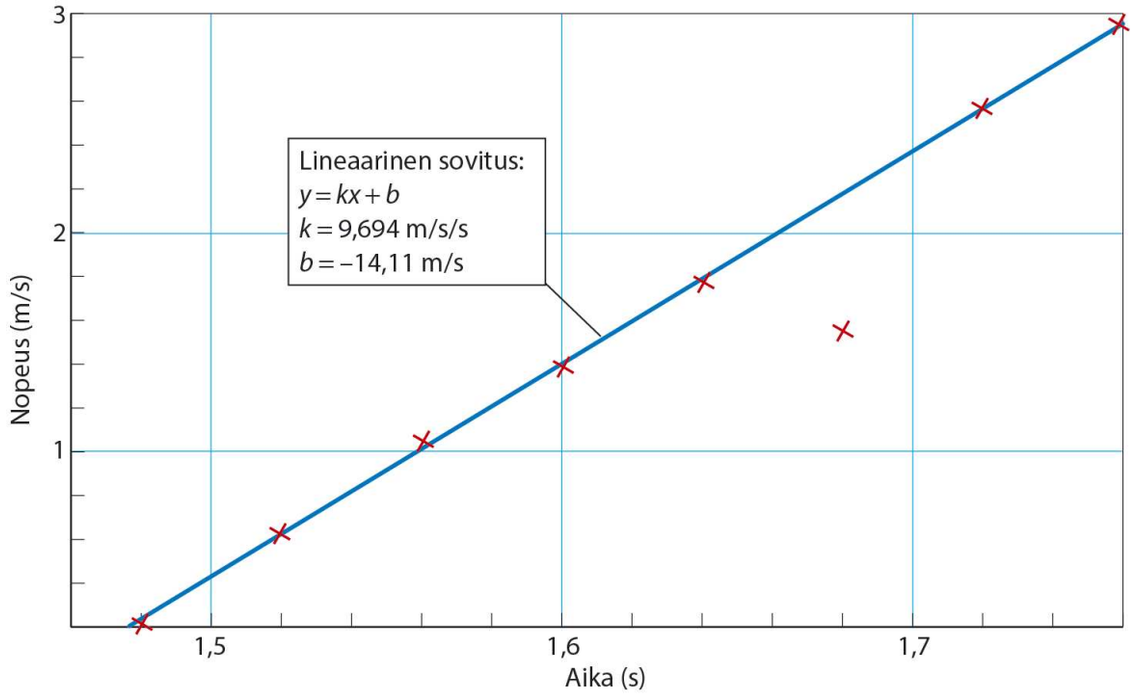
Huomaa, että ajanhetki riippuu hieman siitä, minkälainen käyrä on sovitettu pistejoukkoon.

c) Matka saadaan määritettyä t, v-koordinaatiston kuvaajasta fysikaalisena pinta-alana. Mittausohjelman mukaan matka on

$$s = 456{,}2\ \text{s} \cdot \text{km/h} = \frac{456{,}2}{3{,}6}\ \text{s} \cdot \text{m/s} \approx 130\ \text{m}.$$



3-9. Esitetään mittaustulokset t, v-koordinaatistossa. Mittauspisteet näyttäisivät pistettä (1,68 s, 1,57 m/s) lukuun ottamatta asettuvan suoralle; ko. havainto on epäonnistunut eikä mittauspistettä huomioida.



Mittausohjelman mukaan pallon putoamiskiihtyvyys on 9,7 m/s^2.

3-10. Paketti saa pudotuksessa vaakasuuntaisen alkunopeuden koneelta, joten tilanne vastaa vaakasuoraa heittoliikettä. Paketti putoaa alaspäin 550 m matkan.

Yhtälöstä $y = \frac{1}{2}gt^2$ paketin putoamiseen kuluva aika on

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 550 \text{ m}}{9{,}81 \text{ m/s}^2}} = 10{,}5892 \text{ s} \approx 11 \text{ s}.$$

Tänä aikana paketti liikkuu vaakasuunnassa matkan

$$s = vt = \frac{198}{3{,}6} \text{ m/s} \cdot 10{,}5892 \text{ s} = 582{,}406 \text{ m}.$$

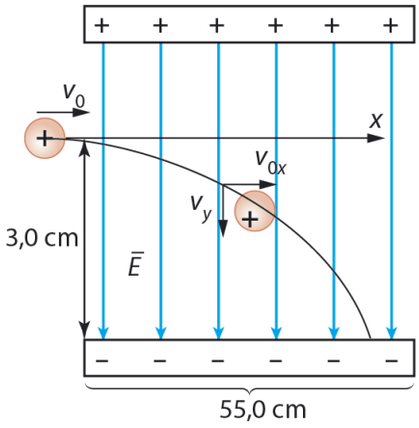
Kun ilmanvastusta ei oteta huomioon, paketti tulee pudottaa, kun kone on 580 m:n etäisyydellä kohteesta vaakasuunnassa mitattuna. Tällöin lentäjä näkee kohteen alaviistossa.

Suuntakulma saadaan yhtälöstä $\tan\alpha = \frac{s}{y} = \frac{582{,}406\ \text{m}}{550\ \text{m}}$,

josta kulma $\alpha \approx 47°$.

Pudotustilanteessa paketti jää ilmanvastuksen vaikutuksesta melko kauaksi kylästä, jos lentäjä ei osaa ottaa huomioon ilmanvastuksen vaikutusta. Paketin vaakasuora alkunopeus on suuri, jolloin ilmanvastus on suuri.

3-11. **a)** Protonin rata hahmoteltuna.



b) Protoni on pystysuunnassa tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä. Protonilla ei ole alkunopeutta pystysuunnassa. Valitaan suunta alas positiiviseksi.

Yhtälöstä $y = \frac{1}{2}at^2$ aika on

$$t = \sqrt{\frac{2y}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}030\ \text{m}}{1{,}2 \cdot 10^{13}\ \text{m/s}^2}} = 7{,}07107 \cdot 10^{-8}\ \text{s} \approx 7{,}1 \cdot 10^{-8}\ \text{s}.$$

c) Protonin nopeus vaakasuunnassa on vakio eli $v_{0x} = v_x = 6{,}5$ Mm/s.

Protonin ajassa $t = 7{,}07107 \cdot 10^{-8}$ s vaakasuunnassa kulkema matka on

$x = v_x t = 6{,}5 \cdot 10^6\ \text{m/s} \cdot 7{,}07107 \cdot 10^{-8}\ \text{s} \approx 0{,}46\ \text{m}.$

d) Kun protoni osuu negatiiviseen levyyn, sen nopeuden vaakasuora komponentti on $v_x = 6{,}5$ Mm/s. Nopeuden pystysuora komponentti on

$v_y = at = 1{,}2 \cdot 10^{13}\ \text{m/s}^2 \cdot 7{,}07107 \cdot 10^{-8}\ \text{s} = 8{,}48528 \cdot 10^5\ \text{m/s}.$

Protonin nopeuden suuruus sen osuessa negatiiviseen levyyn on

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(6{,}5 \cdot 10^6 \text{ m/s})^2 + (8{,}48528 \cdot 10^5 \text{ m/s})^2} \approx 6{,}6 \text{ Mm/s}.$$

TESTAA, OSAATKO S. 35

1. a c **2.** a c **3.** c **4.** b **5.** a b **6.** c **7.** b **8.** a b **9.** b c

TEHTÄVIEN RATKAISUT

4-1. **a)** Sauvamagneetin ja Maan välillä vallitsee gravitaatiovuorovaikutus. Maan ja magneetin välillä on magneettinen vuorovaikutus. Kosketusvuorovaikutus on langan ja magneetin välillä. Magneetin ja ilman välillä on kosketusvuorovaikutus.

b) Gravitaatiovuorovaikutus: kärryt ja Maa.

Kosketusvuorovaikutus: lattia ja kärryt.

Kosketusvuorovaikutus: työntäjä ja kärry.

Kosketusvuorovaikutus: lattia ja kärryt.

Kosketusvuorovaikutus: kärryt ja ilma.

c) Gravitaatiovuorovaikutus: Maa ja pallo.

Sähköinen vuorovaikutus: pallot keskenään.

Kosketusvuorovaikutus: lanka ja pallo.

Kosketusvuorovaikutus: pallo ja ilma.

4-2. **a)** Aurinko ja Kuu ovat etävuorovaikutuksessa Maan kanssa. Muutkin taivaankappaleet ovat etävuorovaikutuksessa Maan kanssa, mutta niiden gravitaatiovuorovaikutus on merkittävästi heikompi.

b) Kun autoa työnnetään, se on kosketusvuorovaikutuksessa työntäjien ja tienpinnan kanssa ja myös ilman kanssa.

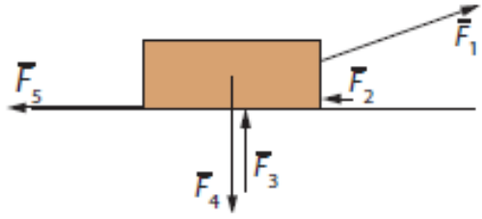
4-3. Jousivaakojen lukemat ovat yhtä suuret.

4-4. **a)** Lukema on 150 N.

b) Lukema on 150 N.

c) Koska siima kestää 200 N vetovoiman, siima kestää vedon 150 N voimalla.

4-5. **a)** Kappale liikkuu oikealle.



Voimat ovat

$\overline{F}_1 = \overline{F}$ vetävä voima,

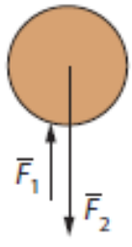
$\overline{F}_2 = \overline{F}_{\text{vast}}$ ilmanvastus,

$\overline{F}_3 = \overline{N}$ pinnan tukivoima,

$\overline{F}_4 = \overline{G}$ Maan vetovoima eli kappaleeseen kohdistuva paino ja

$\overline{F}_5 = \overline{F}_\mu$ kitka.

b) Pallo putoaa.

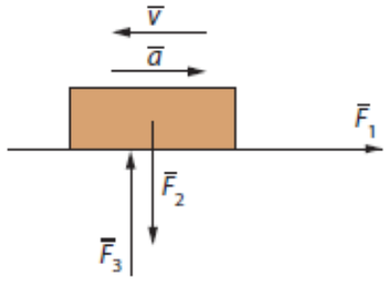


Voimat ovat

$\overline{F}_1 = \overline{F}_{\text{i}}$ ilmanvastus ja

$\overline{F}_2 = \overline{G}$ Maan vetovoima eli kappaleeseen kohdistuva paino.

c) Kappale on hidastuvassa liikkeessä vasemmalle.



Voimat ovat

$\overline{F}_1 = \overline{F}_\mu$ kitka,

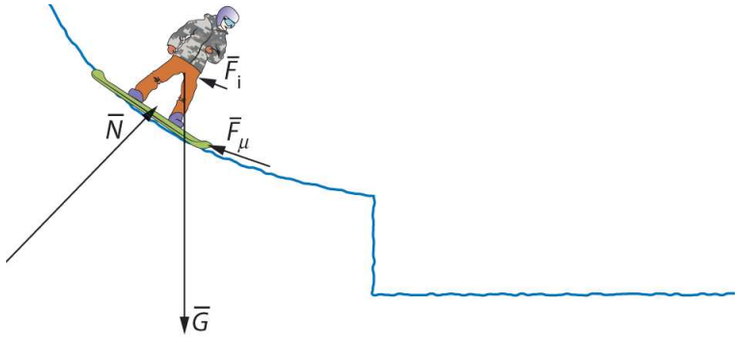
$\overline{F}_2 = \overline{G}$ Maan vetovoima eli kappaleeseen kohdistuva paino ja

$\overline{F}_3 = \overline{N}$ pinnan tukivoima.

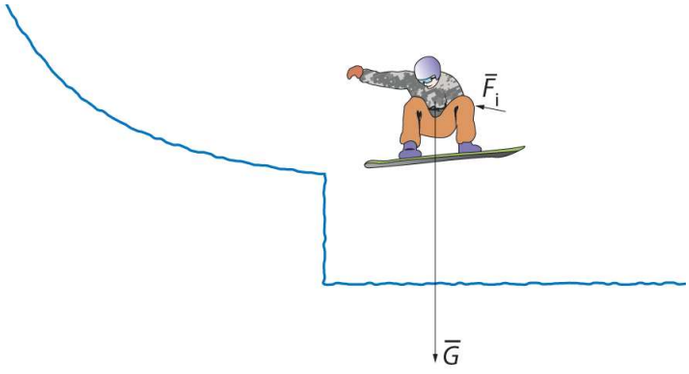
4-6. **a)** Jannika on kosketusvuorovaikutuksessa köyden, seinän ja ilman kanssa sekä etävuorovaikutuksessa Maan kanssa.

Kun Jannika laskeutuu köyden varassa pitkin seinää, häneen kohdistuu paino, köyden jännitysvoima, seinän tukivoima, seinän kitka, (ilman hyvin pieni noste) ja mahdollisesta tuulesta johtuva ilmanvastus.

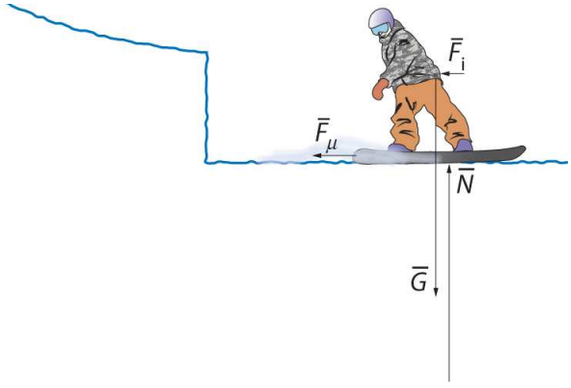
b) Ennen hyppyriä lumilautailijaan kohdistuvat paino $\overline{G}$, rinteen tukivoima $\overline{N}$, ilmanvastus $\overline{F}_\text{i}$ ja kitka $\overline{F}_\mu$ laudan ja lumen välillä.



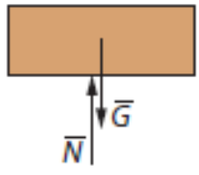
Kun lautailija on ilmassa, häneen kohdistuvat paino $\overline{G}$ ja ilman vastus $\overline{F}_{\text{i}}$ (ja häviävän pieni noste).



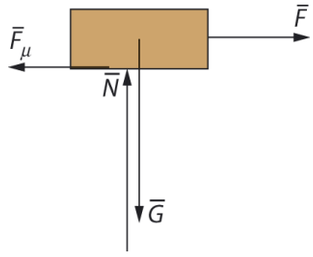
Hypyn jälkeen, kun lautailija on taas maassa, häneen kohdistuvat paino $\overline{G}$, pinnan (rinteen) tukivoima $\overline{N}$, ilmanvastus $\overline{F}_{\text{i}}$ ja kitka $\overline{F}_{\mu}$.



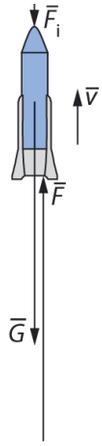
4-7. **a)** Kirjaan vaikuttavat voimat ovat paino $\overline{G}$ ja pinnan tukivoima $\overline{N}$.



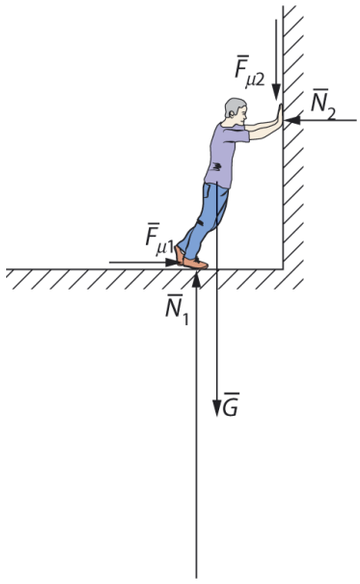
b) Pulkkaan vaikuttavat voimat ovat paino $\overline{G}$, jään pinnan tukivoima $\overline{N}$, liikettä vastustavat kitka $\overline{F}_{\mu}$ ja vetävä voima $\overline{F}$.



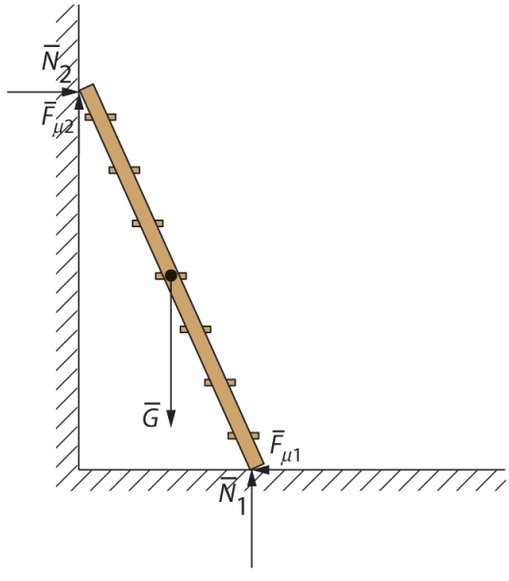
c) Vakionopeudella ylöspäin nousevaan rakettiin vaikuttavat voimat ovat paino $\overline{G}$ ja ilmanvastus $\overline{F}_{\mathrm{i}}$, joiden summa on yhtä suuri kuin ylös suuntautuva voima $\overline{F}$, joka syntyy purkautuvien palamiskaasujen rakettiin aiheuttamasta voimasta.



d) Seinää työntävään henkilöön vaikuttavat voimat ovat paino $\overline{G}$, lattian ja seinän tukivoimat $\overline{N}_1$ ja $\overline{N}_2$, kitka $\overline{F}_{\mu 2}$seinäpinnassa sekä jalkojen ja lattian välinen kitka $\overline{F}_{\mu 1}$.



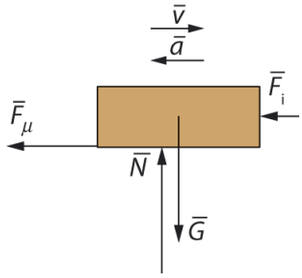
e) Tikapuihin vaikuttavat voimat ovat paino $\overline{G}$, lattian ja seinän tukivoimat $\overline{N}_1$ ja $\overline{N}_2$, kitka $\overline{F}_{\mu 2}$ seinäpinnassa sekä tikkaiden alapään ja lattian välinen kitka $\overline{F}_{\mu 1}$.



4-8. **a)** Kiekko on kosketusvuorovaikutuksessa jään pinnan ja ilman kanssa sekä etävuorovaikutuksessa Maan kanssa.

b) Voimat ovat kiekkoon kohdistuva paino $\overline{G}$, alustan tukivoima $\overline{N}$, kitka $\overline{F}_{\mu}$ ja ilmanvastus $\overline{F}_{\mathrm{i}}$, jonka merkitys on hyvin vähäinen.

c) Voimakuvio:



d) Painon $\bar{G}$ vastavoima on voima, jolla kiekko vetää Maata.

Tukivoiman $\bar{N}$ vastavoima on voima, jolla kiekko painaa jäätä.

Kitkan $\bar{F}_\mu$ vastavoima on voima, jolla kiekko vaikuttaa jään pintaan.

Ilmanvastuksen $\bar{F}_i$ vastavoima on voima, jolla kiekko vaikuttaa ilmaan.

4-9. Havaitsemissasi ilmiöissä kyse ei ole voimista vaan siitä, että massasi vastustaa liikkeesi muuttumista, kun bussin liike muuttuu. Kaikki havaitsemasi ilmiöt johtuvat massan hitaudesta.

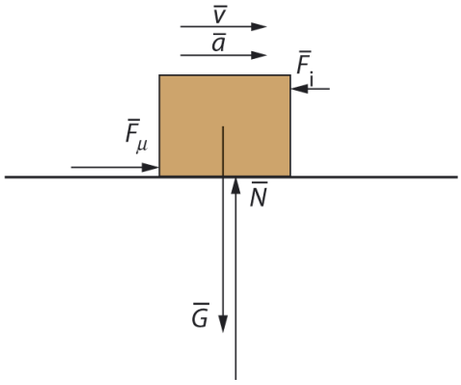
4-10. **a)** Voimat $\bar{F}_3$ ja $\bar{F}_4$ eivät ole voima ja vastavoima, koska ne vaikuttavat samaan kappaleeseen (lamppuun).

b) Voiman $\bar{F}_2$ vastavoima on $\bar{F}_3$.

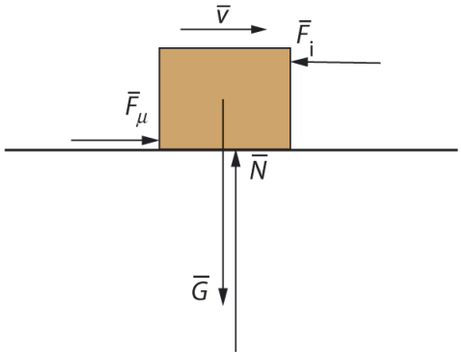
c) Voiman $\bar{F}_6$ vastavoima on voima, jolla lamppu vetää Maata.

d) Voima $\bar{F}_5$ on tukivoima, jolla naru estää lampun putoamisen. Voima $\bar{F}_6$ on voima, jolla Maa vetää lamppua.

4-11. **a)** Auton nopeus kasvaa. Laatikkoon vaikuttavat voimat ovat laatikkoon kohdistuva paino $\bar{G}$, lavan tukivoima $\bar{N}$, kitka $\bar{F}_\mu$ liikkeen suuntaan ja liikesuunnalle vastakkainen ilmanvastus $\bar{F}_i$.

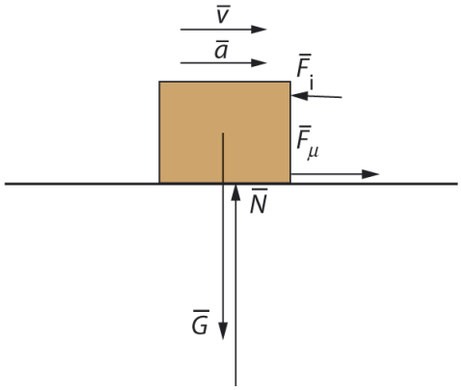


b) Auto liikkuu vakionopeudella. Laatikkoon vaikuttavat voimat ovat laatikkoon kohdistuva paino $\overline{G}$, lavan tukivoima $\overline{N}$ sekä kitka $\overline{F}_{\mu}$ ja ilmanvastus $\overline{F}_{\mathrm{i}}$, jotka ovat yhtä suuria keskenään.

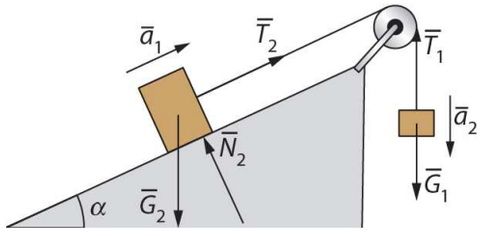


c) Auton nopeus pienenee.

Vaikuttavat voimat ovat laatikkoon kohdistuva paino $\overline{G}$, lavan tukivoima $\overline{N}$, kitka $\overline{F}_{\mu}$ ja ilmanvastus $\overline{F}_{\mathrm{i}}$. Kitka $\overline{F}_{\mu}$ ja ilmanvastus $\overline{F}_{\mathrm{i}}$ ovat liikkeen suunnalle vastakkaiset.



4-12. Voimakuvio:



TEHTÄVIEN RATKAISUT

5-1. **a)** A. Valitaan suunta vasemmalle positiiviseksi.

Alustan suuntainen kokonaisvoima on $\Sigma F = 19\ \text{N} + 17\ \text{N} - 16\ \text{N} = 20\ \text{N}$ vasemmalle.

B. Valitaan suunta oikealle positiiviseksi.

Alustan suuntainen kokonaisvoima on $\Sigma F = 27\ \text{N} - 27\ \text{N} = 0\ \text{N}$.

b) Kappaleiden kiihtyvyydet:

A. Newtonin II lain mukaan kiihtyvyys on $a = \dfrac{\Sigma F}{m} = \dfrac{20\ \text{N}}{2{,}5\ \text{kg}} = 8{,}0\ \text{m/s}^2$ vasemmalle.

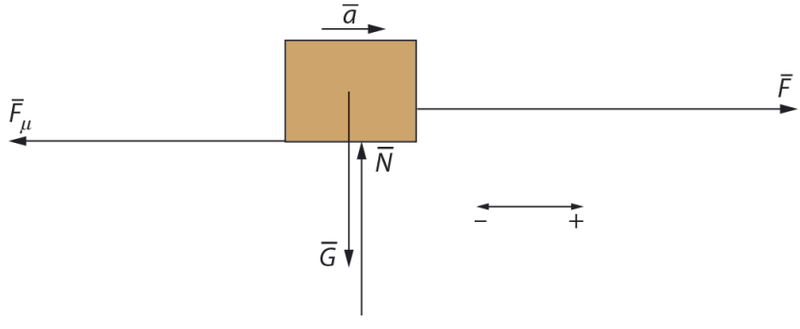
B. Kiihtyvyys on $0\ \text{m/s}^2$.

5-2. **a)** Valitaan suunta alas positiiviseksi.

Kiihtyvyyden suuruus on $a = \dfrac{\Sigma F}{m} = \dfrac{55\ \text{N} - 6{,}5\ \text{N}}{5{,}6\ \text{kg}} \approx 8{,}7\ \text{m/s}^2$, suunta alas.

b) Palloon vaikuttava kokonaisvoima on 0 N. Pallon kiihtyvyys on $0\ \text{m/s}^2$.

5-3. **a)** Voimakuvio:

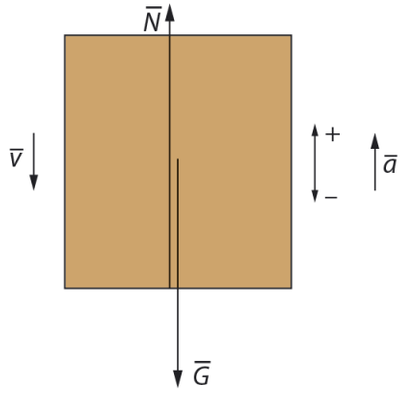


b) Kun liikkeen suunta valitaan positiiviseksi suunnaksi, kokonaisvoima on $\Sigma F = 755\ \text{N} - 620\ \text{N} = 135\ \text{N}$.

c) Newtonin II lain mukaan on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{F} + \overline{F}_\mu = m\overline{a}$. Kun liikkeen suunta valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $F - F_\mu = ma$.

Kiihtyvyys on $a = \dfrac{F - F_\mu}{m} = \dfrac{755\ \text{N} - 620\ \text{N}}{35\ \text{kg}} \approx 3{,}9\ \text{m/s}^2$.

5-4. Koska hissi liikkuu alas ja vaa'an lukema on suurempi kuin henkilön massa, hissin kiihtyvyys on ylös.



Newtonin II lakia soveltaen yhtälö $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ saadaan muotoon $\overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}$. Valitaan suunta ylös positiiviseksi. Voiman ja vastavoiman lain mukaan vaa'an tukivoima $\overline{N}$ vaikuttaa abiturienttiin yhtä suurella voimalla kuin abiturientti hissi lattiaan.

Skalaariyhtälöstä $N - mg = ma$ hissin kiihtyvyyden suuruus on

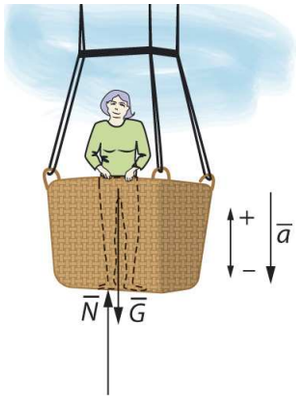
$$a = \frac{N - mg}{m} = \frac{73{,}4\ \text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 - 62{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{62{,}0\ \text{kg}} \approx 1{,}8\ \text{m/s}^2.$$

Kiihtyvyyden suunta on ylös.

Kokonaisvoiman ja kiihtyvyyden suunta on liikkeelle vastakkainen, koska hissi on hidastuvassa liikkeessä alas (eli hissi on pysähtymässä).

5-5. **a)** Elsaan kohdistuvat paino $\overline{G}$ ja korin pohjan tukivoima $\overline{N}$.

b) Korin pohjaan kohdistuvaa voimaa emme pysty laskemaan. Voiman ja vastavoiman lain mukaan tukivoima $\overline{N}$ vaikuttaa Elsaan yhtä suurella voimalla kuin Elsa vaikuttaa korin pohjaan. Tukivoima $\overline{N}$ voidaan laskea.



Newtonin II lain mukaan on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}$. Valitaan suunta ylös positiiviseksi.

Skalaariyhtälöstä $N - mg = -ma$ saadaan tukivoiman suuruudeksi

$N = mg - ma = m(g - a) = 55\ \text{kg} \cdot (9{,}81\ \text{m/s}^2 - 1{,}5\ \text{m/s}^2) \approx 460\ \text{N}.$

Elsa painaa korin pohjaa 460 N:n suuruisella voimalla.

5-6. Elementin kiihtyvyys $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ on vakio kaikilla alla olevilla aikaväleillä.

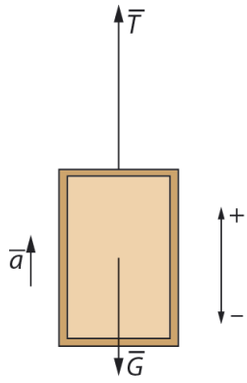
Kiihtyvyyksien suuruudet saadaan kuvaajasta fysikaalisena kulmakertoimena:

0,0…4,0 s: $a_1 = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{1{,}5\ \text{m/s} - 0{,}0\ \text{m/s}}{4{,}0\,\text{s}} = 0{,}375\ \text{m/s}^2.$

4,0…10,0 s: $a_2 = 0\ \text{m/s}^2$ (liike on tasaista)

10,0…12,0 s: $a_3 = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{0{,}0\ \text{m/s} - 1{,}5\ \text{m/s}}{2{,}0\,\text{s}} = -0{,}75\ \text{m/s}^2.$

Newtonin II lain seurauksena yhtälö $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ saadaan muotoon $\overline{T} + \overline{G} = m\overline{a}$.



Sovitaan suunta ylös positiiviseksi. Skalaariyhtälöstä $T - mg = ma$ kannatinvaijeria jännittävä voima on

$T = mg + mg.$

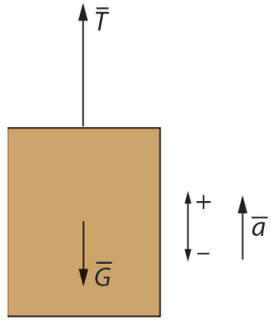
Kiihtyvyyksiä vastaavat jännitysvoimat ovat

$T_1 = ma_1 + mg = m(a_1 + g) = 480\ \text{kg} \cdot (0{,}375\ \text{m/s}^2 + 9{,}81\ \text{m/s}^2) \approx 4{,}9\ \text{kN},$

$T_2 = mg = 480\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \approx 4{,}7\ \text{kN}$ ja

$T_3 = ma_3 + mg = m(a_3 + g) = 480\ \text{kg} \cdot (-0{,}75\ \text{m/s}^2 + 9{,}81\ \text{m/s}^2) \approx 4{,}3\ \text{kN}.$

5-7. **a)**

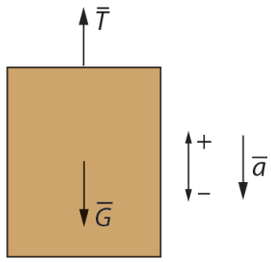


Newtonin II lain mukaan on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{T} + \overline{G} = m\overline{a}$, jossa $\overline{T}$ on vaijerin jännitysvoima. Valitaan hissin liikesuunta eli suunta ylös positiiviseksi.

Skalaariyhtälöstä $T - G = ma$ saadaan vaijerin jännitysvoimaksi

$T = ma + G = ma + mg = m(a + g) = 850\ \text{kg} \cdot (2{,}4\ \text{m/s}^2 + 9{,}81\ \text{m/s}^2) \approx 10\ \text{kN}.$

b)

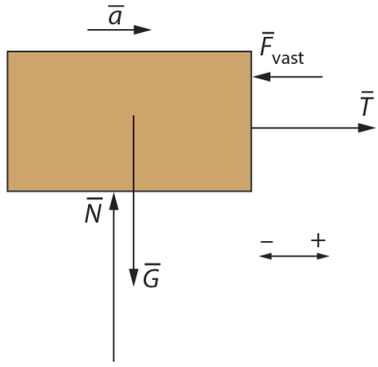


Newtonin II lain mukaan on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{T} + \overline{G} = m\overline{a}$. Nyt liike on hidastuvaa eli kiihtyvyyden suunta on liikkeen suunnalle vastainen eli alas. Valitaan suunta ylös positiiviseksi. Skalaariyhtälöstä $T - G = -ma$ saadaan vaijerin jännitysvoimaksi

$T = -ma + mg = m(-a + g) = 850\ \text{kg} \cdot (-2{,}4\ \text{m/s}^2 + 9{,}81\ \text{m/s}^2) \approx 6{,}3\ \text{kN}.$

(Huomaa: Tiukalla olevan langan päihin vaikuttavat yhtä suuret, ulospäin suuntautuvat voimat. Newtonin III lain mukaan naru vaikuttaa sitä kiristäviin kappaleisiin vastaavilla vastavoimilla (ne on piirretty kuviin). Narussa on kaikkialla **sama jännitys** (jos narun omaa painoa ei huomioida). Se **ei ole voima** vaan skalaarisuure, jonka suuruus on sama kuin narun päihin vaikuttava, narua kiristävä voima. **Jännitysvoimia ovat narun päihin vaikuttavat voimat.**)

5-8. Oikein on kohta c) 720 N.
Perävaunun voimakuvio:



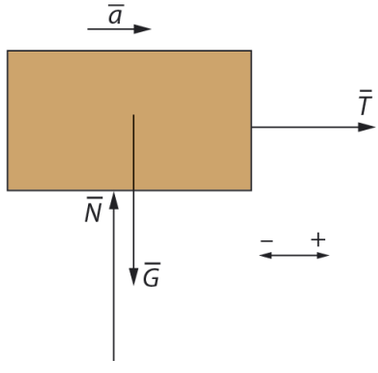
Newtonin II lain mukaan on $\sum \bar{F} = m\bar{a}$ eli $\bar{T} + \bar{F}_{\text{vast}} + \bar{N} + \bar{G} = m\bar{a}$.
Tienpinnan suhteen on $\sum \bar{F} = m\bar{a}$ eli $\bar{T} + \bar{F}_{\text{vast}} = m\bar{a}$. Valitaan liikkeen suunta positiiviseksi, jolloin skalaariyhtälöstä $T - F_{\text{vast}} = m_{\text{p}}a$ saadaan voiman suuruudeksi

$$T = F_{\text{vast}} + m_{\text{p}}a = 190\ \text{N} + 1050\ \text{kg} \cdot 0{,}50\ \text{m/s}^2 \approx 720\ \text{N}.$$

5-9. Sovitaan liikkeen suunta oikealle positiiviseksi. Newtonin II lain mukaan kelkan ja reen kiihtyvyys on

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{250\ \text{N}}{8{,}5\ \text{kg} + 65\ \text{kg}} \approx 3{,}40136\ \text{m/s}^2$$, suunta liikkeen suunta.

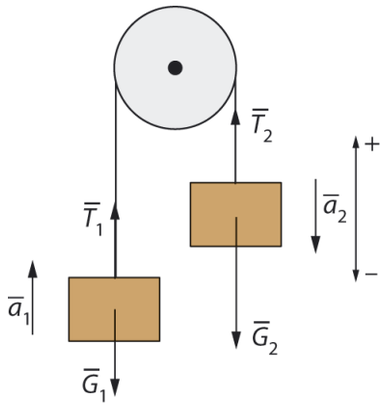
Pulkan voimakuvio:



Koska pulkan kiihtyvyys on sama kuin reen, Newtonin II lain mukaan on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{T} + \overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}$. Alustan suhteen on $\sum \overline{F} = m_1\overline{a}$ eli $\overline{T} = m_1\overline{a}$.

Narussa vaikuttavan jännitysvoiman suuruus on
$T = m_1 a = 8{,}5 \text{ kg} \cdot 3{,}40136 \text{ m/s}^2 \approx 29 \text{ N}.$

5-10. **a)**



Kirjoitetaan liikeyhtälöt erikseen kummallekin kappaleelle. Koska venymättömän langan jännitysvoima on langan molemmissa päissä yhtä suuri, on $|\overline{T}_1| = |\overline{T}_2| = T$. Kappaleilla on sama kiihtyvyyden suuruus, koska ne liikkuvat yhdessä: $|\overline{a}_1| = |\overline{a}_2| = a$.

Kappale m_1: Newtonin II lain mukaan on $\Sigma \overline{F} = m_1\overline{a}_1$ eli $\overline{T}_1 + \overline{G}_1 = m_1\overline{a}_1$.
Kun valitaan suunta ylös positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö

$T - G_1 = m_1 a_1$ eli $T - m_1 g = m_1 a_1$.

Kappale m_2: Newtonin II lain mukaan on $\Sigma \overline{F} = m_2\overline{a}_2$ eli $\overline{T}_2 + \overline{G}_2 = m_2\overline{a}_2$.
Kun valitaan suunta ylös positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö

$T - G_2 = -m_2 a_2$ eli $T - m_2 g = -m_2 a_2$.

Saadaan yhtälöpari:

$T - m_1 g = m_1 a$
$T - m_2 g = -m_2 a.$

Kerrotaan alempi yhtälö luvulla –1 ja lasketaan yhtälöt yhteen (eli vähennetään puolittain ylemmästä yhtälöstä alempi). Näin saadaan yhtälö $g(m_2 - m_1) = (m_2 + m_1)a$, josta kiihtyvyys on

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g = \frac{2{,}0 \text{ kg}}{16{,}0 \text{ kg}} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 1{,}22625 \text{ m/s}^2 \approx 1{,}2 \text{ m/s}^2 .$$

Koska kiihtyvyyden arvo on positiivinen, kappaleen 1 kiihtyvyys on ylös ja kappaleen 2 vastaavasti alas kuten tilanteesta on muutenkin pääteltävissä.

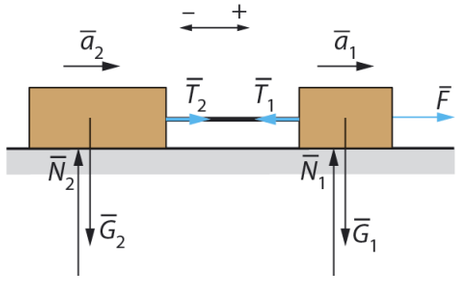
Langan jännitysvoiman suuruus on

$$T = m_1 a + m_1 g = m_1(a + g) = 7{,}0 \text{ kg} \cdot (1{,}22625 \text{ m/s}^2 + 9{,}81 \text{ m/s}^2) \approx 77 \text{ N}.$$

b) Kappale m_2 törmää lattiaan nopeudella

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 1{,}22625 \text{ m/s}^2 \cdot 1{,}0 \text{ m}} \approx 1{,}6 \text{ m/s} .$$

5-11. Piirretään voimakuvio.



Newtonin II lain mukaan on

kappaleelle 1 $\bar{F} + \bar{T}_1 + \bar{G}_1 + \bar{N}_1 = m_1 \bar{a}_1$ ja

kappaleelle 2 $\bar{T}_2 + \bar{N}_2 + \bar{G}_2 = m_2 \bar{a}_2$.

Koska liike tapahtuu vaakasuunnassa ja pystysuunnassa voimat kumoavat toisensa, pystysuuntaa ei tarvitse tarkastella.

Koska langan jännitys on jokaisessa kohdassa yhtä suuri, niin $|\bar{T}_1| = |\bar{T}_2| = T$. Koska kappaleet liikkuvat venymättömän langan takia

yhdessä, kummankin kiihtyvyyden suuruus on yhtä suuri eli $|\overline{a}_1| = |\overline{a}_2| = a$. Kappaleita voidaan tarkastella erillisinä systeemeinä.

Kun suunta oikealle on positiivinen, saadaan skalaariyhtälöt

kappaleelle 1: $F - T = m_1 a$

kappaleelle 2: $T = m_2 a$.

Sijoitetaan yhtälö $T = m_2 a$ yhtälöön $F - T = m_1 a$, jolloin saadaan

$F - m_2 a = m_1 a$ eli $F = (m_1 + m_2)a$.

a) Koska kappaleiden välissä on venymätön lanka, voima F antaa kiihtyvyyden a koko systeemille, jolloin kiihtyvyyden suuruus on

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{8{,}5\,\text{N}}{0{,}23\,\text{kg} + 0{,}33\,\text{kg}} = 15{,}1786\ \text{m/s}^2 \approx 15\ \text{m/s}^2.$$

Kiihtyvyyden suunta on oikealle.

b) Langan jännitysvoiman suuruus on

$T = m_2 a = 0{,}33\ \text{kg} \cdot 15{,}1786\ \text{m/s}^2 \approx 5{,}0\ \text{N}$.

TEHTÄVIEN RATKAISUT

6-1. Voimien resultantin suuruus on $F = \sqrt{(36\ \text{N})^2 + (17\ \text{N})^2} \approx 39{,}8121\ \text{N}$.

Kappaleen kiihtyvyyden suuruus saadaan yhtälöstä $F = ma$:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{39{,}8121\ \text{N}}{25\ \text{kg}} \approx 1{,}6\ \text{m/s}^2.$$

Kiihtyvyyden suunta on sama kuin resultantin suunta: $\tan\alpha = \frac{17\,\text{N}}{36\,\text{N}}$,

josta kulma $\alpha \approx 25°$ vaakasuunnasta vinosti vasemmalle ylös.

6-2. Voimien akselien suuntaiset komponentit ovat

$F_{1x} = 1{,}0$ N ja $F_{1y} = 2{,}0$ N,

$F_{2x} = -1{,}0$ N ja $F_{2y} = 2{,}0$ N,

$F_{3x} = -2{,}0$ N ja $F_{3y} = -3{,}0$ N.

Voimien summa

x-suunnassa on $\sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 1{,}0\ \text{N} + (-1{,}0\ \text{N}) + (-2{,}0\ \text{N}) = -2{,}0\ \text{N}$
ja y-suunnassa $\sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 2{,}0\ \text{N} + 2{,}0\ \text{N} + (-3{,}0\ \text{N}) = 1{,}0\ \text{N}$.

Voimien resultantin suuruus on

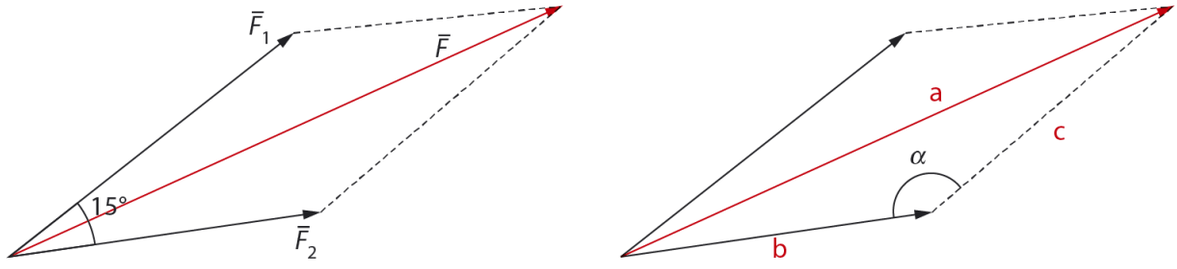
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(-2{,}0\,\text{N})^2 + (1{,}0\ \text{N})^2} \approx 2{,}23607\,\text{N},$$

ja suunta saadaan yhtälöstä $\tan\alpha = \frac{F_y}{F_x} = \left|\frac{1{,}0\ \text{N}}{-2{,}0\,\text{N}}\right|$, josta kulma $\alpha \approx 27°$

osoittaa vinosti vasemmalle ylös.

Kappaleen kiihtyvyyden suuruus on $a = \frac{F}{m} = \frac{2{,}23607\ \text{N}}{0{,}50\ \text{kg}} \approx 4{,}5\ \text{m/s}^2$, ja kiihtyvyyden suunta on sama kuin resultantin suunta.

6-3. Piirretään kuva tilanteesta:



Graafinen ratkaisu:

Päätä mittakaava, esimerkiksi 1 cm vastaa 50 newtonia: tällöin 350 N:n voimavektorin pituus on 7,0 cm ja 250 N:n voimavektorin pituus 5,0 cm.

Piirrä voimavektorit oikeisiin pituuksiinsa ja niiden väliseksi kulmaksi 15 astetta.

Täydennä kuvio suunnikkaaksi.

Mittaa suunnikkaan lävistäjän pituus ja muuta se vastaamaan newtoneja.

Laskemalla:

$F_1 = 350$ N ja $F_2 = 250$ N.

Sovelletaan kosinilausetta $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, josta

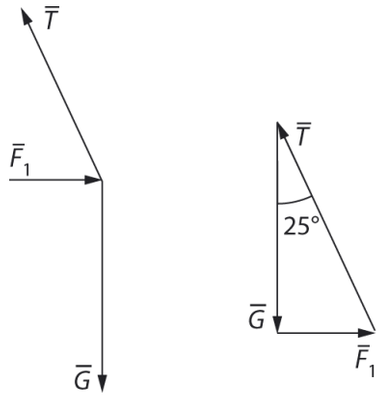
$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$.

Nyt kulma on $\alpha = \dfrac{360° - 2 \cdot 15°}{2} = 165°$. Resultantin suuruus on

$F = \sqrt{(250\text{ N})^2 + (350\text{ N})^2 - 2 \cdot 250\text{ N} \cdot 350\text{ N} \cdot \cos 165°} \approx 600\text{ N}.$

6-4. Oikea vaihtoehto b) 550 N.

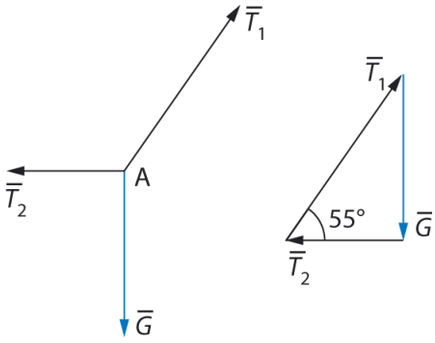
Tasapainotilanteessa voimien summa on Newtonin II lain mukaan nolla eli $\sum \overline{F} = \overline{0}$.



Voimakuvion mukaan on $\tan 25° = \dfrac{F_1}{G}$, josta kysytty vaakasuoran voiman suuruus on

$F_1 = G \tan 25° = 120 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot \tan 25° \approx 550 \text{ N}.$

6-5. Nailonsiiman ja lampun johdon liitoskohtaan A vaikuttaa kolme voimaa: nailonsiiman jännitysvoima, lamppuun kohdistuva paino sekä sähköjohdon jännitysvoima.



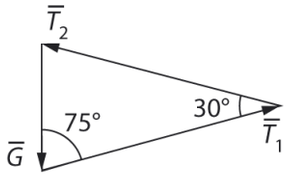
Liitoskohtaan vaikuttava kokonaisvoima on Newtonin II lain mukaan nolla, koska voimien vektorisummana muodostuu nollavektori eli $\Sigma \overline{F} = \overline{T}_2 + \overline{T}_1 + \overline{G} = \overline{0}$.

Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan yhtälö $\tan 55° = \frac{G}{T_2} = \frac{mg}{T_2}$, josta saadaan nailonsiiman jännitysvoiman suuruudeksi

$$T_2 = \frac{mg}{\tan 55°} = \frac{7{,}5\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{\tan 55°} \approx 52\ \text{N}.$$

Se on suurempi kuin nailonsiiman suurin vetolujuus 40 N. Siima ei siis kestää.

6-6. Symmetrian perusteella $|\overline{T}_1| = |\overline{T}_2| = T = 12\,\text{kN}$.



Koska Newtonin II lain mukaan tasapainotilanteessa on $\sum \overline{F} = \overline{0}$, sinilausetta soveltaen saadaan yhtälö

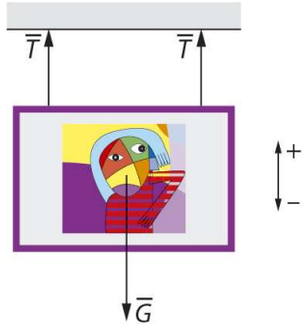
$$\frac{G}{\sin 30°} = \frac{T}{\sin 75°} \text{ eli } \frac{mg}{\sin 30°} = \frac{12\ \text{kN}}{\sin 75°},$$

josta saadaan massan suuruudeksi

$$m = \frac{12\ \text{kN} \cdot \sin 30°}{g \cdot \sin 75°} = \frac{12\ \text{kN} \cdot \sin 30°}{9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \sin 75°} \approx 630\ \text{kg}.$$

6-7.

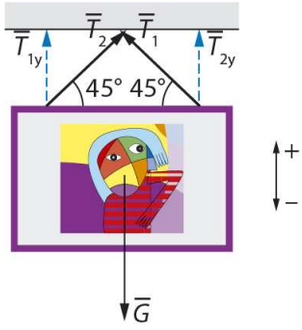
Vasemmanpuoleinen taulu:



Koska taulu pysyy seinällä, Newtonin II lain mukaan on voimassa ehto $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{T} + \overline{T} + \overline{G} = \overline{0}$. Sovitaan suunta ylös positiiviseksi. Skalaariyhtälöstä $2T - G = 0$ saadaan langan jännitysvoiman suuruudeksi

$$T = \frac{G}{2} = \frac{mg}{2} = \frac{6{,}3\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{2} \approx 31\ \text{N}.$$

Oikeanpuoleinen taulu:



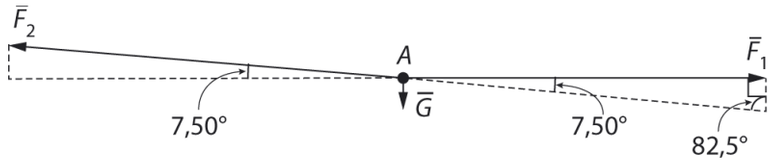
Koska taulu pysyy seinällä, Newtonin II lain mukaan on voimassa ehto $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{T}_{1y} + \overline{T}_{2y} + \overline{G} = \overline{0}$ ja symmetriasta johtuen $\left|\overline{T}_{1y}\right| = \left|\overline{T}_{2y}\right| = T_y$. Sovitaan suunta ylös positiiviseksi. Skalaariyhtälöstä $2T_y - G = 0$ eli saadaan

$2 \cdot T\cos\alpha - mg = 0$ langan jännitysvoiman suuruudeksi

$$T = \frac{mg}{2\cos\alpha} = \frac{6{,}3\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{2 \cdot \cos 45°} \approx 44\ \text{N}.$$

Jännitysvoimat ovat suuremmat oikeanpuoleisessa taulussa.

6-8.



Voiman F_1 suuruus: $\tan 7{,}50° = \frac{G}{F_1}$, josta

$$F_1 = \frac{mg}{\tan 7{,}50^\circ} = \frac{7{,}50\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{\tan 7{,}50^\circ} \approx 559\ \text{N}.$$

Voiman F_2 suuruus: $\tan 7{,}50^\circ = \frac{G}{F_2}$, josta

$$F_2 = \frac{mg}{\sin 7{,}50^\circ} = \frac{7{,}50\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{\sin 7{,}50^\circ} \approx 564\ \text{N}.$$

Tehtävän voi ratkaista myös sinilauseen avulla:

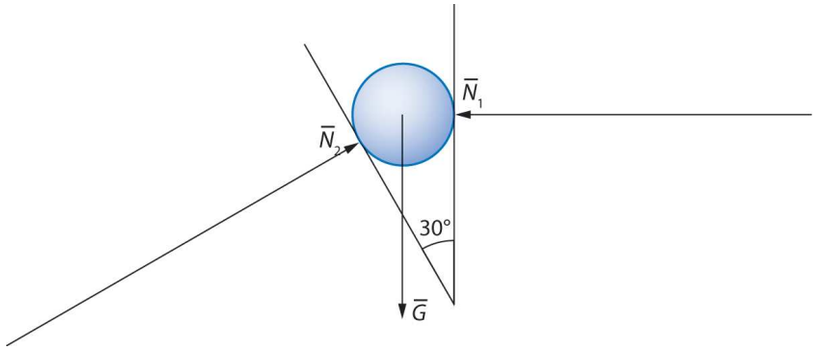
Yhtälöstä $\frac{F_1}{\sin 82{,}50^\circ} = \frac{G}{\sin 7{,}50^\circ}$ saadaan vaakasuorassa olevan vaijerin jännitysvoiman suuruudeksi

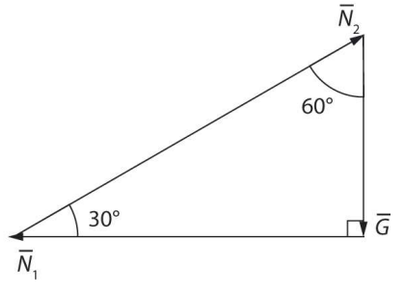
$$F_1 = \frac{mg \cdot \sin 82{,}50^\circ}{\sin 7{,}50^\circ} = \frac{7{,}50\ \text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \sin 82{,}50^\circ}{\sin 7{,}50^\circ} \approx 559\ \text{N}.$$

Yhtälöstä $\frac{F_2}{\sin 90^\circ} = \frac{G}{\sin 7{,}50^\circ}$ saadaan vaijerin vinon osan jännitysvoiman suuruudeksi

$$F_2 = \frac{G \cdot \sin 90^\circ}{\sin 7{,}50^\circ} \approx 564\,\text{N}.$$

6-9.





Koska ehto $\sum \overline{F} = \overline{0}$ on voimassa, vektorikuviosta saadaan yhtälö

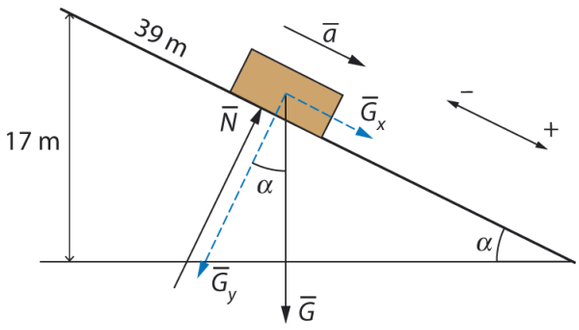
$\tan 60° = \dfrac{N_1}{G}$, josta voiman $\overline{N}_1$ suuruus on

$N_1 = mg \cdot \tan 60° = 4{,}7 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot \tan 60° \approx 80 \text{ N}$,

ja $\cos 60° = \dfrac{G}{N_2}$, josta voiman $\overline{N}_2$ suuruus on

$$N_2 = \frac{G}{\cos 60°} = \frac{mg}{\cos 60°} = \frac{4{,}7 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2}{\cos 60°} \approx 90 \text{ N}.$$

6-10.



a) Rinteen kaltevuuskulma saadaan yhtälöstä $\sin\alpha = \dfrac{h}{s} = \dfrac{17 \text{ m}}{39 \text{ m}}$, josta kulma on $\alpha \approx 25{,}8424°$.

Painon rinteen suuntaisen komponentin suuruus on

$G_x = G\sin\alpha = mg\sin\alpha = 42 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{m/s}^2 \cdot \sin 25{,}8424° \approx 180 \text{ N}.$

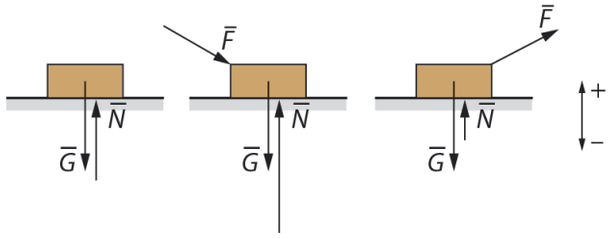
b) Koska kitka on hyvin pieni, sitä ei oteta huomioon. Newtonin II lain mukaan tason suunnassa on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{G}_x = m\overline{a}$, jossa $\overline{a}$ on kelkan tason suuntainen kiihtyvyys. Valitaan liikkeen suunta tasoa pitkin alas positiiviseksi. Skalaariyhtälöstä $G_x = ma$ saadaan kelkan kiihtyvyydeksi

$$a = \frac{G_x}{m} = \frac{G\sin\alpha}{m} = \frac{mg\sin\alpha}{m} = g\sin\alpha = 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot \sin 25{,}8424° \approx 4{,}27615 \text{ m/s}^2.$$

Yhtälöistä $v = at$ ja $s = \dfrac{1}{2}at^2$ kelkan nopeudeksi rinteen alaosassa saadaan

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 4{,}27615 \text{ m/s}^2 \cdot 39 \text{ m}} \approx 18 \text{ m/s}.$$

6-11.

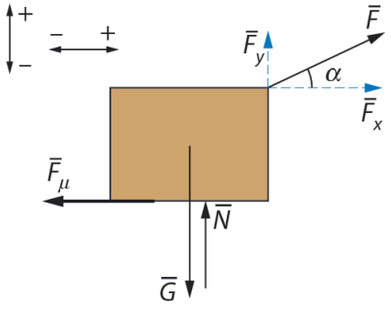


a) Newtonin II lain mukaan tasapainoehto pystysuunnassa on $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$. Kun suunta ylös on positiivinen, skalaariyhtälö on $N - G = 0$ eli $G = N$. Kappaleeseen kohdistuva paino ja tukivoima ovat yhtä suuret.

b) Newtonin II lain mukaan tasapainoehto pystysuunnassa on $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$. Kun suunta ylös on positiivinen, skalaariyhtälö on $N - F_y - G = 0$ eli $G = N - F_y$. Kappaleeseen kohdistuva paino on pienempi kuin tukivoima.

c) Newtonin II lain mukaan tasapainoehto pystysuunnassa on $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$. Kun suunta ylös on positiivinen, skalaariyhtälö on $N + F_y - G = 0$, eli $G = N + F_y$. Kappaleeseen kohdistuva paino on suurempi kuin tukivoima. On myös mahdollista, että kappale irtoaa pinnasta (jos $F_y > G$), jolloin tukivoimaa ei ole: silloin kappale on kiihtyvässä liikkeessä yläviistoon oikealle.

6-12. **a)** Jaetaan vetävä voima komponentteihinsa.



Voiman $\overline{F}$ komponenttien suuruudet ovat

$F_x = F\cos\alpha = 35\ \text{N} \cdot \cos 25° \approx 32\ \text{N}$ ja

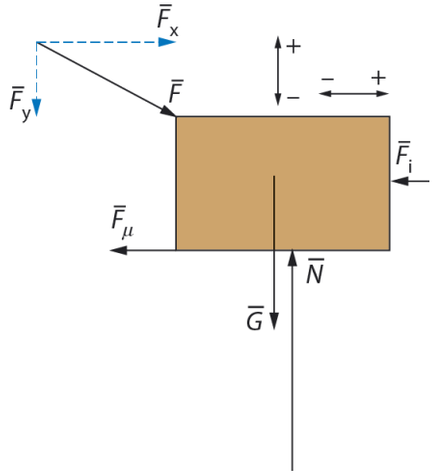
$F_y = F\sin\alpha = 35\ \text{N} \cdot \sin 25° \approx 15\ \text{N}.$

b) Koska laatikko on paikallaan, sekä vaaka- että pystysuorassa suunnassa vaikuttavien voimien summa on nolla. Newtonin II lain mukaan laatikon tasapainoehto pystysuunnassa on $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{N} + \overline{F}_y + \overline{G} = \overline{0}.$ Sovitaan suunta ylös positiiviseksi.

Skalaariyhtälöstä $N + F_y - G = 0$ saadaan tukivoiman suuruudeksi

$N = G - F_y = mg - F\sin\alpha = 4{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 - 35\ \text{N} \cdot \sin 25° \approx 24\ \text{N}.$

6-13. **a)** Piirretään voimakuvio.



Koska laatikon liike on tasaista, Newtonin II lain mukaan on $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{F} + \overline{F}_\mu + \overline{F}_i + \overline{N} + \overline{G} = \overline{0}$.

Koska voima $\overline{F}$ on vino, jaetaan voima $\overline{F}$ vaaka- ja pystykomponenttiin. Sovitaan tason suunta oikealle ja suunta ylös positiiviseksi. Kirjoitetaan liikeyhtälö tason suunnassa ja tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa.

Newtonin II lain mukaan tason suunnassa on $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{F}_x + \overline{F}_i + \overline{F}_\mu = \overline{0}$ ja skalaarimuodossa $F_x - F_i - F_\mu = 0$ eli $F\cos\alpha - F_i - F_\mu = 0$:

Kitkan suuruus on $F_\mu = F\cos\alpha - F_i = 350\ \text{N} \cdot \cos 39° - 25\ \text{N} \approx 250\ \text{N}$.

b) Newtonin II lain mukaan tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa on $\sum \overline{F}_y = \overline{0}$ eli $\overline{F}_y + \overline{N} + \overline{G} = \overline{0}$

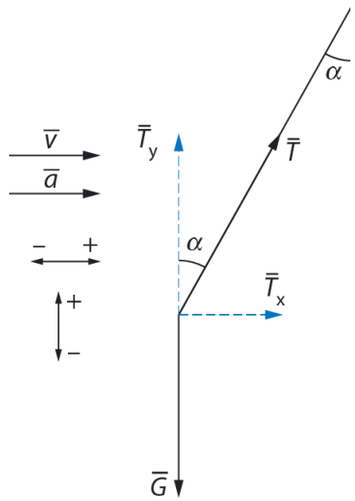
ja skalaarimuodossa $-F_y + N - G = 0$.

Tukivoiman suuruus on

$N = G + F_y = mg + F\sin\alpha$

$= 47\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 + 350\ \text{N} \cdot \sin 39° \approx 680\ \text{N}$.

6-14.



$\overline{G}$ on avainnippuun kohdistuva paino ja $\overline{T}$ langan jännitysvoima.

Koska avainnippu oli likimain levossa junan suhteen, sen ja junan kiihtyvyydet olivat likimain samoja. Newtonin II lain mukaan on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$ ja liikkeen suunnassa on $\overline{T}_x = m\overline{a}$. Sovitaan liikkeen suunta positiiviseksi, jolloin saadaan $T_x = ma$ eli $T\sin\alpha = ma$. Avainnipun kiihtyvyys on $a = \dfrac{T\sin\alpha}{m}$. Kiihtyvyyden laskemiseksi on vielä selvitettävä langan jännitysvoima $\overline{T}$.

Liikettä vastaan kohtisuorassa suunnassa avainnipun liikeyhtälö on

$\overline{T}_y + \overline{G} = \overline{0}$. Valitaan suunta ylös positiiviseksi, jolloin skalaariyhtälö $T_y - G = 0$ saadaan muotoon $T\cos\alpha - G = 0$.

Langan jännitysvoima on $T = \dfrac{G}{\cos\alpha} = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$. Sijoitetaan tämä avainnipun kiihtyvyyden yhtälöön, jolloin kiihtyvyys on

$$a = \frac{T\sin\alpha}{m} = \frac{\dfrac{mg}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha}{m} = g\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = g\cdot\tan\alpha$$
$$= 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\tan 15° \approx 2{,}6\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Tapa 2.

Kirjoitetaan *x*- ja *y*-suuntaiset skalaariyhtälöt muotoon

$T\sin\alpha = ma$ ja $T\cos\alpha = mg$ ja jaetaan yhtälöt puolittain:

$\dfrac{T\sin\alpha}{T\cos\alpha} = \dfrac{ma}{mg}$ eli $\tan\alpha = \dfrac{a}{g}$.

Avainnipun kiihtyvyys on $a = g\cdot\tan\alpha = 9{,}81\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\tan 15° \approx 2{,}6\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

TEHTÄVIEN RATKAISUT

7-1. **a)** Kappale lähtee liikkeelle hetkellä $t = 1{,}1$ s.

b) Kuviosta saadaan liukukitkan suuruus $F_\mu = 2{,}5$ N. Liukukitka on $F_\mu = \mu N = \mu mg$, josta saadaan liukukitkakertoimeksi

$$\mu = \frac{F_\mu}{mg} = \frac{2{,}5\,\text{N}}{1{,}8\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} \approx 0{,}14\,.$$

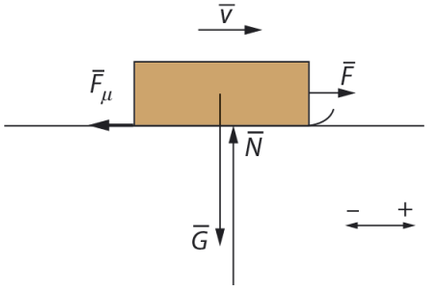
c) Kuviosta saatava lähtökitkan suuruus on $F_{\mu 0,\max} = 4{,}5$ N. Lähtökitkakerroin on

$$\mu_0 = \frac{F_{\mu 0,\max}}{mg} = \frac{4{,}5\,\text{N}}{1{,}8\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} \approx 0{,}25\,.$$

7-2. **a)** Tarvittavan voiman suuruus on

$$F_\mu = \mu N = \mu mg = 0{,}040 \cdot 2400\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \approx 940\ \text{N}.$$

b)

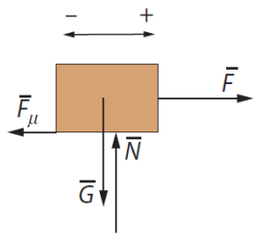


7-3. **a)** Lähtö- ja liukukitkan suuruuksien ero on

$$F_{\mu 0,\max} - F_\mu = \mu_0 mg - \mu mg$$

$$= mg(\mu_0 - \mu) = 24\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot (0{,}30 - 0{,}20) \approx 24\ \text{N}.$$

b) Newtonin II lain mukaan kappaleen liikeyhtälö on
$\sum \overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{F} + \overline{F}_\mu + \overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}$.



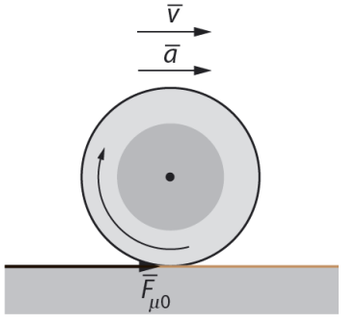
Alustan suunnassa liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{F} + \overline{F}_\mu = m\overline{a}$.

Kun liikkeen suunta valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö

$F - F_\mu = ma$, josta kiihtyvyyden suuruus on

$$a = \frac{F - F_\mu}{m} = \frac{\mu_0 mg - \mu mg}{m} = \frac{0{,}30mg - 0{,}20mg}{m} = \frac{0{,}10mg}{m}$$
$$= 0{,}10g = 0{,}10 \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \approx 0{,}98 \text{ m/s}^2.$$

7-4. **a)** Kitka on lepokitkaa, koska rengas ei sudi eli renkaan pinta ja asfaltin pinta eivät liu'u toistensa suhteen. Lepokitkan suunta on sama kuin auton etenemissuunta.



b) Junan pysäyttää pyörien ja kiskojen välinen lepokitka (olettaen että pyörät eivät liu'u).

c) Lämmittäminen pehmentää kumia, jolloin se pureutuu tiukemmin asfalttipinnan hienorakenteeseen. Renkaiden pito paranee, koska renkaiden vieriessä lepokitka renkaan ja tienpinnan välillä suurenee.

Tämän ansiosta mm. kaarteet voidaan ajaa suuremmalla vauhdilla.

d) Jos auton etupyörät vierivät (kitka lepokitkaa) ja takapyörät lukkiutuvat (kitka liukukitkaa), auton peräpää pyrkii kääntymään sivulle (vrt. käsijarrukäännöksen teko), koska liukukitka on pienempi kuin lepokitka. Liukuva perä kääntyy edelle, koska sivuttaisliikkeeseen joutuneen perän nopeus (vektorisuure) on suurempi kuin auton etuosan.

Autojen etujarrujen on oltava tehokkaammat kuin takajarrujen, koska tällöin esim. lukkojarrutuksessa auto etenee liikkeen suunnassa eikä pääse kääntymään poikittain.

Jos auton takajarrut olisivat tehokkaammat kuin etujarrut, autoa jarrutettaessa takarenkaat lukkiutuisivat (kitka liukukitkaa) ja eturenkaat vielä pyörisivät (kitka lepokitkaa): auton takapäähän vaikuttaisi silloin pienempi hidastava voima kuin etupäähän ja tämän seurauksena auto kääntyisi helposti poikittain etenemissuuntaansa nähden.

7-5. **a)** Lähtökitkan suuruus on $F_{\mu 0,\max} = \mu_0 N = \mu_0 mg = 0{,}26 \cdot 1{,}2 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 3{,}061 \text{ N}$.

Liukukitkan suuruus on $F_\mu = \mu N = \mu mg = 0{,}21 \cdot 1{,}2 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 2{,}472 \text{ N}$.

Koska jousivaa'an lukema $F = 2{,}2$ N on pienempi kuin lähtökitka eli

$F < F_{\mu 0,\max}$, kappale on levossa. Tällöin kappaleen liikeyhtälö on $\Sigma \overline{F} = \overline{0}$.

Kun valitaan liikkeen suunta positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö

$F - F_\mu = 0$. Kitkan suuruus on $F = F_\mu = 2{,}2$ N (lepokitkaa).

b) Kun kappaletta vedetään jousivaa'alla vakionopeudella, vetävä voima on yhtä suuri kuin kitka eli $F = F_\mu = 2{,}5$ N (liukukitkaa).

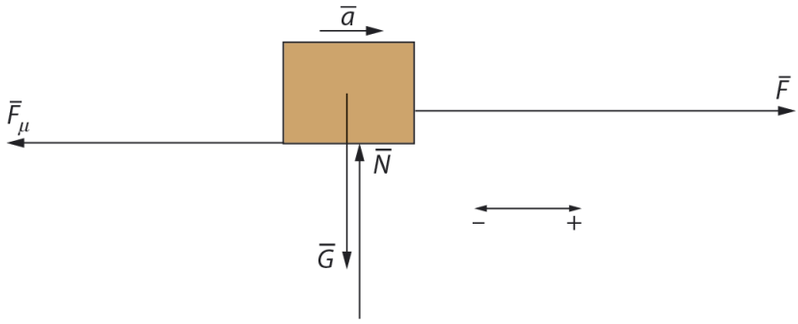
7-6. Kiekon kiihtyvyyden suuruus on

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0{,}0 \text{ m/s} - 1{,}6 \text{ m/s}}{8{,}0 \text{ s}} = -0{,}20 \text{ m/s}^2$$ ja voiman suuruus

$F = ma = 0{,}170 \text{ kg} \cdot (-0{,}20 \text{ m/s}^2) = -0{,}034 \text{ N}$.

Liikettä hidastava kitka on liikkeen suunnalle vastakkainen ja sen suuruus on 0,034 N = 34 mN.

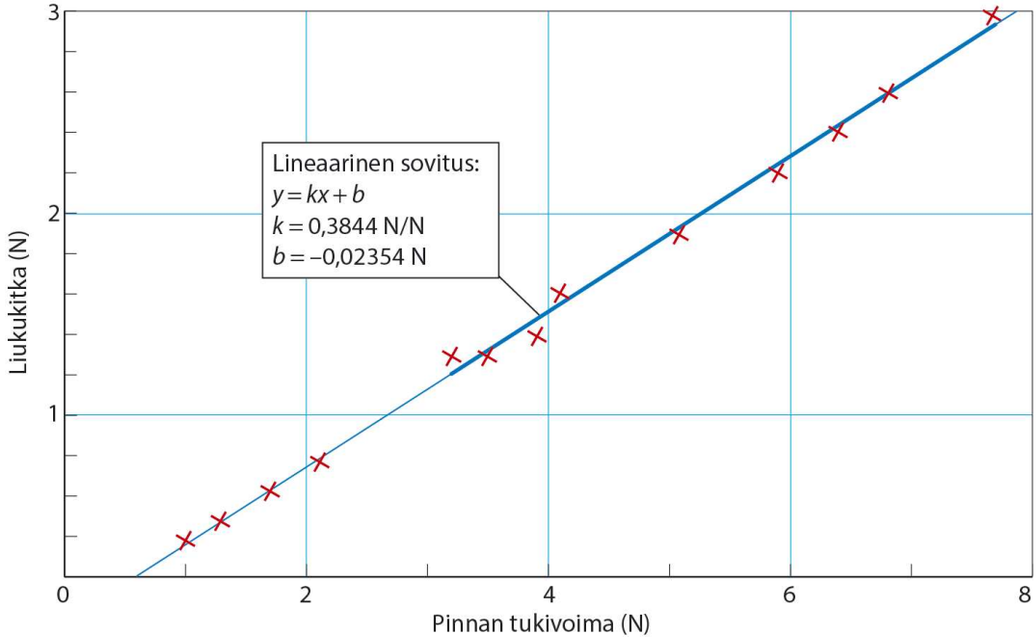
7-7. Newtonin II lain mukaan on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{F} + \overline{F}_\mu + \overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}$.



Tason suunnassa on $\overline{F} + \overline{F}_\mu = m\overline{a}$. Kun reen liikkeen suunta valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $F - F_\mu = ma$. Kitka on $F_\mu = \mu mg$. Yhtälöstä $F - \mu mg = ma$ saadaan kitkakertoimeksi

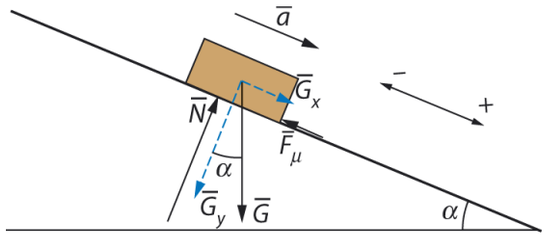
$$\mu = \frac{F - ma}{mg} = \frac{750\ \text{N} - 420\ \text{kg} \cdot 0{,}10\ \text{m/s}^2}{420\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} \approx 0{,}17\ .$$

7-8. Kuvaaja N, F_μ -koordinaatistossa.



Liukukitkakerroin on 0,38.

7-9.



Jaetaan laskijan paino $\bar{G}$ rinteen suuntaiseen komponenttiin $\bar{G}_x$ ja rinnettä vastaan kohtisuoraan komponenttiin $\bar{G}_y$. Tasoa vastaan $\bar{G}_y$ kohtisuorassa suunnassa voimien summa on nolla, joten komponenttia kuvaava vektori on yhtä pitkä kuin rinteen pinnan tukivoimaa $\bar{N}$ kuvaava vektori.

Newtonin II lain mukaan on $\sum \bar{F} = m\bar{a}$ eli $\bar{F}_\mu + \bar{N} + \bar{G} = m\bar{a}$.

Tason suunnassa on $\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ eli $\bar{G}_x + \bar{F}_\mu = m\bar{a}$. Valitaan liikkeen suunta rinnettä alas positiiviseksi. Skalaariyhtälöstä $G_x - F_\mu = ma$ laskijan kiihtyvyydeksi saadaan

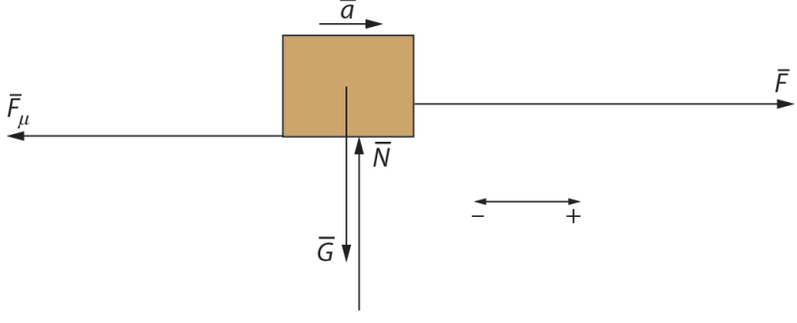
$$a = \frac{G_x - F_\mu}{m} = \frac{G\sin\alpha - \mu N}{m} = \frac{mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha}{m} = \frac{m(g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha)}{m}$$
$$= g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot (\sin 25° - 0{,}15 \cdot \cos 25°) \approx 2{,}8\ \text{m/s}^2,$$

suunta tason suunnassa alas.

7-10. Kappaleen kiihtyvyyden suuruudeksi saadaan t,v-koordinaatistosta

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{4{,}5\,\text{m/s}}{1{,}0\,\text{s}} = 4{,}5\,\text{m/s}^2.$$

Newtonin II lain mukaan on $\sum \bar{F} = m\bar{a}$ eli $\bar{F} + \bar{F}_\mu + \bar{N} + \bar{G} = m\bar{a}$.



Lattian suunnassa on $\overline{F} + \overline{F}_\mu = m\overline{a}$. Kun liikkeen suunta on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $F - F_\mu = ma$ eli $F - \mu mg = ma$. Kitkakerroin on

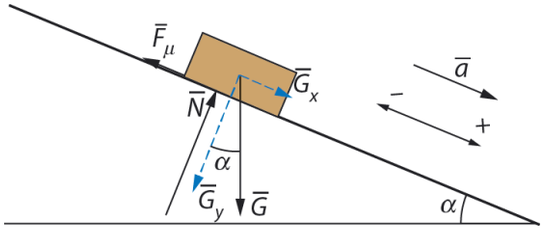
$$\mu = \frac{F - ma}{mg} = \frac{35{,}0\ \text{N} - 4{,}0\ \text{kg} \cdot 4{,}5\ \text{m/s}^2}{4{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} \approx 0{,}43\,.$$

7-11. **a)** Koska laatikko liikkuu 2,0 sekunnissa alas 2,0 m ja oikealle 4,0 m, joten matka tasoa pitkin on $s = \sqrt{(2{,}0\ \text{m})^2 + (4{,}0\ \text{m})^2} \approx 4{,}47214\ \text{m}$.

Yhtälöstä $s = \frac{1}{2}at^2$ laatikon kiihtyvyys tason suunnassa on

$$a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 4{,}47214\ \text{m}}{(2{,}0\,\text{s})^2} = 2{,}23607\,\text{m/s}^2 \approx 2{,}2\ \text{m/s}^2\,.$$

b) Tason kaltevuuskulma saadaan yhtälöstä $\tan\alpha = \frac{2{,}5\,\text{m}}{5{,}0\,\text{m}}$, josta kulma on $\alpha = 26{,}5651°$.

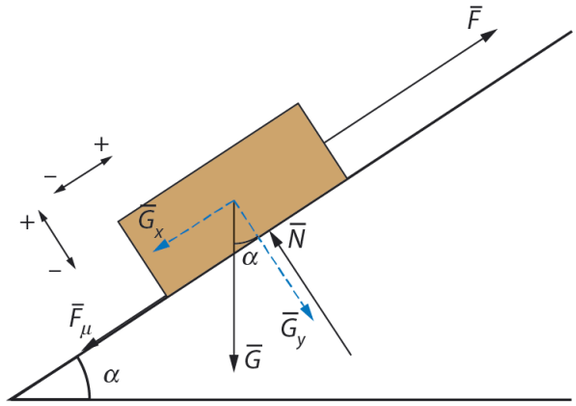


Newtonin II lain mukaan on $\sum\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{F}_\mu + \overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}$.

Tason suunnassa on $\sum\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{G}_x + \overline{F}_\mu = m\overline{a}$. Kun tason suunta alas on positiivinen, skalaariyhtälöstä $G_x - F_\mu = ma$ saadaan liukukitkan suuruudeksi

$$F_\mu = G_x - ma = mg\sin\alpha - ma$$
$$= 25\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \sin 26{,}5651° - 25\ \text{kg} \cdot 2{,}23607\ \text{m/s}^2 \approx 54\ \text{N}.$$

7-12.



Koska laatikko liikkuu vakionopeudella, Newtonin II lain mukaan on

$\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{F} + \overline{F}_\mu + \overline{N} + \overline{G} = \overline{0}$.

Tason suunnassa on $\Sigma \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{F} + \overline{G}_x + \overline{F}_\mu = \overline{0}$. Kun sovitaan suunta pitkin kaltevaa tasoa ylös positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö

$F - G_x - F_\mu = 0$, josta $F = G_x + F_\mu = G\sin\alpha + \mu N$.

Tästä yhtälöstä ei vielä voi ratkaista voiman F suuruutta, koska pinnan tukivoiman N suuruutta ei tiedetä.

Tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa: $\Sigma \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{G}_y + \overline{N} = \overline{0}$.

Kun sovitaan suunta tasosta kohtisuorasti ylöspäin positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $N - G_y = 0$, josta $N = G_y = G\cos\alpha$. Kun tukivoiman yhtälö sijoitetaan yhtälöön $F = G\sin\alpha + \mu N$, vetävän voiman suuruudeksi saadaan

$$F = G\sin\alpha + \mu N = G\sin\alpha + \mu G\cos\alpha = G(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

$$= mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

$$= 75\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot (\sin 41° + 0{,}45 \cdot \cos 41°) \approx 730\ \text{N}.$$

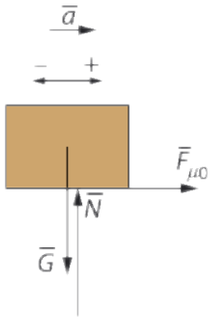
7-13. Koska kirjan massa on 510 g, kirjaan kohdistuva paino on

$G = mg = 0{,}51\ \text{kg} \cdot 9{,}81\text{m/s}^2 \approx 5{,}0\ \text{N}$. Lepokitka ylöspäin on

$F_{\mu 0} = \mu_0 N = 0{,}60 \cdot 12\ \text{N} = 7{,}2\ \text{N} > G$, eli kirja pysyy paikoillaan.

7-14. **a)** Laatikkoon vaikuttavat voimat ovat paino, lavan tukivoima ja kitka. Laatikkoa kiihdyttävänä voimana on lavan pinnan ja laatikon pohjan välinen lepokitka.

b) Newtonin II lain mukaan on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{F}_{\mu 0} + \overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}$.

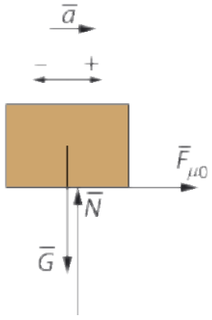


Vaakasuunnassa on $\overline{F}_{\mu 0} = m\overline{a}$. Valitaan liikkeen suunta positiiviseksi. Yhtälöstä $\mu_0 mg = ma$ saadaan kitkakertoimeksi

$\mu_0 = \dfrac{a}{g} = \dfrac{1{,}8\ \text{m/s}^2}{9{,}81\ \text{m/s}^2} \approx 0{,}18$, joka on pienempi kuin 0,37.

Näin ollen laatikko ei liu'u.

7-15. Newtonin II lain mukaan on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{F}_{\mu 0,\max} + \overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}$.



Tienpinnan suunnassa on $\overline{F}_{\mu 0,\max} = m\overline{a}$. Kun liikkeen suunta valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö

$F_{\mu 0,\max} = ma$ eli

$0{,}58\mu_0 N = ma$ eli

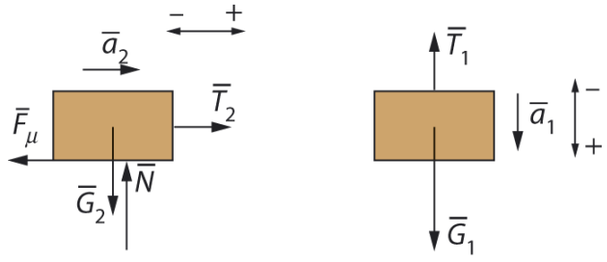
$0{,}58\mu_0 mg = ma.$

Maksimikiihtyvyydeksi saadaan

$a = 0{,}58\ \mu_0 g = 0{,}58 \cdot 0{,}18 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \approx 1{,}0\ \text{m/s}^2.$

Maksimikiihtyvyyttä on vaikea saavuttaa, koska lepokitka muuttuu helposti liukukitkaksi, joka on pienempi kuin lepokitkan maksimiarvo. Kiihtyvyys pienenee auton nopeuden kasvaessa, koska tällöin ilmanvastus kasvaa.

7-16.



Valitaan systeemin liikkeen positiiviseksi suunnaksi se, jossa alustalla oleva kappale liukuu oikealle ja riippuva kappale alas.

Oletetaan, että lanka on venymätön. Koska langassa vallitsee sama jännitys, on $|\overline{T}_1| = |\overline{T}_2| = T$. Kappaleilla on sama kiihtyvyyden suuruus, koska ne liikkuvat yhdessä: $|\overline{a}_1| = |\overline{a}_2| = a$.

Liikeyhtälöstä $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{T}_2 + \overline{F}_\mu = m_2\overline{a}_2$ ja $\overline{T}_1 + \overline{G}_1 = m_1\overline{a}_1$ saadaan skalaariyhtälöt

$$\begin{cases} T - F_\mu = m_2 a \\ -T + G_1 = m_1 a \end{cases}$$

eli

$$\begin{cases} T - \mu m_2 g = m_2 a \\ -T + m_1 g = m_1 a. \end{cases}$$

Eliminoidaan yhtälöparista T laskemalla yhtälöt puolittain yhteen, jolloin kiihtyvyyden suuruudeksi saadaan

$$a = \frac{m_1 g - \mu m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{3{,}0 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 - 0{,}20 \cdot 2{,}0 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2}{5{,}0 \text{ kg}} \approx 5{,}1 \text{ m/s}^2.$$

Kiihtyvyys on positiivinen eli tasolla olevan kappaleen kiihtyvyys on oikealle ja riippuvan kappaleen alas.

TEHTÄVIEN RATKAISUT

8-1. Jousivaa'an lukema suolavedessä on pienempi kuin puhtaassa vedessä, koska suolaveden tiheys on suurempi kuin puhtaan veden ja siksi noste suolavedessä on suurempi kuin puhtaassa vedessä.

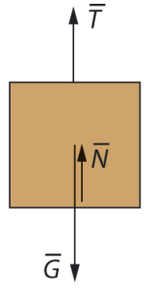
8-2. **a)** Lasipalaan kohdistuvan nosteen suuruus on

$N = 1{,}40\ \text{N} - 0{,}84\ \text{N} = 0{,}56\ \text{N}.$

b) Nosteen yhtälöstä $N = \rho V g$ saadaan lasipalan tilavuudeksi

$$V = \frac{N}{\rho g} = \frac{0{,}56\ \text{N}}{1000\ \text{kg/m}^3 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} = 57{,}08461\ \text{cm}^3 \approx 57\ \text{cm}^3.$$

c)



8-3. **a)** Hydrostaattisesta paineesta aiheutuvan voiman suuruus laatikon yläpinnalla on

$F_1 = p_1 A = \rho g h_1 A$

$= 1\,000\ \text{kg/m}^3 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}89\ \text{m} \cdot (0{,}55\text{m} \cdot 0{,}55\text{m})$

$= 2641{,}10\ \text{kN} \approx 2{,}6\ \text{kN}$

ja alapinnalla

$F_2 = p_2 A = \rho g h_2 A$

$= 1\,000\ \text{kg/m}^3 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 1{,}44\ \text{m} \cdot (0{,}55\text{m} \cdot 0{,}55\text{m})$

$= 4273{,}23\ \text{kN} \approx 4{,}3\ \text{kN}.$

b) Laitteeseen kohdistuvan nosteen suuruus on

$N = F_2 - F_1 = 4273{,}23\ \text{kN} - 2641{,}10\ \text{kN} \approx 1{,}6\ \text{kN}.$

Huomaa, nosteen voi laskea myös näin:

$N = \rho V g = 1\,000\ \text{kg/m}^3 \cdot (0{,}55\ \text{m})^3 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \approx 1{,}6\ \text{kN}.$

8-4. **a)** Kiveen kohdistuva paino on
$G = mg = 1{,}2\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 11{,}772\ \text{N} \approx 12\ \text{N}.$

b) Kiven massa ilmassa on sama kuin massa vedessä eli 1,2 kg.

c) Lasketaan ensin kiven tilavuus. Tiheyden yhtälöstä $\rho = m/V$ saadaan kiven tilavuudeksi

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{1{,}2\,\text{kg}}{2500\ \text{kg/m}^3} = 4{,}8 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^3.$$

Kiveen kohdistuvan nosteen suuruus on
$N = \rho V g = 1000\ \text{kg/m}^3 \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^3 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 4{,}7088\ \text{N} \approx 4{,}7\ \text{N}.$

d) Kivi pysyy paikoillaan, kun sitä tuetaan ylöspäin suuntautuvalla voimalla, jonka suuruus on

$F = G - N = 11{,}772\ \text{N} - 4{,}7088\ \text{N} \approx 7{,}1\ \text{N}.$

8-5. **a)** Suolaisen meriveden tiheys on suurempi kuin järviveden tiheys. Näin ollen merivedessä uiminen on helpompaa, koska noste merivedessä on suurempi kuin järvivedessä.

b) Vedessä kiven kannatteleminen on helpompaa veden nosteen vuoksi. Myös ilmassa kiveen kohdistuu noste, mutta se on ilmassa (kaasuissa) huomattavasti pienempi kuin nesteissä.

c) Vesivoimistelua käytetään hoitokeinona. Veden keventävästä vaikutuksesta (nosteesta) johtuen esim. voimisteleminen vedessä on helpompaa kuin ilmassa ja se rasittaa niveliä vähemmän. Toisaalta veden vastus estää liikkeitä. Näin vesijumpassa lihakset joutuvat

työskentelemään voimakkaammin kuin esimerkiksi ilmassa altaan reunalla ja hyvin heikotkin lihakset voivat kuntoutua.

8-6. Kun lasikuvusta imetään ilmaa pois, ilmanpaine kuvun sisällä pienenee ja ilman tiheys alenee. Tällöin ilman lasipalloon kohdistama noste pienenee ja lasipallo painuu alaspäin.

8-7. Kelluva kappale syrjäyttää oman tilavuutensa verran vettä. Kummankin lelun syrjäyttämän veden paino on yhtä suuri kuin astiaan mahtuvan lisäveden paino, jos lelua ei olisi astiassa. Kaikissa tilanteissa punnitustulos on sama.

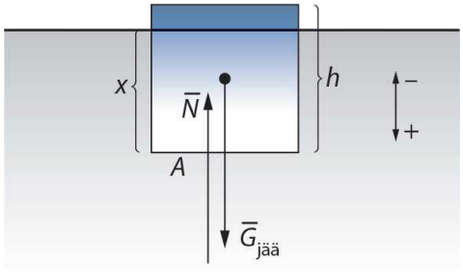
8-8. Pallon tilavuus on $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (0{,}025\ \text{m})^3 \approx 65{,}4498\ \text{cm}^3$. Kun pallo uppoaa, sen syrjäyttämän veden tilavuus Arkhimedeen lain mukaan on 65,4498 cm^3.

Tämän vesimäärän massa on

$m = \rho V = 1{,}000\ \text{g/cm}^3 \cdot 65{,}4498\ \text{cm}^3 = 65{,}4498\ \text{g}$.

Vaa'an lukema on 1995 g + 65,4498 g ≈ 2100 g.

8-9. Tasapainoehto on $\Sigma \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{G}_{\text{jää}} + \overline{N} = \overline{0}$. Kun suunta alas on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $G_{\text{jää}} - N = 0$ eli jääkuutioon kohdistuva paino on yhtä suuri kuin veden aiheuttama noste.



Olkoon x jääkuution vedenpinnan alapuolella olevan sivun pituus, A pohjan pinta-ala sekä h kuution sivun pituus. Vedenpinnan alapuolella olevan jääpalan tilavuus on $V = Ax$.

Yhtälö $G_{\text{jää}} = N$ saadaan muotoon

$m_{\text{jää}}g = \rho_{\text{vesi}} Vg$ eli

$\rho_{\text{jää}} V = \rho_{\text{vesi}} Ax$ eli

$\rho_{\text{jää}} Ah = \rho_{\text{vesi}} Ax$

$\rho_{\text{jää}} h = \rho_{\text{vesi}} x.$

Jääkuution vedenpinnan alapuolella olevan sivun x pituus on

$$x = \frac{\rho_{\text{jää}}}{\rho_{\text{vesi}}} h = \frac{920 \text{ kg/m}^3}{1030 \text{ kg/m}^3} \cdot 4{,}0 \text{ m} = 3{,}57282 \text{ m}.$$

Jäästä on pinnan alapuolella 3,57282 m ja pinnan yläpuolella

4,0 m – 3,57282 m = 0,42718 m.

Pinnan yläpuolella on tilavuudesta 0,42718 m · 16 m^2 = 6,83488 m^3. Se on noin 11 % koko tilavuudesta.

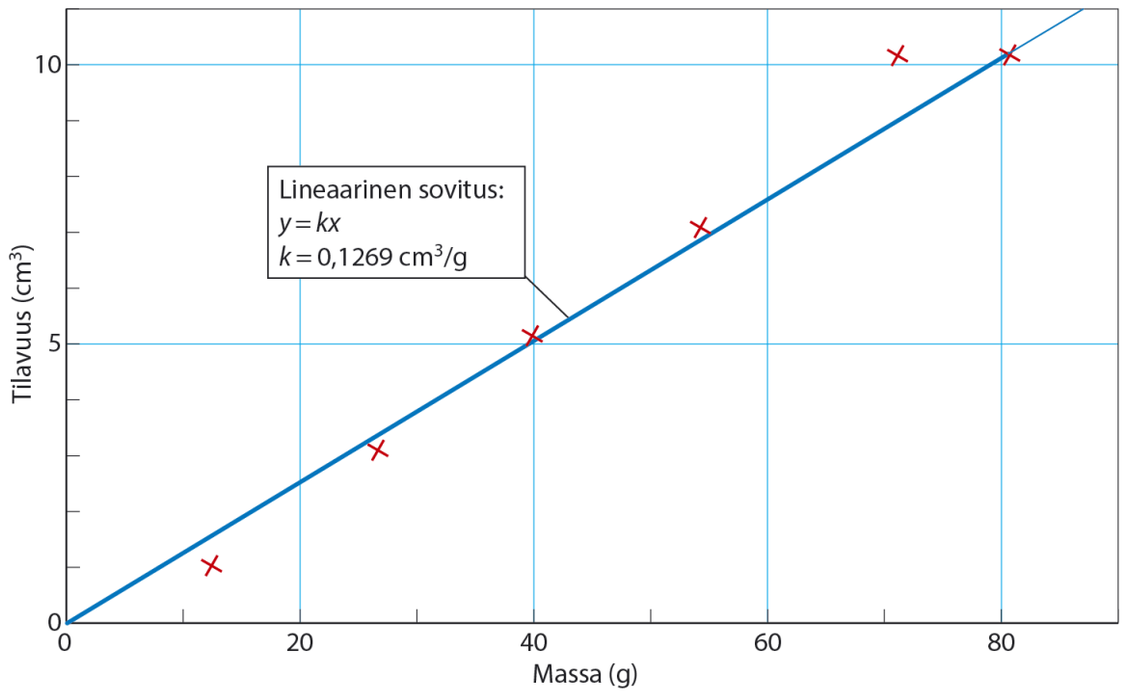
8-10. **a)** Painon yhtälöstä $G = mg$ kappaleen massa ilmassa on $m = \frac{G}{g}$. Nosteen yhtälöstä $N = \rho Vg$ kappaleen tilavuus on $V = \frac{N}{\rho g}$. Veden tiheys on 1,0 g/cm^3.

Lasketaan kunkin kappaleen massa ja kuhunkin kappaleeseen kohdistuva noste sekä kappaleen tilavuus.

Kappale	G_{ilma} (N)	G_{vesi} (N)
1	0,12	0,11
2	0,26	0,23
3	0,39	0,34
4	0,53	0,46
5	0,69	0,59
6	0,79	0,69

Kappale	m (g)	N (N)	$V = \frac{N}{\rho g}$ (cm^3)
1	12,2	0,01	1,0
2	26,5	0,03	3,1
3	39,8	0,05	5,1
4	54,0	0,07	7,1
5	70,3	0,10	10,2
6	80,5	0,10	10,2

Kappaleen tilavuus massan funktiona:



b) Kappaleen 5 mittaustuloksessa on satunnainen virhe, hylätään se. Mittausohjelman mukaan suoran fysikaalinen kulmakerroin on 0,1269 cm^3/g. Kappaleen tiheys on fysikaalisen kulmakertoimen käänteisluku eli $\rho = 7{,}9$ g/cm^3.

8-11. Koska pienoismalli keveni 640 g = 0,64 kg, syrjäytetyn veden massa on myös 0,64 kg. Pienoismalliin kohdistuva noste on yhtä suuri kuin syrjäytettyyn vesimäärään kohdistuva paino, eli noste on

$N = 0{,}64\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 6{,}2784\ \text{N}.$

a) Nosteen yhtälöstä $N = \rho V g$ pienoismallin tilavuudeksi saadaan

$$V = \frac{N}{\rho g} = \frac{6{,}2784\ \text{N}}{1000\ \text{kg/m}^3 \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2} = 6{,}4 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^3 = 640\ \text{cm}^3.$$

(Tilavuuden voi laskea myös syrjäytetyn veden massan avulla:

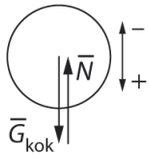
$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{0{,}64\ \text{kg}}{1000\ \text{kg/m}^3} = 6{,}4 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^3 = 640\ \text{cm}^3.)$$

b) Koska mittakaava on 1:20, tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio: dinosauruksen tilavuus on

$20^3 \cdot 6{,}4 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^3 = 5{,}12\ \text{m}^3 \approx 5{,}1\ \text{m}^3.$

c) Dinosauruksen massa olisi $m = \rho V = 1000\ \text{kg/m}^3 \cdot 5{,}12\ \text{m}^3 \approx 5100\ \text{kg}.$

8-12. Rajatapauksessa palloon kohdistuva noste on yhtä suuri kuin palloon kohdistuva kokonaispaino.



Tasapainoehto on $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{G}_{\text{kok}} + \overline{N} = \overline{0}$. Valitaan suunta alas positiiviseksi.

Skalaariyhtälöstä $G_{\text{kok}} - N = 0$ saadaan yhtälö

$m_{\text{ki}} g + m_{\text{kuorma}} g + m_{\text{pallo}} g = \rho_{\text{ilma}} V g.$

Kuuman ilman massa voidaan kirjoittaa muotoon $m_{\text{ki}} = \rho_{\text{ki}} V$; sijoitetaan tämä edelliseen yhtälöön.

Yhtälöstä $\rho_{\text{ki}} Vg + m_{\text{kuorma}} g + m_{\text{pallo}} g = \rho_{\text{ilma}} Vg$ kuorman massa on

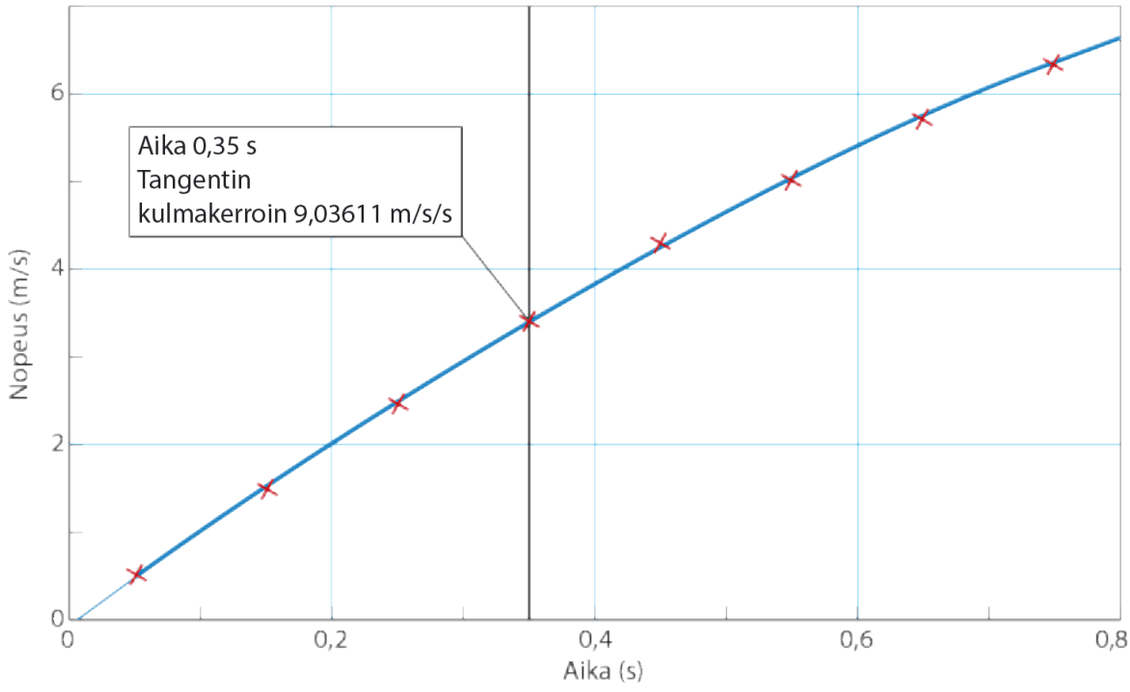
$$m_{\text{kuorma}} = \rho_{\text{ilma}} V - \rho_{\text{ki}} V - m_{\text{pallo}} = (\rho_{\text{ilma}} - \rho_{\text{ki}}) V - m_{\text{pallo}}$$
$$= (1{,}3 \text{ kg/m}^3 - 0{,}85 \text{ kg/m}^3) \cdot 160 \text{ m}^3 - 23 \text{ kg} = 49 \text{ kg}.$$

8-13. **a)** Epäily rautalaivojen kellumisesta johtui siitä, että raudan tiheys oli suurempi kuin veden. Rautalaivan pysyminen pinnalla johtuu veden nosteesta. Kelluva laiva on ontto, eli valtaosa laivan tilavuudesta on ilmaa. Laivaan kohdistuva veden noste on yhtä suuri kuin laivan syrjäyttämään vesimäärään kohdistuva paino.

b) Pelastusliivit valmistetaan vedenpitävästä, kevyestä ja kelluvasta materiaalista. Pelastusliivien varassa ihminen kelluu, vaikka uimiseen tai veden pinnalla pysymiseen tarvittavat voimat vedessä loppuisivat. Varsinaisten pelastusliivien (ei uimaliivien) etupuolella on suuret kellukkeet, jotka kääntävät veden varaan joutuneen tajuttoman henkilön selälleen, jolloin pää pysyy veden yläpuolella.

8-14. Alussa palloa on helppo työntää veteen, koska vedestä palloon kohdistuva noste on pieni. Mitä syvemmälle yrität painaa palloa, sitä suurempi noste on. Nosteen suuruus riippuu vedenpinnan alapuolella olevan pallon osan tilavuudesta.

8-15. Nopeuden kuvaaja.

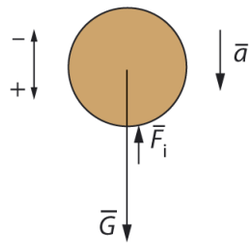


b) Pallon nopeus hetkellä 0,20 s on 2,0 m/s ja hetkellä 0,60 s 5,4 m/s.

c) Nopeuden kuvaaja kaartuu, koska pallon nopeuden kasvaessa palloon kohdistuva ilmanvastus kasvaa.

d) Hetkellä 0,35 s pallon kiihtyvyys on 9,03611 m/s^2.

Newtonin II lain mukaan on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{G} + \overline{F}_\text{i} = m\overline{a}$.



Kun valitaan suunta alas positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö

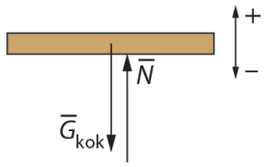
$G - F_\text{i} = ma$, josta ilmanvastuksen suuruus hetkellä 0,35 s on

$F_\text{i} = G - ma = mg - ma = m(g - a)$

$= 0{,}0123\ \text{kg} \cdot (9{,}81\ \text{m/s}^2 - 9{,}03611\ \text{m/s}^2) \approx 9{,}5\ \text{mN}.$

8-16. Vedessä olevaan sormen osaan kohdistuu noste. Newtonin III lain mukaan sormi kohdistaa veteen nosteen suuruisen alaspäin suuntautuvan voiman. Vaa'an lukema pienenee, kun sormi otetaan pois vedestä.

8-17. Laituriin kohdistuvan nosteen on oltava yhtä suuri kuin styroksin, puuosien ja kuorman yhteenlaskettu paino. Tasapainoehto on $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{G}_{\text{kok}} + \overline{N} = \overline{0}$.



Kun valitaan suunta ylös positiiviseksi, saadaan yhtälö $N - G_{\text{kok}} = 0$, josta

$G_{\text{kok}} = N$ eli $G_{\text{henkilöt}} + G_{\text{puuosat}} + G_{\text{styroksi}} = \rho_{\text{vesi}} Vg$.

Olkoon n on tarvittavien styroksikellukkeiden lukumäärä.

Tarvittavaan styroksimäärään kohdistuva paino on

$G_{\text{styroksi}} = n \cdot m_{\text{styroksi}} g = n \cdot \rho_{\text{styroksi}} Vg$.

Laituriin kohdistuva kokonaispaino on

$G_{\text{kok}} = G_{\text{henkilöt}} + G_{\text{puuosat}} + G_{\text{styroksi}}$

$= 4 \cdot 75 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 + 95 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 + n \cdot 25 \text{ kg/m}^3 \cdot 0{,}075 \text{ m}^3 \cdot 9{,}81 \text{m/s}^2$

$= 3874{,}95 \text{ N} + n \cdot 18{,}39 \text{ N}.$

Veden noste on

$N = \rho_{\text{vesi}} Vg = 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot n \cdot 0{,}075 \text{ m}^3 \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = n \cdot 735{,}75 \text{ N}.$

Kun em. lausekkeet sijoitetaan yhtälöön $G_{\text{kok}} = N$, saadaan yhtälö

$G_{\text{henkilöt}} + G_{\text{puuosat}} + G_{\text{styroksi}} = N$ eli

$3874{,}95 \text{ N} + n \cdot 18{,}39 \text{ N} = n \cdot 735{,}75 \text{ N}.$

Ratkaistaan yhtälöstä n:

$3874{,}95\ \text{N} = n \cdot 735{,}75\ \text{N} - n \cdot 18{,}39\ \text{N}$

$3874{,}95\ \text{N} = n \cdot 717{,}36\ \text{N}$, josta

$$n = \frac{3874{,}95\,\text{N}}{717{,}36\,\text{N}} \approx 5{,}4\,.$$

Styroksikellukkeita tarvitaan 6 kpl.

8-18. **a)** Kun Jukka seisoo linja-auton käytävällä ja auto lähtee i) liikkeelle, Jukka pyrkii horjahtamaan taaksepäin ja kun auto ii) jarruttaa, Jukka horjahtaa eteenpäin.

b) Kun autoa kiihdytetään, ilman hitaus saa ilman pakkautumaan auton peräosaan. Ilman tiheys siis kasvaa auton takapäätä kohti mentäessä. Tästä aiheutuu ilmassa olevaan heliumpalloon noste vaakasuorassa suunnassa kohti auton etupäätä. Nosteen suunta on aineen tiheämmästä osasta kohti harvempaa osaa.

Kun autoa jarrutetaan, ilman hitaus saa ilman pakkautumaan auton etuosaan. Ilman tiheys kasvaa auton etupäätä kohti mentäessä. Tästä aiheutuu ilmassa olevaan heliumpalloon noste vaakasuorassa suunnassa kohti auton takapäätä.

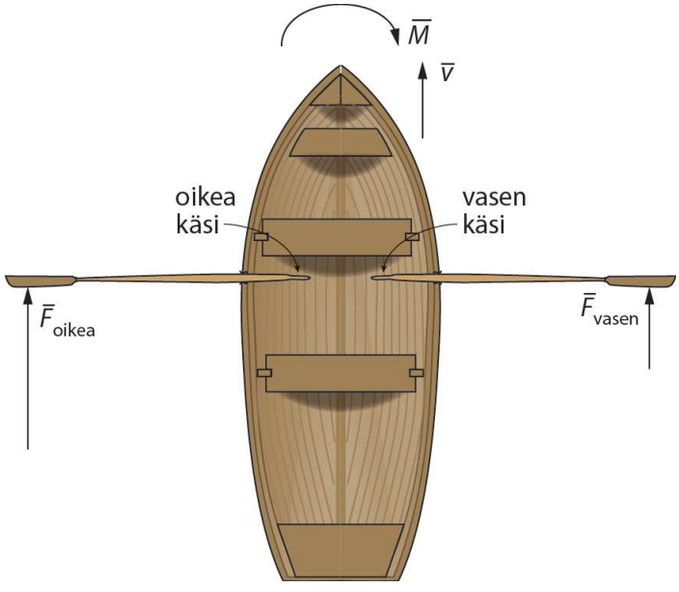
TEHTÄVIEN RATKAISUT

9-1. **a)** Ei

b) Kyllä

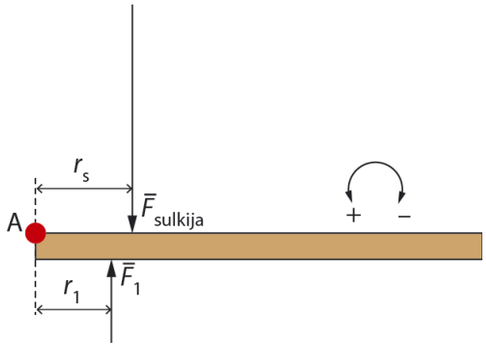
c) Kyllä.

9-2. Jos soudat oikean käden puoleisella airolla voimakkaammin kuin vasemman käden puoleisella airolla, vesi kohdistaa oikean käden puoleiseen airoon suuremman voiman kuin vasemman käden puoleiseen airoon. Tällöin suuremman voiman aiheuttama vääntömomentti on suurempi ja vene kääntyy vasemman käden suuntaan eli kulkusuunnassa oikealle.



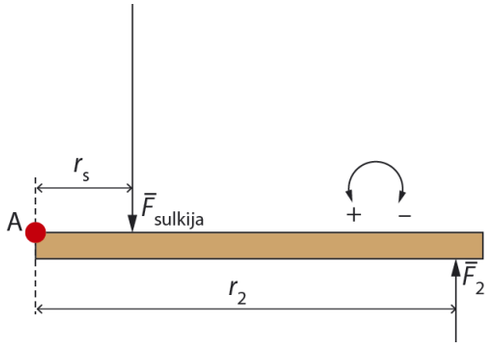
9-3. Sovitaan kiertosuunta vastapäivään positiiviseksi. Sulkijapumpun varsi kohdistaa oveen voiman, jonka momentti $M_A = -F_{sulkija} r_s$ sulkee oven, ellei sulkeutumista estetä. Oven avoimena pitämiseen tarvitaan yhtä suuri voiman momentti vastakkaiseen kiertosuuntaan. Kun este asetetaan oven eteen, esteestä kohdistuu oveen voima $\overline{F}$, jonka momentti oven saranoiden A suhteen on $M_A = Fr$. Voima $\overline{F}$ on yhtä suuri kuin lattian esteeseen kohdistama kitka.

Kuva 1: Ovi on kuvattu ylhäältä päin. Este on lähellä saranaa.



Kun este on lähellä saranaa, voiman $\overline{F}_1$ momentti on $M_{1,A} = F_1 r_1$. Ovi lähtee sulkeutumaan, koska tässä tapauksessa voiman $\overline{F}_1$ vääntövarsi r_1 on pieni ja siksi oven sulkijan voiman momentti on suurempi kuin esteen voiman vastakkaissuuntainen momentti.

Kuva 2: Este on kaukana saranasta.



Kun este on kaukana saranasta, voiman $\overline{F}_2$ momentti on $M_{2,\mathrm{A}} = F_2 r_2$. Tässä tapauksessa r_2 on suuri, joten voiman $\overline{F}_2$ momentti on riittävän suuri kumoamaan sulkijan aiheuttaman vääntövaikutuksen.

Huomaa, että saranoihin kohdistuvia voimia ei tarkastella, koska niillä ei ole vääntövaikutusta.

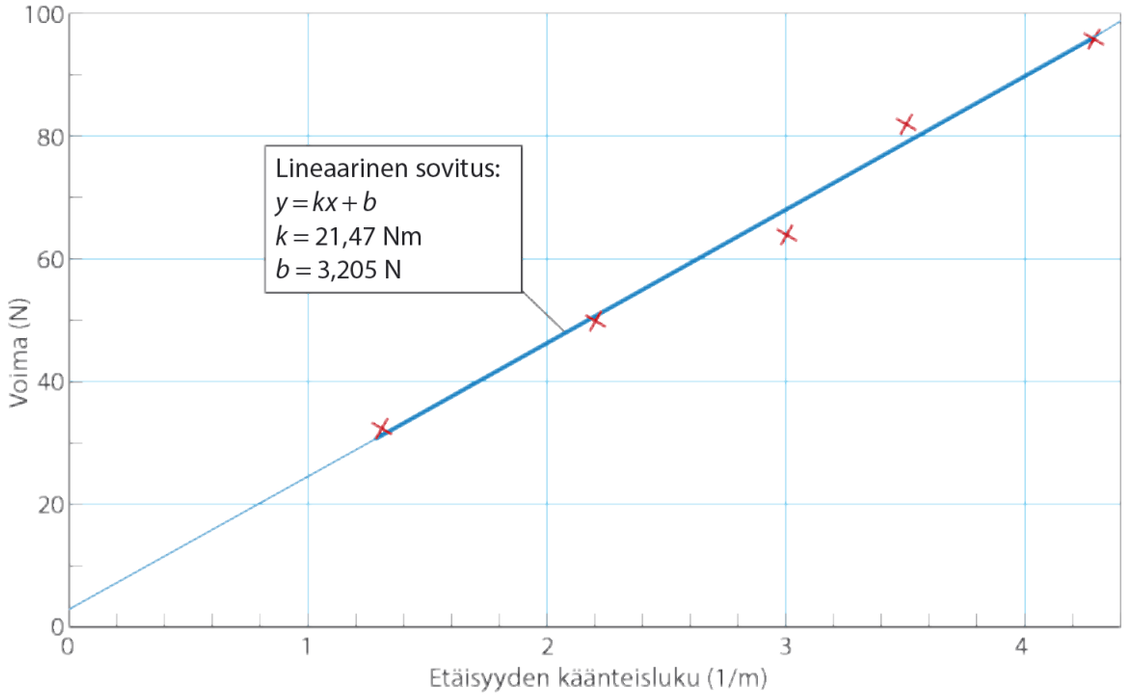
9-4. Tarvittava voima on pienin, kun voima on kohtisuorassa voiman vartta vastaan. Voiman momentti on $M = Fr$, joten pienimmän voiman suuruus on

$$F = \frac{M}{r} = \frac{130\ \mathrm{Nm}}{0{,}24\ \mathrm{m}} \approx 540\ \mathrm{N}.$$

9-5. Merkitään mittauspisteiden arvot taulukkoon:

$1/r$ (1/m)	1,3	2,2	3,0	3,5	4,3
F (N)	32	50	64	82	95

Viedään taulukossa olevat arvot mittausohjelmaan.

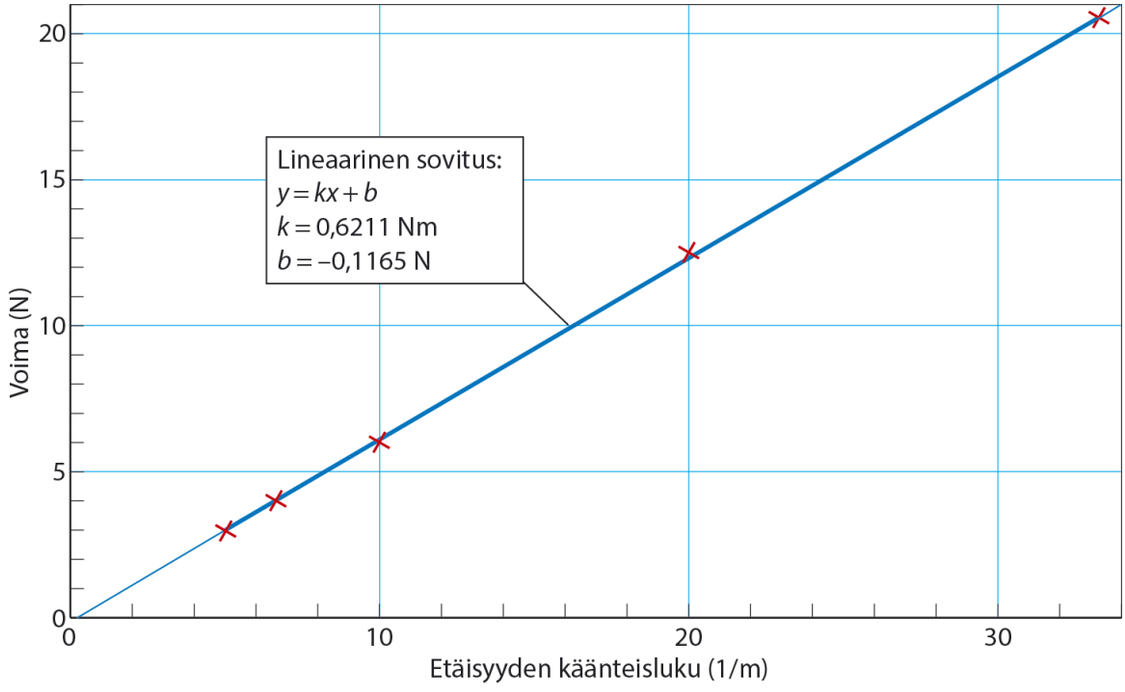


Koska voiman momentti on $M = Fr$, eli $F = M\frac{1}{r}$, voiman momentti saadaan suoran fysikaalisena kulmakertoimena. Mittausohjelman perusteella oven auki pitämiseen tarvittavan voiman momentti on $M \approx 21$ Nm.

9-6. Merkitään mittaustulokset taulukkoon. Koska voiman momentti on kääntäen verrannollinen voiman suuruuteen, lasketaan taulukkoon $1/r$:n arvot.

r (m)	0,03	0,05	0,10	0,15	0,20
$1/r$ (1/m)	33,33	20,00	10,00	6,67	5,00
F (N)	20,5	12,5	6,0	4,0	3,0

Viedään arvot $1/r$,F mittausohjelmaan.



Voiman momentti on mittausohjelman perusteella 0,6211 Nm ≈ 0,62 Nm

9-7. **a)** Kun momentin kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, voiman $\overline{F}_1$ momentti akselin A suhteen on

$M_A = -F_1 r_1 = -4{,}0\ \text{N} \cdot 0{,}110\ \text{m} = -0{,}44\ \text{Nm}.$

Momentti on 0,44 Nm myötäpäivään.

b) Kun kulma $\alpha = 90°$, voimien momenttien summa on

$\sum M_A = -F_1 r_1 - F_2 r_2 = -4{,}0\ \text{N} \cdot 0{,}110\ \text{m} - 6{,}0\ \text{N} \cdot 0{,}220\ \text{m} \approx -1{,}8\ \text{Nm}.$

Jos kulma $\alpha = 50°$, voiman $\overline{F}_2$ vartta vastaan kohtisuora komponentti on

$F_{2y} = F_2 \sin 50° = 6{,}0\ \text{N} \cdot \sin 50° \approx 4{,}59627\ \text{N}.$

Momenttien summa akselin A suhteen on

$\Sigma M_A = -F_1 r_1 - F_{2y} r_2 = -0{,}44\ \text{Nm} - 4{,}59627\ \text{N} \cdot 0{,}220\ \text{m} \approx -1{,}5\ \text{Nm}.$
Momentti on 1,5 Nm myötäpäivään.

(Samaan lopputulokseen päädytään myös siten, että lasketaan voimalle sitä vastaan kohtisuora vääntövarsi.)

$r_{2,\text{kohtisuora}} = r_2 \sin 50° = 0{,}220\ \text{m} \cdot \sin 50° \approx 0{,}168530\ \text{m}.$

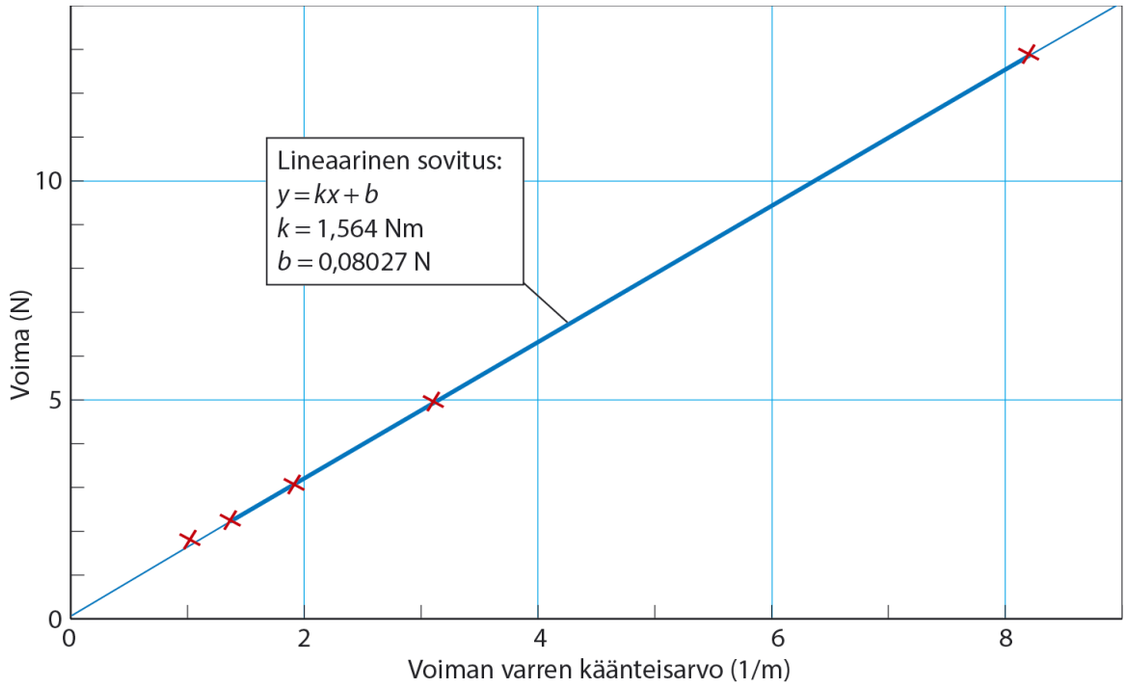
Momenttien summa on silloin

$\Sigma M_A = -F_1 r_1 - F_2 r_{2,\text{kohtisuora}} = -0{,}44\ \text{Nm} - 6{,}0\ \text{N} \cdot 0{,}168530\ \text{m} \approx -1{,}5\ \text{Nm}.$

9-8. Koska voiman momentti on kääntäen verrannollinen voiman vaikutussuoran etäisyyteen kiertoakselista, lisätään taulukkoon arvot $1/r$.

r (m)	0,15	0,30	0,45	0,60	0,75
$\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\text{m}}\right)$	6,67	3,33	2,22	1,67	1,33
F (N)	36,5	17,8	12,0	8,8	7,3

Viedään arvot $1/r$,F mittausohjelmaan.

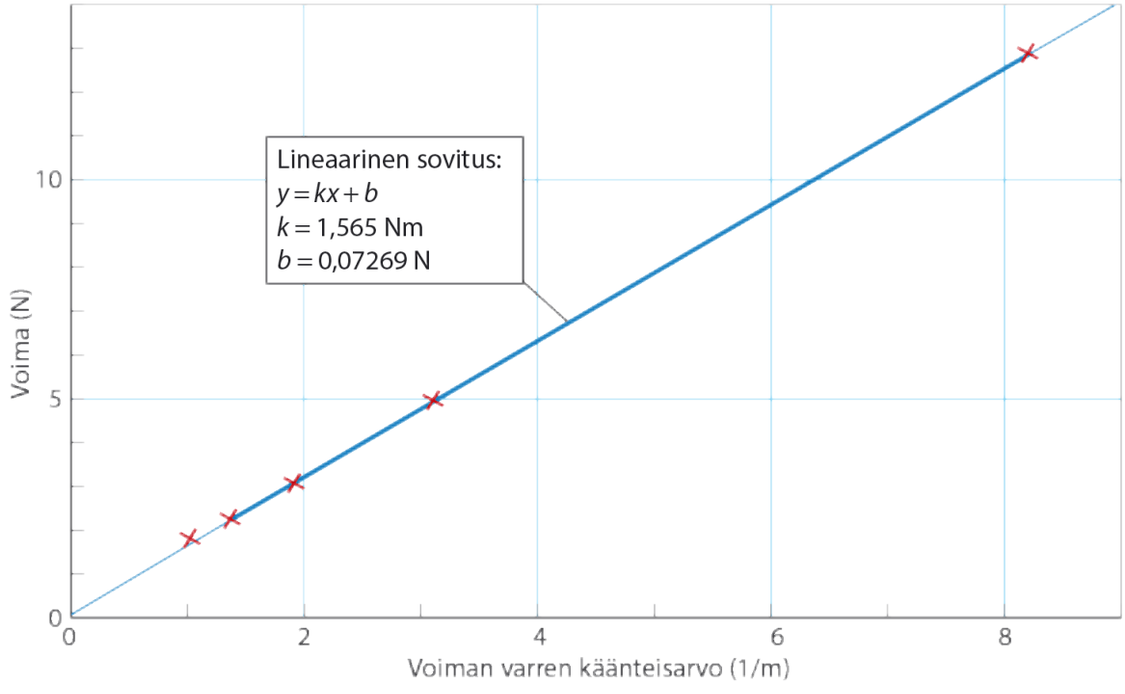


Mittausohjelman perusteella voiman momentti on 1,6 Nm.

9-9. Taulukoidaan mittaustulokset ja lasketaan voiman vaikutussuoran etäisyys r kiertoakselista. Lasketaan myös r:n käänteisarvot $1/r$. Kiertoakseli on viivaimen kohdassa 0,078 m. Voiman vaikutussuoran etäisyys kiertoakselista saadaan vähentämällä anturin ripustuskohdan lukemasta x kiertoakselin kohdan lukema x_A.

x_A (m)	x (m)	r (m) = ($x - x_A$) (m)	$1/r$ (1/m)	F (N)
0,078	0,20	0,122	8,19721	12,90
0,078	0,40	0,322	3,10559	4,95
0,078	0,60	0,522	1,91571	3,07
0,078	0,80	0,722	1,38504	2,23
0,078	1,00	0,922	1,08460	1,79

Viedään arvot $1/r$,F mittausohjelmaan.

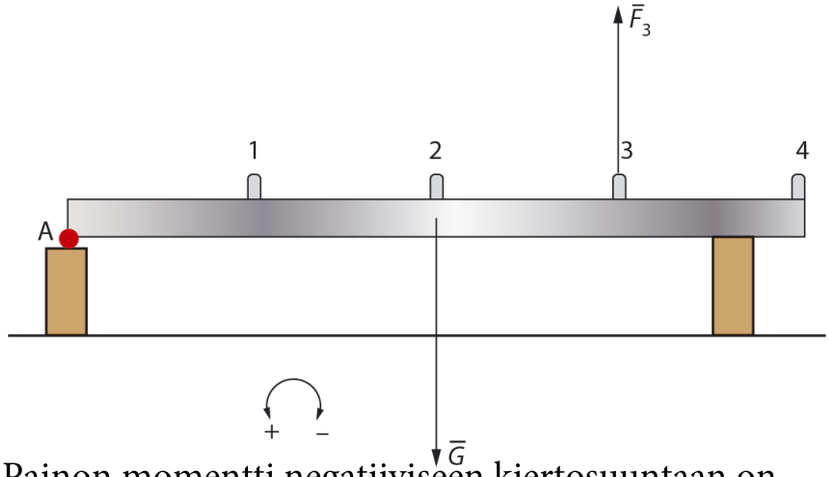


Voiman momentti on $1/r$,F-koordinaatistossa esitetyn suoran

$F = M \cdot \frac{1}{r}$ kulmakerroin.

Mittausohjelman mukaan voiman momentti on 1,6 Nm.

9-10. Valitaan kiertosuunta vastapäivään positiiviseksi. Tukki irtoaa tueltaan, jos nostavan voiman momentti positiiviseen kiertosuuntaan on suurempi kuin painon momentti negatiiviseen kiertosuuntaan. Tällöin tukki joutuu pyörimisliikkeeseen akselin A ympäri.



Painon momentti negatiiviseen kiertosuuntaan on

$$M_G = -Gr_G = -mgr_G = -46\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1{,}5\ \text{m} = -676{,}89\ \text{Nm}.$$

Kahvasta nostettaessa voiman momentin pitää olla positiiviseen kiertosuuntaan suurempi kuin 676,89 Nm.

Rajatapauksessa, jolloin tukki on irtoamassa alustastaan, voiman momentti on

$M_\text{A} = Fr = 676{,}89$ Nm, eli $F = \frac{M_\text{A}}{r} = \frac{676{,}89\ \text{Nm}}{r}$.

Näin ollen eri kahvoista nostettaessa tarvittavan voiman suuruus on suurempi kuin

$$F_1 = \frac{676{,}89\ \text{Nm}}{r_1} = \frac{676{,}89\ \text{Nm}}{0{,}75\ \text{m}} \approx 900\ \text{N},$$

$$F_2 = \frac{676{,}89\ \text{Nm}}{r_2} = \frac{676{,}89\ \text{Nm}}{1{,}50\ \text{m}} \approx 450\ \text{N},$$

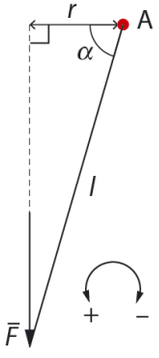
$$F_3 = \frac{676{,}89\ \text{Nm}}{r_3} = \frac{676{,}89\ \text{Nm}}{2{,}25\ \text{m}} \approx 300\ \text{N}\ \text{ ja}$$

$$F_4 = \frac{676{,}89\ \text{Nm}}{r_4} = \frac{676{,}89\ \text{Nm}}{3{,}0\ \text{m}} \approx 230\ \text{N}.$$

Huomaa: Osoittajan tarkkuus on kaksi merkitsevää numeroa. Siksi vastaustenkin tarkkuus on kaksi merkitsevää numeroa.

9-11. Polkupyörän polkimeen kohdistuu pyöräilijän painon suuruinen voima eli $F = G$.

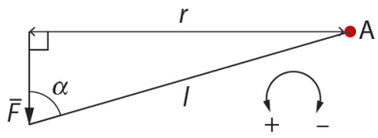
a) Voiman momentti on



$$M_\text{A} = Fr = Gr = mgr = mgl\cos\alpha = 57\ \text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}17\ \text{m} \cdot \cos 75° \approx 25\ \text{Nm}.$$

Momentti on 25 Nm vastapäivään.

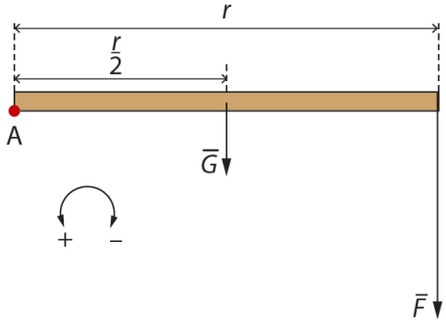
b) Voiman momentti on



$$M_{\mathrm{A}} = Fr = Gr = mgr = mgl\sin\alpha = 57\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}17\ \mathrm{m} \cdot \sin 75° \approx 92\ \mathrm{Nm}.$$

Momentti on 92 Nm vastapäivään.

9-12.



Uimahyppääjän paino on yhtä suuri kuin uimahyppääjän jalkapohjien lautaan kohdistama voima $\overline{F}$. Voiman $\overline{F}$ ja laudan painon $\overline{G}$ momenttien suunnat ovat negatiivisia akselin A suhteen.

$$\sum M_{\mathrm{A}} = -G \cdot \frac{r}{2} - Fr = -m_{\mathrm{lauta}} g \cdot \frac{r}{2} - m_{\mathrm{hyppääjä}} g \cdot r$$

$$= -25\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{2{,}0\ \mathrm{m}}{2} - 78\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 2{,}0\ \mathrm{m} \approx -1800\ \mathrm{Nm}.$$

Momentti on 1800 Nm myötäpäivään. Huomaa: Laudan vapaa pää voi olla myös vasemmalla, jolloin kiertosuunta on vastapäivään.

TEHTÄVIEN RATKAISUT

10-1. **a)** Laatikot kaatuvat järjestyksessä 1, 5, 3, 4, 6 ja 2.

b) Laatikot kaatuvat aina samassa järjestyksessä, koska kukin laatikko lähtee kaatumaan sillä hetkellä, kun painopiste siirtyy kallistettaessa tukipinnan ulkopuolelle. Mitä pidempi tukipinta on kaltevan tason suunnassa, sitä jyrkempi kulma tarvitaan, että laatikko kaatuisi.

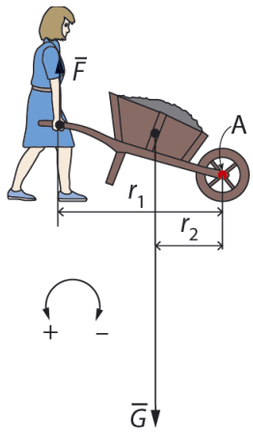
10-2. **b)** Tasapainotilanteessa momenttien summa on nolla.
Yhtälöstä $\sum M = G_{\text{varsi}} r_{\text{varsi}} - G_{\text{harja}} r_{\text{harja}} = 0$ saadaan $G_{\text{harja}} r_{\text{harja}} = G_{\text{varsi}} r_{\text{varsi}}$.
Harjaosan ja varsiosan momentit sormen kosketuskohdan suhteen ovat yhtä suuret. Harjaosan painopiste on lähempänä tukipistettä, joten harjaosan voiman varsi on pienempi kuin varsiosan. Koska $G_{\text{harja}} = \frac{r_{\text{varsi}}}{r_{\text{harja}}} G_{\text{varsi}}$, harjaosa on painavampi.

10-3. **a)** Painonnostokilpailussa painoja on helpompi nostaa, jos painot ovat yhtä suuret ja tangon eri päissä. Painopiste on tangon geometrisessä keskipisteessä. Painonnostaja pyrkii asettamaan kätensä yhtä kauas tangon painopisteestä (geometrisestä keskipisteestä).

b) Painonnostossa käytetään leveää otetta, jolloin tanko on mahdollisimman helppo pitää tasapainossa. Raskaat levyt tangon päissä aiheuttavat suuren momentin tankoon. Jos kädet olisivat lähekkäin, pienikin ero käsien ja tangon keskipisteen välisissä etäisyyksissä aiheuttaisi suuren eron vasempaan ja oikeaan käteen kohdistuvissa voimissa. Samoin pienikin tangon kiertoliike tangon keskipisteen ympäri noston aikana olisi vaikea pysäyttää, nostaja menettäisi helposti tasapainonsa sivusuunnassa.

10-4. Joidenkin kukkien, esimerkiksi tulppaanien, varsi kasvaa nopeasti maljakossa. Samalla maljakon pohjalla oleva vesi vähenee sen noustessa varteen. Kukat voivat taipua kasvaessaan kauas reunan yli, ja kukka-asetelman painopiste muuttuu. Maljakon, veden ja kukkien yhteinen painopiste voi siirtyä maljakon kapean pohjan tukipinnan ulkopuolelle, varsinkin jos kukat taipuvat samaan suuntaan. Näin maljakko voi kaatua itsestään.

10-5. **a)**



Tasapainotilassa kärryyn kohdistuvien voimien momenttien summa on nolla eli $\Sigma M_A = 0$.

Yhden käden kärryn aisaan kohdistama voima on $\overline{F}$. Kun suunta vastapäivään on positiivinen, saadaan yhtälö

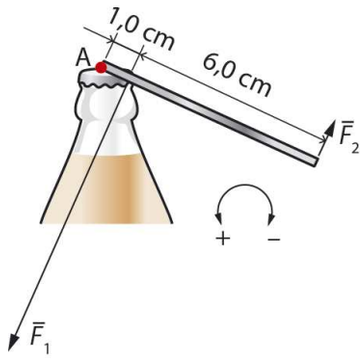
$-2Fr_1 + Gr_2 = 0$

$2Fr_1 = Gr_2$, joten

$$F = \frac{Gr_2}{2r_1} = \frac{430\ \text{N} \cdot 0{,}47\ \text{m}}{2 \cdot 1{,}2\ \text{m}} \approx 84\ \text{N}.$$

Kumpaankin käteen kohdistuva voima on yhtä suuri eli 84 N, mutta vastakkaissuuntainen (alas).

b)



Tasapainotilassa avaajaan kohdistuvien voimien momenttien summa on nolla eli $\Sigma M_A = 0$.

Kun suunta vastapäivään on sovittu positiiviseksi, saadaan yhtälö

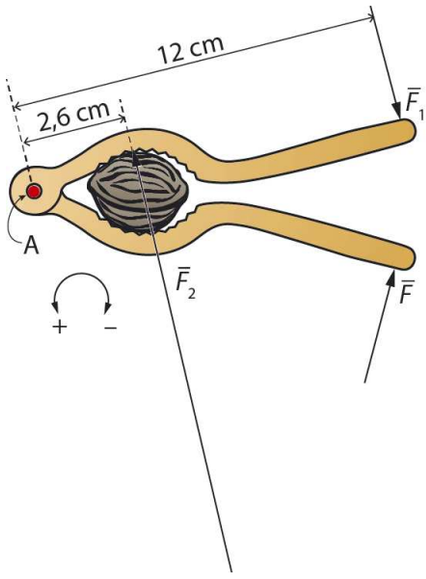
$-F_1 r_1 + F_2 r_2 = 0$ eli

$F_1 r_1 = F_2 r_2$, joten

$$F_1 = \frac{F_2 r_2}{r_1} = \frac{F_2 \cdot 7{,}0\ \text{cm}}{1{,}0\ \text{cm}} = 7{,}0\ F_2.$$

Korkin reunan avaajaan kohdistama voima $\bar{F}_1$ on yhtä suuri ja vastakkaissuuntainen kuin avaajan korkkiin kohdistama voima $-\bar{F}_1$. Korkin reunaan kohdistuva voima on 7,0-kertainen vääntävään voimaan verrattuna.

10-6.



Newtonin III lain mukaan varsi kohdistaa pähkinään yhtä suuren, mutta vastakkaissuuntaisen voiman kuin pähkinä kohdistaa varteen. Särkymisen rajatapauksessa ylempään varteen kohdistuvien voimien momenttien summa on nolla eli $\Sigma M_A = 0$.

Suunta vastapäivään on positiivinen, joten

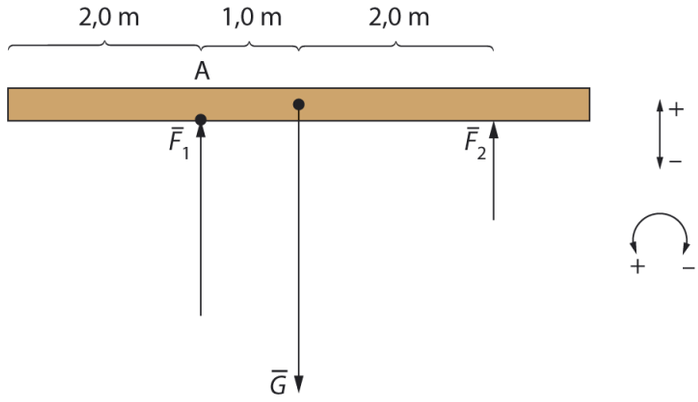
$-F_1 r_1 + F_2 r_2 = 0$ eli

$F_1 r_1 = F_2 r_2$, joten

särkijän kumpaakin vartta on painettava voimalla, jonka suuruus on

$$F_1 = \frac{F_2 r_2}{r_1} = \frac{43\ \text{N} \cdot 0{,}026\ \text{m}}{0{,}12\ \text{m}} = 9{,}3\ \text{N}.$$

10-7. Tasapaksuun hirteen kohdistuva paino vaikuttaa hirren painopisteeseen eli keskipisteeseen. Hirren tasapainoehto pystysuunnassa on $\sum \bar{F} = \bar{0}$ eli $\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{G} = \bar{0}$. Kun suunta ylös on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $F_1 + F_2 - G = 0$.



Vasemmanpuoleisen tukivoiman $\overline{F}_1$ vaikutuskohta on A. Valitaan kohta A momenttiakseliksi. Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, akselin A suhteen momenttiyhtälö on $\sum M_{\mathrm{A}} = -G \cdot r_1 + F_2 \cdot r_2 = 0.$

Tukivoiman $\overline{F}_2$ suuruus on

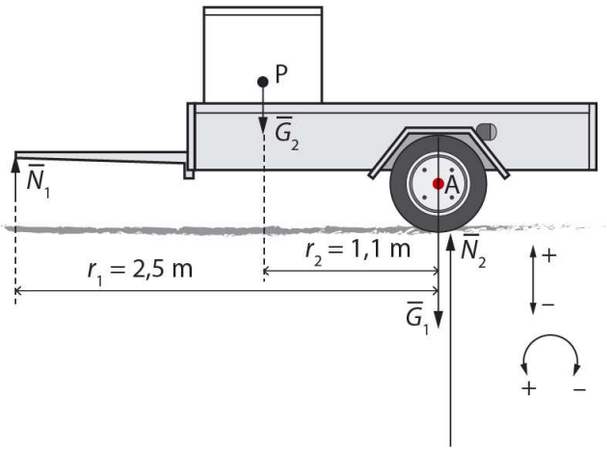
$$F_2 = \frac{mgr_1}{r_2} = \frac{140\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 1{,}0\ \mathrm{m}}{3{,}0\ \mathrm{m}} = 457{,}8\ \mathrm{N}.$$

Tukivoiman $\overline{F}_1$ suuruus saadaan yhtälöstä $F_1 + F_2 - G = 0$, joten

$$F_1 = G - F_2 = mg - F_2 = 140\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} - 457{,}8\,\mathrm{N} \approx 915{,}4\,\mathrm{N}.$$

Voimat ovat 460 N ja 920 N.

10-8.



a) Valitaan pyörän akseli A momenttiakseliksi. Kärryyn kohdistuvan painon $\overline{G}_1$ ja pyöriin kohdistuvan tukivoiman $\overline{N}_2$ vaikutussuoran etäisyys akselista A on 0,0 m, joten näillä voimilla ei ole vääntövaikutusta akselin A suhteen. Tasapainotilanteessa voimien momenttien summa on nolla. Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, akselin A suhteen momenttiehto on $\sum M_A = 0$ eli $G_2 r_2 - N_1 r_1 = 0$, josta tukivoiman $\overline{N}_1$ suuruus on

$$N_1 = \frac{G_2 r_2}{r_1} = \frac{m_2 g r_2}{r_1} = \frac{65\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1{,}1\ \text{m}}{2{,}5\ \text{m}} = 280{,}566\ \text{N} \approx 280\ \text{N}$$

ja suunta on ylös.

b) Peräkärry on tasapainossa, joten tasapainoehto pystysuunnassa on Newtonin II lain perusteella $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{N}_1 + \overline{N}_2 + \overline{G}_1 + \overline{G}_2 = \overline{0}$. Kun suunta ylös on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö

$N_1 + N_2 - G_1 - G_2 = 0,$

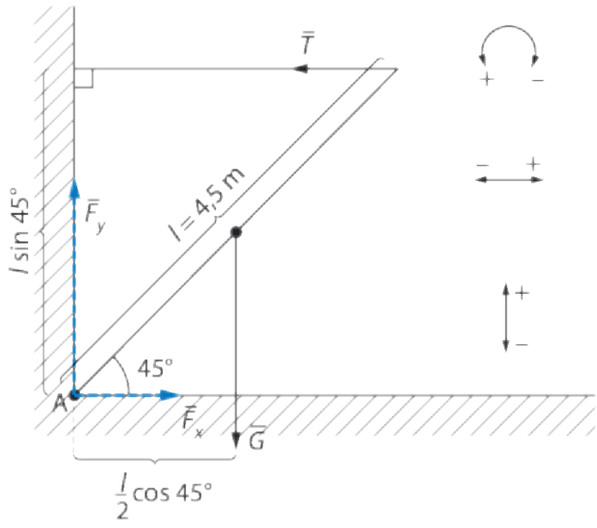
josta ratkaistaan pyöriin kohdistuvan tukivoiman suuruus:

$N_2 = G_1 + G_2 - N_1 = m_1 g + m_2 g - N_1$

$= 570\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 + 65\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 - 280{,}566\ \text{N} \approx 5900\ \text{N}$ ja suunta on ylös.

c) Kun peräkärry kuormataan, peräkärryn aisa ei saa nousta itsestään ylös, jos aisaa ei tueta. Jos pesukone sijoitetaan kuvatussa tilanteessa pyörien taakse, aisa nousee itsestään ylös. Jos tällainen aisa kiinnitetään auton vetokoukkuun, aisasta koukkuun kohdistuvan voiman suunta on ylös. Vetokoukkuun ylös suuntautuva voima voi jossakin tilanteessa aiheuttaa perän kevenemisen niin, että takapyörät menettävät sivusuuntaisen pitonsa. Huomaa, että koukkuun kiinnitetty väärin kuormatun kärryn aisa ei irtoa koukusta, vaan nostaa koukkua ja samalla auton perää.

10-9.



a) Tasapainotilanteessa momenttien summa on nolla. Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, tangon alapään akselin A suhteen momenttiyhtälö on $\sum M_\text{A} = Tr_1 - G \cdot r_2 = 0$, joka geometrian perusteella on $\sum M_\text{A} = Tl\sin 45° - G \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos 45° = 0$, kun l on lipputangon pituus. $\overline{T}$ on vaijerin jännitysvoima. Sen suuruus on

$$T = \frac{m_1 g \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos 45°}{l \sin 45°} = \frac{m_1 g \cdot \cos 45°}{2 \cdot \sin 45°} = \frac{78\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \cos 45°}{2 \cdot \sin 45°} = 382{,}59\,\text{N} \approx 380\,\text{N}.$$

b) Tangon tasapainoehto on Newtonin II lain perusteella $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli vaakasuunnassa $\overline{F}_x + \overline{T} = \overline{0}$. Kun suunta oikealle on positiivinen, skalaariyhtälöstä $F_x - T = 0$ voiman $\overline{F}$ x-komponentin suuruudeksi saadaan

$F_x = T = 382{,}59$ kN.

Tangon tasapainoehto on Newtonin II lain perusteella $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli pystysuunnassa $\overline{F}_y + \overline{G}_1 = \overline{0}$. Kun suunta ylös on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $F_y - G_1 = 0$. Voiman $\overline{F}$ y-komponentin suuruudeksi saadaan

$$F_y = m_1 g = 78\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \approx 765{,}18\,\text{N}.$$

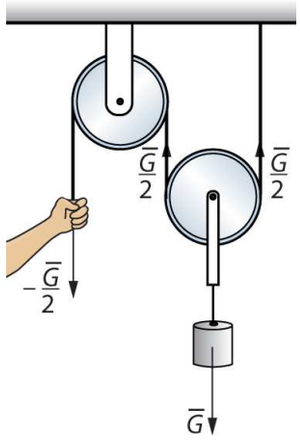
Voiman $\overline{F}$ suuruus on

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(382{,}59\,\text{N})^2 + (765{,}18\,\text{N})^2} = 855{,}497\,\text{N} \approx 860\,\text{N}.$$

Voiman suunta saadaan yhtälöstä

$\tan\alpha = \dfrac{F_y}{F_x} = \dfrac{765{,}18\ \text{N}}{382{,}497\ \text{N}}$, josta kulma on $\alpha \approx 63°$.

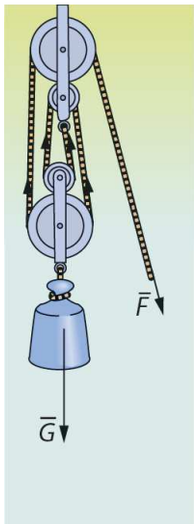
10-10. **a)**



Köyden jännitysvoima on joka kohdassa yhtä suuri. Koska kuormaa kannattelee kaksi köyttä, nostoon tarvittavan voiman suuruus on

$$F = \frac{G}{2} = \frac{mg}{2} = \frac{25\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{2} \approx 120\,\text{N}.$$

b)

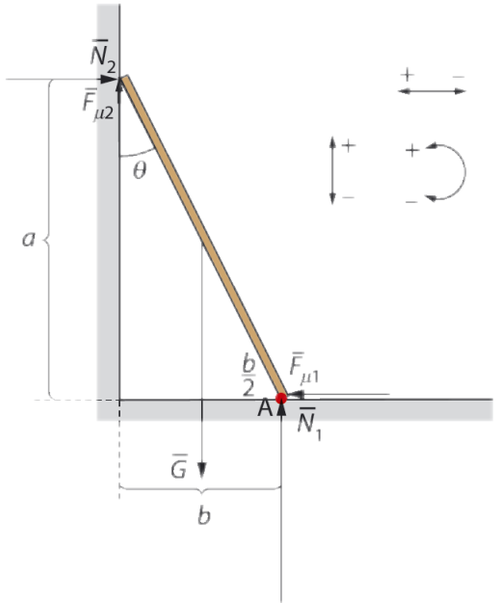


Köyden jännitysvoima on joka kohdassa yhtä suuri. Koska kuormaa kannattelee neljä köyttä, nostoon tarvittavan voiman suuruus on

$$F = \frac{G}{4} = \frac{mg}{4} = \frac{120\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{4} \approx 290\ \text{N}.$$

Huomaa, että taljan kahteen pyörään kohdistuu köysien jännitysvoimat, joiden suuruudet ovat $G/4$.

10-11. Kuvaan on merkitty lankkuun vaikuttavat voimat.



Lankun alapäässä vaikuttavat lattian tukivoima $\overline{N}_1$ ja kitka $\overline{F}_{\mu 1}$. Yläpäässä lankkuun kohdistuu seinän tukivoima $\overline{N}_2$ ja koska seinä oletettiin liukkaaksi, kitka $F_{\mu 2} \approx 0$ N. Lankun painopisteessä vaikuttaa lankkuun kohdistuva paino $\overline{G}$.

Tasapainoehto etenemisen suhteen pystysuunnassa on Newtonin II lain perusteella $\sum \overline{F}_y = \overline{0}$ eli $\overline{N}_1 + \overline{G} = \overline{0}$. Kun suunta ylös on positiivinen, skalaariyhtälöstä $N_1 - G = 0$ saadaan $N_1 = G$.

Tasapainoehto vaakasuunnassa on Newtonin II lain perusteella $\sum \overline{F}_x = \overline{0}$. eli $\overline{N}_2 + \overline{F}_{\mu 1} = \overline{0}$. Kun suunta oikealle on positiivinen, skalaariyhtälöstä $N_2 - F_{\mu 1} = 0$ saadaan $N_2 = F_{\mu 1} = \mu N_1 = \mu G$.

Asetetaan momenttiakseli pisteeseen A. Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, tasapainotilanteessa momenttien summa akselin A suhteen on $\Sigma M_A = 0$ eli $-N_2 a + G \cdot \frac{1}{2} b = 0$. Koska $N_2 = \mu G$, momenttiehto $-N_2 a + G \cdot \frac{1}{2} b = 0$ saadaan muotoon $-\mu G a + G \cdot \frac{1}{2} b = 0$ eli $-\mu a + \frac{1}{2} b = 0$, josta saadaan $\frac{b}{a} = 2\mu$.

Toisaalta suorakulmaisen kolmion trigonometrian perusteella on $\tan\theta = \frac{b}{a}$, joten yhtälöstä

$$\tan\theta = \frac{b}{a} = 2\mu = 2 \cdot 0{,}42 = 0{,}84$$

saadaan kulma $\theta \approx 40°$.

Lankku voidaan asettaa seinään nähden korkeintaan 40°:n kulmaan.

TESTAA, OSAATKO S. 101

1. c **2.** a **3.** a **4.** b **5.** a b **6.** b **7.** c **8.** b **9.** b c **10.** b

TEHTÄVIEN RATKAISUT

11-1. **a)** Pulkan vetonarun pulkkaan kohdistama voima isän vetäessä lasta pulkassa. Hissin vaijerien välittämä voima hissin noustessa ylös. Käsien tarjottimeen kohdistama voima kannettaessa ruoka-annosta ruokalan pöytään.

b) Putoavaan lumihiukkaseen vaikuttava ilmavastus. Suksiin vaikuttavan kitkan tekemä työ. Käsien tekemä työ laskettaessa reppua lattialle.

c) Naulakon koukun takkiin kohdistama voima. Matkalaukun paino laukun liikkuessa liukuhihnalla. Lepokitkan tekemä työ pöydän pinnalla olevaan kappaleeseen.

11-2. **a)** Paino on kohtisuorassa lattian suuntaista siirtymää vastaan, joten se ei tee työtä.

b) Jos opettaja liikkuu vakionopeudella, kirjoihin liikkeen suunnassa vaikuttava voima on nolla. Opettajan kirjoihin kohdistama voima ei tee silloin työtä. Lähtiessään liikkeelle opettajan täytyy kohdistaa kirjoihin liikkeen suuntainen voima, jotta myös kirjat lähtevät liikkeelle (eli ovat kiihtyvässä liikkeessä). Tässä vaiheessa opettajan käsien voima tekee työtä.

11-3. **a)** Työ on $W = F \cdot s = 205\ \text{N} \cdot 2{,}0\ \text{m} = 410\ \text{Nm} = 410\ \text{J}$.

b) Työ on $W = F\cos\alpha \cdot s = 205\ \text{N} \cdot \cos 45° \cdot 2{,}0\ \text{m} = 289{,}914\ \text{J} \approx 290\ \text{J}$.

11-4. **a)** Koska piano lasketaan tasaisella nopeudella, on nosturin pianoon kohdistama voima $\overline{F}$ saman suuruinen kuin pianon paino $\overline{G}$ eli $F = G = mg$. Voiman $\overline{F}$ suunta on ylöspäin eli vastakkainen siirtymälle.

Voiman tekemä työ on silloin

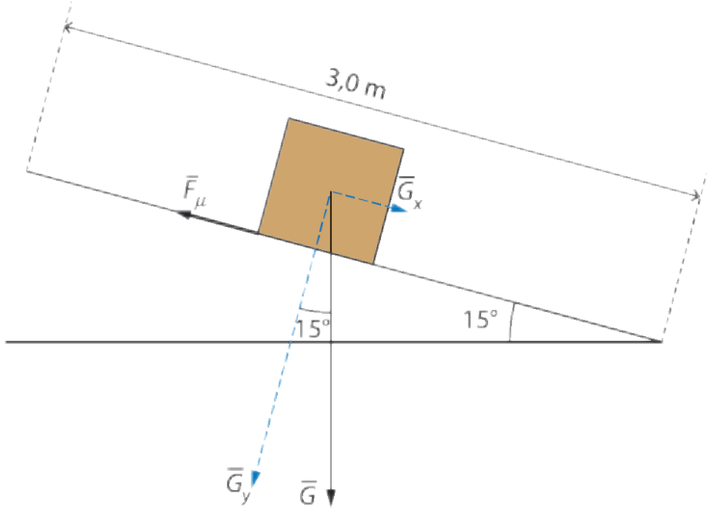
$$W = -F \cdot s = -mg \cdot s = -220\ \text{kg} \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 12\ \text{m} = -21{,}5898\ \text{kJ} \approx -22\ \text{kJ}.$$

Painon tekemä työ on

$$W = G \cdot s = mg \cdot s = 220\ \text{kg} \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 12\ \text{m} = 21{,}5898\ \text{kJ} \approx 22\ \text{kJ}.$$

b) Painon tekemä työ on sama kuin edellisessä tapauksessa eli 22 kJ.

11-5. **a)** Työtä tekevät voimat ovat pyöriin vaikuttava kitkavoima $\overline{F}_\mu$ liikkeen suunnassa ja vastakkaisessa suunnassa painon $\overline{G}$ luiskan suuntainen komponentti $\overline{G}_x$.



b) Koska luiskan kaltevuus on 15°, on $\overline{G}_x$:n suuruus

$$G_x = G\sin 15° = mg \cdot \sin 15° = 82\ \text{kg} \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}2588 = 208{,}184\ \text{N}.$$

Oletetaan, että pyörätuoli liikkuu likimain vakionopeudella. Silloin kitkan $\overline{F}_\mu$ suuruus on sama kuin vastakkaiseen suuntaan vaikuttavan voiman $\overline{G}_x$ suuruus eli F_μ=208,184 N. Voiman tekemäksi työksi saadaan silloin

$$W = F_\mu \cdot d = 208{,}184\ \text{N} \cdot 3{,}0\ \text{m} \approx 620\ \text{J}.$$

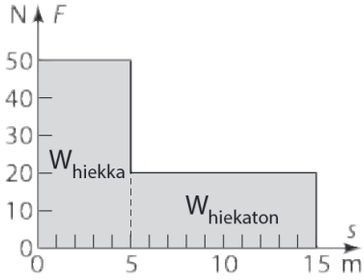
11-6. Anodin ja katodin välinen jännite on $U = Ed$, josta saadaan sähkökentän voimakkuudelle $E = \frac{U}{d}$. Sähköinen voima on suuruudeltaan $F = Eq$, jossa q on hiukkasen varauksen suuruus. Sähköisen voiman tekemä työ on

$$W = Fd = Eqd = \frac{U}{d}qd$$
$$= Uq = 4{,}0\ \text{V} \cdot 1{,}60218 \cdot 10^{-19}\ \text{C} = 4{,}0\ \text{eV} \approx 6{,}4 \cdot 10^{-19}\ \text{J}.$$

11-7. Työ saadaan summana

$$W = W_{\text{hiekka}} + W_{\text{hiekaton}} = F_{\text{hiekka}} \cdot s_{\text{hiekka}} + F_{\text{hiekaton}} \cdot s_{\text{hiekaton}}$$
$$= 50\ \text{N} \cdot 5{,}0\ \text{m} + 20\ \text{N} \cdot 10{,}0\ \text{m} = 450\ \text{J}.$$

Laskukaavasta voi päätellä, että työ on voiman kuvaajan alle jäävä pinta-ala.



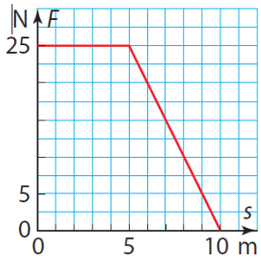
11-8. **a)** Yhtälöstä $P = Fv$ saadaan ratkaistua voima F:

$$F = \frac{P}{v} = \frac{380 \cdot 10^3\ \text{W}}{\frac{37}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 37\ \text{kN}.$$

b) Koska sinivalas ui tasaisella vauhdilla, on liikkeen suuntainen kokonaisvoima nolla. Täten veden vastusvoima on samansuuruinen kuin voima F eli 37 kN.

c) Valas kohdistaa pyrstönsä liikkeillä veteen voiman. Newtonin III lain mukaan vesi kohdistaa valaaseen yhtä suuren vastakkaissuuntaisen voiman. Tämä voima pitää valaan liikkeessä.

11-9. **a)** Työ on voiman kuvaajan ja vaaka-akselin väliin jäävä fysikaalinen pinta-ala. Se on $W = 5{,}0\ \text{m} \cdot 25\ \text{N} + \frac{1}{2} \cdot 5{,}0\ \text{m} \cdot 25\ \text{N} \approx 190\ \text{J}$.



b) Ensimmäisen 5 m:n matkalla voima on vakio, joten liike on tasaisesti kiihtyvää.

c) Koko 10 m:n matkan ajan kappaleeseen on vaikuttanut positiivinen voima, joten kappaleen nopeus on ollut koko ajan kiihtyvää. 10 metrin jälkeen kappale jatkaa liikettään sillä nopeudella, jonka se on sitä ennen saavuttanut.

11-10. **a)** Nostava voima on sama kuin koneen paino eli $F = mg$, joten työ on

$$W = F \cdot h = mg \cdot h = 560 \cdot 10^3\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 11 \cdot 10^3\,\text{m} = 60{,}4296\ \text{GJ} \approx 60\ \text{GJ}.$$

b) Lentokone nousee 11 km:n korkeuteen teholla

$$P = \frac{W}{t} = \frac{60{,}4296\ \text{GJ}}{42 \cdot 60\ \text{s}} \approx 24\ \text{MW}.$$

11-11. Lentokoneen liikkeen ylläpitämiseksi tarvittava teho on $P = Fv$, jossa F on ilmanvastuksen voittamiseen tarvittava eteenpäin suuntautuva voima. Kun F on samansuuruinen kuin ilmanvastus, liike tapahtuu tasaisella nopeudella. Voimaksi saadaan

$$F = \frac{P}{v} = \frac{180\ \text{kW}}{\frac{280}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 2{,}31429\ \text{kN}.$$

Tämä voima tekee työn

$$W = Fs = 2{,}31429\ \text{kN} \cdot 150\ \text{km} \approx 350\ \text{MJ}.$$

11-12. Teho on $P = F_t v$, joten työntövoima on

$$F_t = \frac{P}{v} = \frac{21 \cdot 10^6\ \text{W}}{\frac{1400}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 54\,\text{kN}.$$

11-13. Lasketaan ensin askelmien määrä:

$$\text{askelmien määrä} = \frac{\text{korkeusero}}{\text{askelman korkeus}} = \frac{15\ \text{m}}{0{,}20\ \text{m}} = 75.$$

Liukuportaiden kuljettama massa on silloin $m = 75 \cdot 60{,}0\ \text{kg} = 4500\ \text{kg}$. Liukuportaat liikkuvat tasaisesti, joten ylöspäin vaikuttavan voiman F on oltava saman suuruinen kuin alaspäin vaikuttava paino eli $F = mg$. Sen voiman tekemä työ on $W = F \cdot h = mg \cdot h$, jossa $h = 15$ m.

Tehon laskemiseksi pitää tietää nousuaika. Portaiden pituus on

$$L = \frac{h}{\sin 30^\circ} = \frac{15\ \text{m}}{0{,}5} = 30\ \text{m}.$$

Nousuaika on silloin $t = \frac{L}{v} = \frac{30\ \text{m}}{0{,}70\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 42{,}86\ \text{s}.$

Liukuportaiden nostavan voiman tehon on oltava vähintään

$$P = \frac{W}{t} = \frac{mg \cdot h}{\frac{L}{v}} = \frac{4500\ \text{kg} \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 15\ \text{m}}{42{,}86\ \text{s}} \approx 15\ \text{kW}.$$

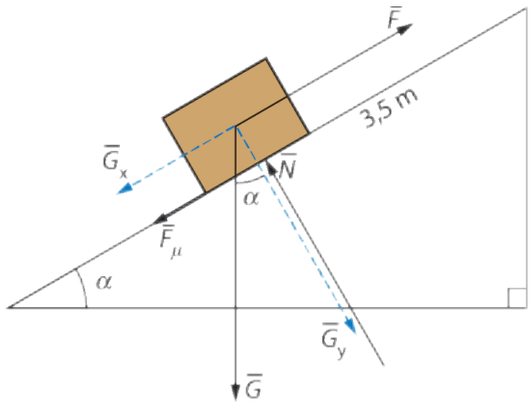
11-14. a) Jännitysvoiman liikkeen suuntainen osa on $T\cos 45°$. Sen tekemä työ saadaan työn yhtälöstä $W = Fs$ eli

$$W = Fs = T\cos 45° \cdot s = 21\text{ N} \cdot \cos 45° \cdot 105\text{ m} = 1559{,}17\text{ J} \approx 1600\text{ J}.$$

b) Voiman tekemän työn teho saadaan yhtälöstä $P = \frac{W}{t}$:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{1559{,}17\text{ J}}{55\text{ s}} \approx 28\text{ W}.$$

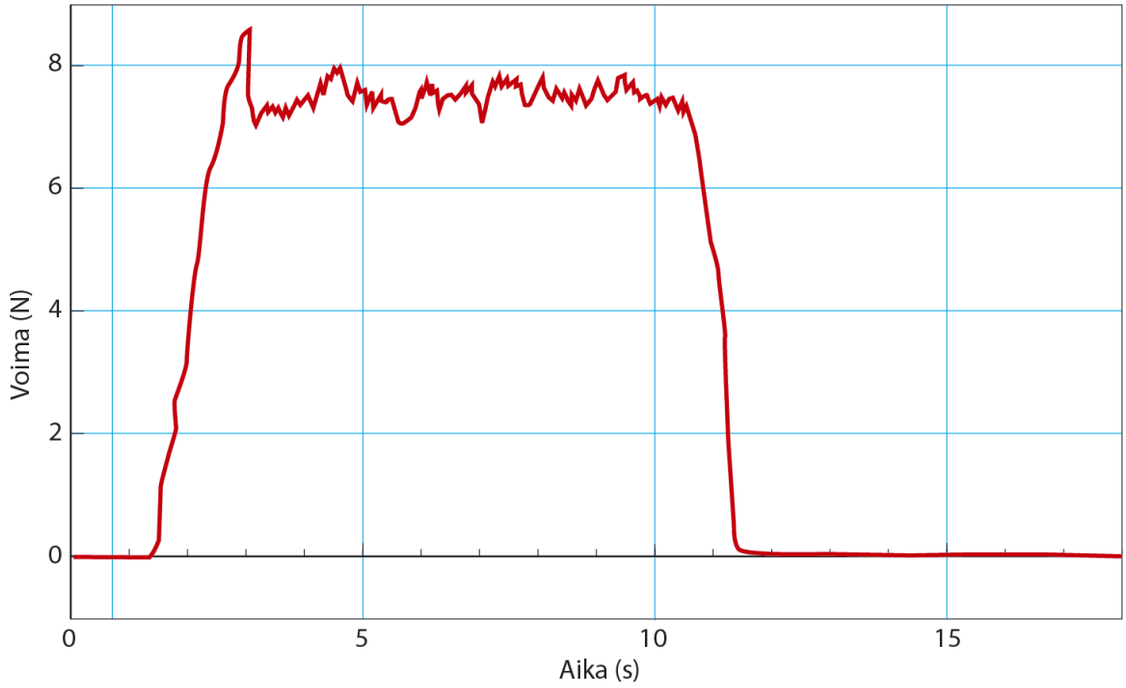
11-15. Kaalilaatikkoon vaikutti luiskan suunnassa kolme voimaa, voima $\overline{F}$, jolla viljelijä työnsi laatikkoa, laatikon painon komponentti luiskan suunnassa ja kitka. Koska liike oli tasaista, nämä vastakkaisiin suuntiin vaikuttaneet voimat olivat yhtä suuret eli $F = G_x + F_\mu$ ja $N = G_y$, jossa G_x on painon komponentti luiskan suunnassa ja G_y luiskaa vastaan kohtisuorassa suunnassa. Koska pinnan tukivoima ja painon pintaa vastaan kohtisuora komponentti ovat yhtä suuret, on kitkan suuruus $F_\mu = \mu N = \mu G_y$. Silloin



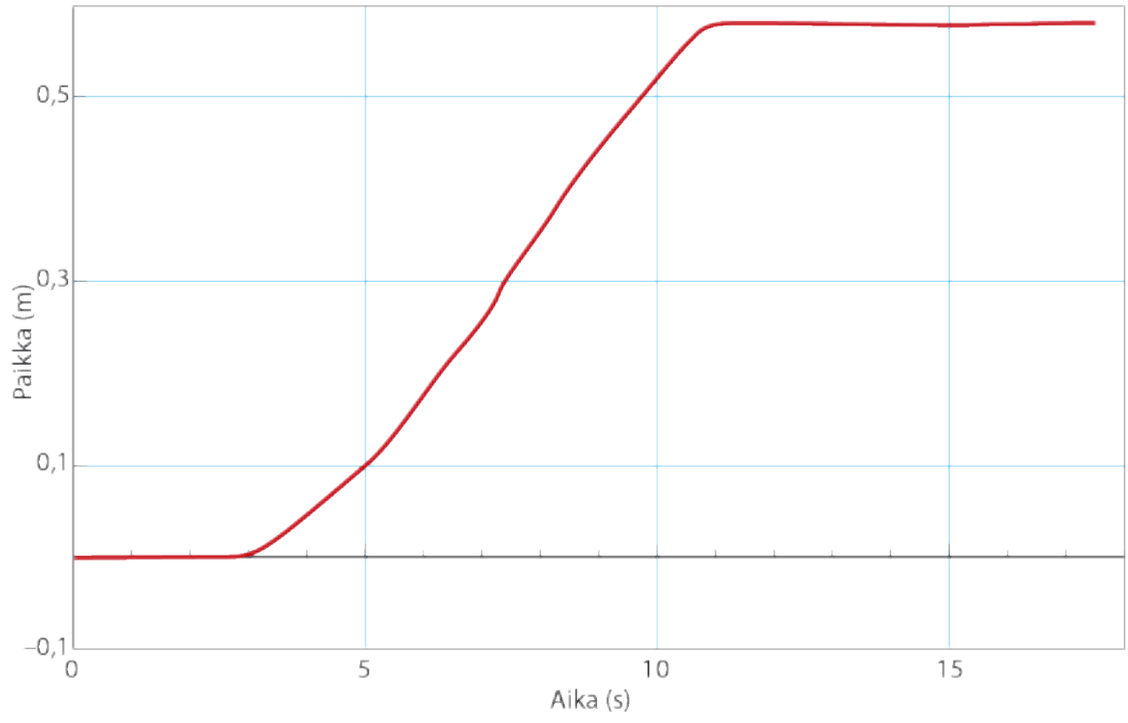
$$F = G_x + F_\mu = G_x + \mu G_y = G\cos\alpha + \mu G\sin\alpha = mg\cos\alpha + \mu mg\sin\alpha$$
$$= 45\text{ kg} \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2\left(\cos 38° + 0{,}32 \cdot \sin 38°\right) = 434{,}838\text{ N}.$$

Voiman tekemä työ on $W = F \cdot s = 434{,}838\text{ N} \cdot 3{,}5\text{ m} \approx 1500\text{ J}$.

11-16. **a)** Kuvaajasta nähdään, että sen jälkeen kun kappale on lähtenyt liikkeelle hetkellä noin 3 s (lepokitka muuttuu silloin liikekitkaksi), kappaletta vetävän voiman suuruus vaihtelee välillä 7 N – 8 N. Keskimääräisen voiman suuruudeksi voidaan arvioida $F \approx 7{,}5$ N.



b) Aika-paikka-kuvaajasta voidaan määrittää kappaleen kulkemaksi matkaksi $s \approx 0{,}54$ m. Työn yhtälöstä $W = Fs$ saadaan silloin voiman tekemäksi työksi $W \approx 7{,}5 \text{ N} \cdot 0{,}54 \text{ m} \approx 4{,}0 \text{ J}$.



c) Kohdan b kuvaajasta saadaan voima vaikutusajaksi $t \approx 11\ \text{s} - 3\ \text{s} = 8\ \text{s}$. Tehon yhtälöstä $P = \frac{W}{t}$ saadaan voiman tehoksi $P = \frac{W}{t} \approx \frac{4{,}0\ \text{J}}{8\ \text{s}} = 0{,}5\ \text{W}$.

TEHTÄVIEN RATKAISUT

12-1. **a)** Liike-energia on $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 60\ \mathrm{kg} \cdot \frac{6}{3{,}6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 50\ \mathrm{J}.$

b) Liike-energia on $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 10\ \mathrm{kg} \cdot \frac{100}{3{,}6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 140\ \mathrm{J}.$

12-2. Henkilöauton liike-energia on

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 1250\ \mathrm{kg} \cdot \left(\frac{90{,}0}{3{,}6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 390{,}625\ \mathrm{kJ}.$$

Liike-energian yhtälöstä saadaan rekan nopeudeksi

$$v_\mathrm{rekka} = \sqrt{\frac{2E_\mathrm{k}}{m_\mathrm{rekka}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 390{,}625 \cdot 10^3\ \mathrm{J}}{40 \cdot 10^3\ \mathrm{kg}}} = 4{,}41942 \cdot 3{,}6\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \approx 16\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

12-3. **a)** Liike-energia on verrannollinen nopeuden toiseen potenssiin. Esimerkiksi jos nopeus kaksinkertaistuu, liike-energia nelinkertaistuu.

b) Koska nopeus pienenee puoleen alkuperäisestä arvostaan, liike-energia pienenee neljäsosaan.

12-4. **a)** Auton nopeus 180 metrin kohdalla on 100 km/h. Sen liike-energia on silloin $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 1250\ \mathrm{kg} \cdot \left(\frac{100}{3{,}6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 0{,}482253\ \mathrm{MJ} \approx 0{,}48\ \mathrm{MJ}.$

b) Koska liike-energia on verrannollinen nopeuden neliöön, liike-energia pienenee puoleen silloin, kun nopeus pienee tekijällä $\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0{,}71$ eli nopeus on $0{,}71 \cdot 100\ \mathrm{km/h} = 71\ \mathrm{km/h}.$ Koska auton kiihtyvyys on vakio, kasvaa auton nopeus tasaisesti arvosta 0 km/h arvoon 100 km/h 180 metrin matkalla.

Saadaan verranto $\frac{x}{180\ \text{m}} = \frac{71\ \text{km/h}}{100\ \text{km/h}}$, jossa x on kysytty matka. Saadaan

$$x = 180\ \text{m} \cdot \frac{71\ \text{km/h}}{100\ \text{km/h}} \approx 130\ \text{m}.$$

12-5. Jousen aiheuttaman voiman tekemä työ on

$$W = F \cdot s = 102\ \text{N} \cdot 0{,}73\ \text{m} = 73{,}7446\ \text{J}.$$

Tämä työ on työ-energiaperiaatteen mukaan sama kuin nuolen liike-energian muutos eli

$$W = \Delta E_\text{k} = \frac{1}{2} m v_\text{l}^{\,2} - \frac{1}{2} m v_\text{a}^{\,2} = \frac{1}{2} m v_\text{l}^{\,2} - 0.$$

Ratkaistaan tästä yhtälöstä nuolen saavuttama nopeus:

$$v_\text{l} = \sqrt{\frac{2 \cdot W}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 73{,}7446\ \text{J}}{0{,}085\ \text{kg}}} \approx 42\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

12-6. Molemmissa tapauksissa loppunopeus on nolla. Jarruttavan voiman $\overline{F}$ tekemä työ on liike-energian muutos eli

$$W = 0 - \frac{1}{2} m v^{\,2} = -\frac{1}{2} m v^{\,2}.$$

Toisaalta voiman tekemä työ on $W = -Fx$, jossa etumerkki johtuu siitä, että voiman suunta on vastakkainen siirtymän suuntaan nähden. Saadaan yhtälö

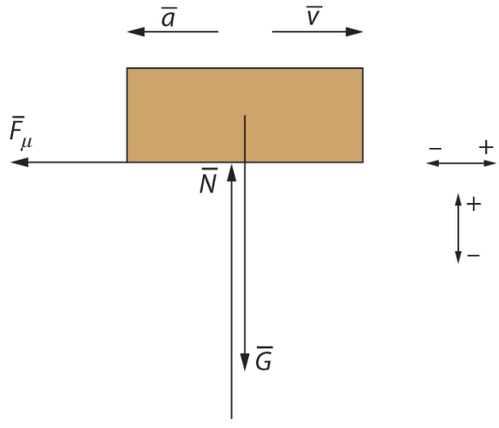
$$F\Delta x = \frac{1}{2} m v^{\,2} \text{ eli } \Delta x = \frac{m}{2F} v^{\,2}.$$

Koska auton massa m ja jarruttava voima F ovat molemmissa tapauksissa samat, havaitaan että jarrutusmatka on verrannollinen nopeuden toiseen potenssiin. Silloin

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{{v_2}^2}{{v_1}^2} = \frac{\left(120\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2}{\left(60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2} = 4 \text{ eli } \Delta x_2 = 4\Delta x_1 = 4 \cdot 20\ \text{m} = 80\ \text{m}.$$

Jarrutusmatka on 80 m.

12-7. **a)**



Työperiaatteen mukaan liike-energian muutos on yhtä suuri kuin kokonaisvoiman tekemä työ eli $\Delta E_k = W$. Vastusvoimien (kitka ja ilmanvastus) suunta on siirtymän suunnalle vastakkainen, joten niiden tekemä työ on negatiivinen. Koska ilmanvastus oletetaan nollaksi, työperiaatteen mukaan on $\Delta E_k = -F_\mu \cdot \Delta x$, jossa kitkan suuruus on $F_\mu = \mu N$.

Kappaleen liikeyhtälö y-suunnassa on Newtonin II lain mukaan $\sum \bar{F} = \bar{0}$ eli $\bar{G} + \bar{N} = \bar{0}$. Suunta ylös on positiivinen, joten $G - N = 0$ eli $N = G$.

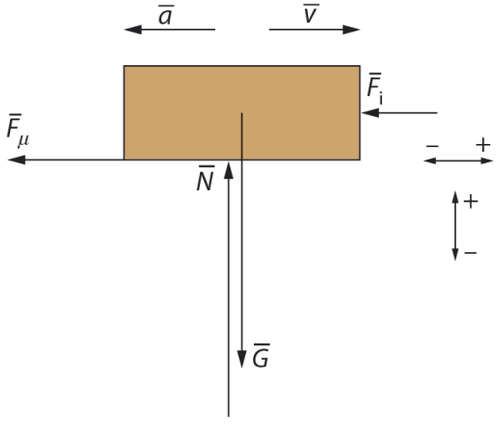
Työperiaate saa muodon

$\Delta E_k = -F_\mu \cdot \Delta x = -\mu N \cdot \Delta x = -\mu G \cdot \Delta x$. Koska auto pysähtyy on, liike-energia lopussa on nolla, joten $0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\mu mg\Delta x$. Auton jarrutusmatkaksi saadaan

$$\Delta x = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\mu mg} = \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{\left(\frac{65}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 0{,}60 \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 28\ \text{m}.$$

Huomataan, että jarrutusmatka ei riipu auton massasta, joten vastaus on sama molemmille autoille.

b)



Jos ilmanvastus otetaan huomioon, työperiaate saa muodon $\Delta E_k = -F_\mu \cdot \Delta x - W_i$, jossa W_i on ilmanvastuksen tekemä työ. Työperiaate saa kohdan a perusteella muodon $0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\mu mg\Delta x - W_i$, josta ratkaistaan jarrutusmatka:

$$\mu mg\Delta x = \frac{1}{2}mv^2 - W_i,$$

$$\Delta x = \frac{\frac{1}{2}mv^2 - W_i}{\mu mg} = \frac{v^2}{2\mu g} - \frac{W_i}{\mu mg}.$$

Ilmanvastuksen suuruuteen vaikuttavat ilman tiheys, auton muoto, pinta-ala ja nopeus. Ne ovat molemmille autoille samat, joten ilmanvastuksen tekemä työ on yhtä suuri molemmille autoille. Jarrutusmatkaan vaikuttavista suureista vain massa on autoille eri suuri. Mitä suurempi

massa on, sitä pienempi on lauseke $\frac{W_\mathrm{i}}{\mu mg}$ ja sitä vähemmän termi $-\frac{W_\mathrm{i}}{\mu mg}$ lyhentää kohdassa a laskettua jarrutusmatkaa. Lastatun auton jarrutusmatka on pitempi.

12-8. Täydennetään taulukkoon vaunujen liike-energiat $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$.

m (kg)	0,1561	0,2287	0,3043	0,3803
v (m/s)	2,475	2,041	1,767	1,582
E_k (J)	0,478105	0,476346	0,475056	0,475893

Taulukosta päätellään, että 0,4563 kg:n massaisen vaunun tapauksessa nopeuden mittaus ei ole luotettava, koska saatu liike-energian arvo poikkeaa muista tapauksista selvästi. Määritetään liike-energia muista mittausarvoista keskiarvona. Saadaan $E_\mathrm{k} = 0{,}47635\ \mathrm{J} \approx 0{,}4764\ \mathrm{J}$. Työperiaatteen mukaan voiman tekemä työ on yhtä suuri kuin kappaleen liike-energian muutos, joten kuminauhan vaunuihin tekemä työ on $W = 0{,}4764\ \mathrm{J}$.

12-9. Työperiaatteen mukaan tikan liike-energian muutos on sama kuin sen voiman tekemä työ, jonka taulu kohdistaa tikkaan tikan tunkeutuessa siihen. Koska tikan nopeus lopussa on nolla, saadaan yhtälö

$0 - \frac{1}{2}mv^2 = F \cdot s$, josta saadaan

$$F = -\frac{mv^2}{2s} = -\frac{0{,}025\ \mathrm{kg} \cdot (7{,}0\ \mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 0{,}005\ \mathrm{m}} \approx -120\ \mathrm{N}.$$

Voiman suuruus on 120 N, tikan lentosuuntaa vastaan.

12-10. **a)**

* Koska $P \sim v^3$, nopeuden kasvaminen 3 tekijällä kasvattaa tehoa tekijällä $3^3 = 27$.

* Koska $P \sim r^2$, lavan pituuden r kasvattaminen tekijällä 3 kasvattaa tehoa tekijällä $3^2 = 9$.

* Koska $P \sim r^2 v^3$, lavan pituuden ja tuulen nopeuden kolminkertaistuessa teho kasvaa tekijällä $3^2 \cdot 3^3 = 243$.

b) Teho on

$$P = \frac{1}{2}\eta\rho\pi r^2 v^3 = \frac{1}{2}0{,}29 \cdot 1{,}293\ \text{kg/m}^3 \cdot \pi \cdot \left(25\ \text{m}\right)^2 \cdot \left(5{,}2\ \text{m/s}\right)^3 \approx 52\ \text{kW}.$$

TEHTÄVIEN RATKAISUT

13-1. **a)** Väärin. Potentiaalienergian nollatason voi valita tilanteen mukaan mille korkeudelle tahansa.

b) Oikein.

c) Oikein.

d) Oikein.

e) Oikein.

f) Väärin. Kun kappaleeseen vaikuttaa kitka, kappaleen mekaaninen energia ei säily vaan pienenee. Kitka on siis ei-konservatiivinen voima.

13-2. **a)** Potentiaalienergia on $E_\mathrm{p} = mgh = 55\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 8848\ \mathrm{m} = 4{,}8\ \mathrm{MJ}$.

b) Potentiaalienergia on
$E_\mathrm{p} = mgh = 55\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot \left(-10994\ \mathrm{m}\right) = -5{,}9\ \mathrm{MJ}$.

13-3. Merkitään yhden portaan korkeutta h:lla. Silloin Matin potentiaalienergia kasvaa määrällä $\Delta E_{\mathrm{p,Matti}} = m_\mathrm{Matti} g \cdot 12h$ ja Liisan potentiaalienergia määrällä $\Delta E_{\mathrm{p,Liisa}} = m_\mathrm{Liisa} g \cdot 15h.$ Koska potentiaalienergiat muuttuvat yhtä paljon, saadaan yhtälö $m_\mathrm{Matti} g \cdot 12h = m_{Liisa} g \cdot 15h,$ josta voidaan ratkaista Liisan massa:

$$m_\mathrm{Liisa} = \frac{12}{15} m_\mathrm{Matti} = \frac{12}{15} \cdot 65\ \mathrm{kg} = 52\ \mathrm{kg}.$$

Oikea vastaus on b.

13-4. **a)** Potentiaalienergia on $E_\mathrm{p} = mgh = 5{,}0\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 25\ \mathrm{m} = 1226{,}25\ \mathrm{J} \approx 1{,}2\ \mathrm{kJ}$.

b) Potentiaalienergian muutos on

$$\Delta E_\mathrm{p} = E_\mathrm{p,l} - E_\mathrm{p,a} = mgh_\mathrm{l} - mgh_\mathrm{a}$$
$$= mg(h_\mathrm{l} - h_\mathrm{a}) = 5{,}0\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot (3{,}0\ \mathrm{m} - 25\ \mathrm{m}) \approx -1{,}1\ \mathrm{kJ}.$$

13-5. **a)** Potentiaalienergia maanpinnan suhteen on

$$E_\mathrm{p} = mgh = 1100\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \cdot 24\ \mathrm{m} \approx 0{,}26\ \mathrm{MJ}.$$

b) Nostavan voiman tekemä työ on yhtä suuri kuin rakennuselementin potentiaalienergian muutos:

$$W = \Delta E_\mathrm{p} = mg\Delta h = mg(h_\mathrm{l} - h_\mathrm{a}) = 1100\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \cdot \left(24\ \mathrm{m} - 2{,}0\ \mathrm{m}\right) \approx 0{,}24\ \mathrm{MJ}.$$

13-6. Kun ilmanvastusta ei huomioida ja nopeus oletetaan nousun alkaessa samaksi kuin nousun päätyessä, nousuun tarvittava energia on sama kuin potentiaalienergian muutos:

$$\Delta E_\mathrm{p} = mg\left(h_\mathrm{l} - h_\mathrm{a}\right) = 1{,}9 \cdot 10^5\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \cdot \left(10{,}70 \cdot 10^3\,\mathrm{m} - 0\ \mathrm{m}\right) \approx 20 \cdot 10^9\ \mathrm{J} = \ 20\ \mathrm{GJ}.$$

13-7. Koska nosto tapahtuu vakionopeudella, on laatikkoon vaikuttava kokonaisvoima nolla eli vaijerin jännitysvoima T ja laatikkoon vaikuttava gravitaatiovoima mg ovat samansuuruiset eli $T = mg$.

Laatikon massa on silloin $m = \frac{T}{g} = \frac{420\ \mathrm{N}}{9{,}81\ \mathrm{m/s^2}} = 42{,}8134\ \mathrm{kg} \approx 43\ \mathrm{kg}.$

Potentiaalienergia 4,5 m:n korkeudella on silloin

$$E_\mathrm{p} = mgh = 42{,}8134\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \ \mathrm{m/s^2} \cdot 4{,}5\ \mathrm{m} \approx 1{,}9\ \mathrm{kJ}.$$

Sama tulos saadaan myös laskemalla jännitysvoiman tekemä työ:

$$W = T \cdot h = 420\ \mathrm{N} \cdot 4{,}5\ \mathrm{m} \approx 1{,}9\ \mathrm{kJ}.$$

13-8. **a)** Putoavan veden massa on

$$m = \rho V = \rho A h = 1000\,\text{kg/m}^3 \cdot 417 \cdot 10^6\,\text{m}^2 \cdot 0{,}55\,\text{m} \approx 229{,}35 \cdot 10^9\,\text{kg}.$$

Energiaa vapautuu potentiaalienergian muutoksen verran. Tehtävässä oletetaan, että pudotuskorkeus pysyy likimain vakiona.
Potentiaalienergian muutos on

$$\Delta E_\text{p} = mg\Delta h = 229{,}35 \cdot 10^9\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 3{,}0\,\text{m} = 6{,}7498 \cdot 10^{12}\,\text{J} \approx 6{,}7\,\text{TJ}.$$

Säännöstelyaltaassa veden pudotuskorkeus vaihtelee sen mukaan, kuinka täynnä allas on vettä.

Veden juoksutuksesta kahden viikon aikana saatava keskimääräinen teho on

$$P = \frac{E}{t} = \frac{6{,}7498 \cdot 10^{12}\,\text{J}}{14 \cdot 24 \cdot 3600\,\text{s}} \approx 5600\,\text{kW}.$$

Veden juoksutuksen aikana voisi toimia noin 5600 kappaletta 1,0 kW:n sähkölämmitintä, jos oletetaan, että kaikki vapautuva energia saadaan käyttöön.

b) Vesivoimalaitoksessa padotun veden potentiaalienergiaa muunnetaan sähköenergiaksi hyötysuhteella η, joten $\eta mgh = E_\text{anto} = Pt$. Sekunnissa voimalaitoksen läpi virtaavan veden määrä on 930 m^3. Veden tiheys on 1000 kg/m^3, joten veden massa on m = 930 000 kg. Voimalaitoksen hyötysuhde on

$$\eta = \frac{Pt}{mgh} = \frac{170 \cdot 10^6\ \text{W} \cdot 1{,}0\ \text{s}}{930\,000\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 24\ \text{m}} \approx 0{,}78.$$

c) Veteen kohdistuva paino muuntaa veden potentiaalienergian liike-energiaksi, joka turbiineissa muunnetaan edelleen sähköksi.

Voimalaitoksen tuottoteho on

$$P = \frac{\eta E_\mathrm{p}}{t} = \frac{\eta mgh}{t} = \frac{\eta \rho Vgh}{t} = \frac{0{,}80 \cdot 1000\ \mathrm{kg/m^3} \cdot 92\ \mathrm{m^3} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 3{,}0\ \mathrm{m}}{1{,}0\ \mathrm{s}}$$
$$\approx 2{,}2\ \mathrm{MW}.$$

d) Jos potentiaalienergian nollatasoksi valitaan turbiinien sijaintikohta, vesivarastossa olevan veden potentiaalienergia on

$$E_\mathrm{p} = mgh = \rho_\mathrm{vesi} Vgh = 1{,}00 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \cdot 5{,}7 \cdot 10^6\ \mathrm{m^3} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \cdot 240\mathrm{m}$$
$$= 1{,}342 \cdot 10^{13}\ \mathrm{J} \approx 13\ \mathrm{TJ}.$$

Oletetaan, että voimalaitos toimii 100 %:n hyötysuhteella. Kun vesi saapuu turbiiniin, se käyttää kaiken putoamisessaan saamansa energian eli potentiaalienergian $E_\mathrm{p} = mgh$ turbiinien pyörittämiseen. Teho on silloin $P = \frac{E_\mathrm{p}}{\mathrm{s}} = \frac{mgh}{\mathrm{s}}$, josta voidaan ratkaista turbiinin läpi sekunnissa kulkevan vesimäärän massa:

$$m = \frac{P \cdot 1\ \mathrm{s}}{gh} = \frac{440 \cdot 10^6\ \mathrm{W} \cdot 1\ \mathrm{s}}{9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \cdot 240\ \mathrm{m}} = 186\ 884\ \mathrm{kg} \approx 190 \cdot 10^3\ \mathrm{kg}.$$

(Huomaa, että $\mathrm{W} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{kg \cdot m^2/s^2}}{\mathrm{s}}$.)

Turbiinin läpi sekunnissa kulkevan veden tilavuus on

$$V = \frac{m}{\rho_\mathrm{vesi}} = \frac{190 \cdot 10^3\ \mathrm{kg}}{1{,}00 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}} = 190\ \mathrm{m^3}.$$

Todellisuudessa voimalaitoksen hyötysuhde on pienempi kuin 100 %, joten ilmoitetun tehon saavuttamiseksi turbiinien läpi virtaavan veden tilavuus on saatua tulosta suurempi.

e) Valitaan potentiaalienergian nollatasoksi vedenpinta alhaalla turbiinin tasolla, jolloin vesivoimalaitoksen tuottoteho saadaan yhtälöstä

$P_{\text{tuotto}} = \eta P_{\text{otto}} = \eta \frac{E_{\text{otto}}}{t} = \eta \frac{mgh}{t}$, jossa η hyötysuhde, ρ veden tiheys, g putoamiskiihtyvyys ja h pudotuskorkeus.

Tiheys on $\rho = m/V$ ja massa $m = \rho V$, joten tuottoteho on $P_{\text{tuotto}} = \frac{\eta \rho V g h}{t} = \eta \rho g h \frac{V}{t}$. Virtaavan veden tilavuus aikayksikössä eli tilavuusvirta on

$$\frac{V}{t} = \frac{P_{\text{tuotto}}}{\eta \rho g h} = \frac{120 \cdot 10^6 \text{ W}}{0{,}84 \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 32{,}4 \text{ m}} \approx 450 \ \frac{\text{m}^3}{\text{s}}.$$

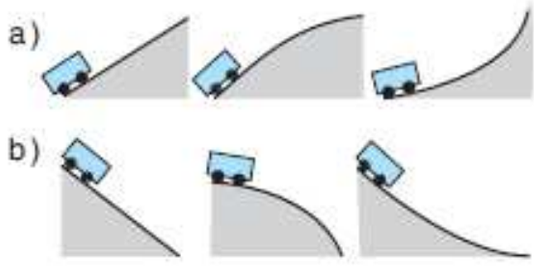
Pyhäkosken vesivoimalaitoksen virtaama on $450 \ \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$.

TESTAA OSAATKO S. 137

1. a, b, c **2.** b **3.** a, b **4.** c **5.** c **6.** c **7.** b **8.** c **9.** a, b, c **10.** a, c

TEHTÄVIEN RATKAISUT

14-1.



a) Oletetaan, että alussa vaunut ovat samalla korkeudella. Liike-energia on kaikilla vaunuilla alussa yhtä suuri ja lopussa nolla. Koska liikevastukset ovat pieniä, voidaan käyttää mekaanisen energian säilymislakia. Kuhunkin vaunuun kohdistuva paino muuntaa liike-energian potentiaalienergiaksi, joka on kaikilla vaunuilla lopussa yhtä suuri. Asetetaan potentiaalienergian nollataso lähtökorkeudelle. Tällöin mekaanisen energian säilymislaki on

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh,$$

josta nousukorkeudeksi

saadaan $h = \frac{v^2}{2g}$.

Koska liikevastuksia ei oteta huomioon, vaunun nousukorkeus riippuu vain alkunopeudesta ja putoamiskiihtyvyydestä, mutta ei vaunun massasta. Siten kaikki vaunut nousevat yhtä korkealle.

b) Oletetaan, että vaunut ovat alussa samalla korkeudella ja lähtevät liikkeelle levosta. Asetetaan potentiaalienergian nolla mäkien alaosan tasolle.

Yhtälöstä

$mgh = \frac{1}{2}mv^2$ saadaan silloin loppuvauhdiksi $v = \sqrt{2gh}$.

Koska liikevastuksia ei oteta huomioon, loppuvauhti riippuu vain lähtökorkeudesta ja putoamiskiihtyvyydestä *g*, mutta ei vaunun massasta. Siten kaikilla vaunuilla on yhtä suuri vauhti mäen alaosassa.

14-2. Yhtälöstä $mgh = \frac{1}{2}mv^2$ saadaan nopeudeksi

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 25 \text{ m}} \approx 22 \text{ m/s}.$$

Laskussa ei ole huomioitu ilmanvastusta ja on oletettu, että 25 m:n pudotuksen aikana köysi ei hiljennä hyppääjän nopeutta.

14-3. **a)** Myöhemmin lähteneellä vesipisaralla on suurempi potentiaalienergia, koska se on korkeammalla maanpinnasta kuin aikaisemmin lähtenyt vesipisara.

b) Koska pisarat ovat samanlaisia, niillä on yhtä suuri mekaaninen energia, joka on sama kuin niiden potentiaalienergia niiden ollessa jääpuikon päässä ollessaan. Koska ilmanvastus oletetaan pieneksi, mekaaninen kokonaisenergia säilyy putoamisen aikana.

c) Aikaisemmin lähteneellä pisaralla on aina suurempi liike-energia kuin myöhemmin lähteneellä, koska sen potentiaalienergia on pienempi. Näin ollen aikaisemmin lähteneen pisaran nopeus on aina suurempi kuin myöhemmin lähteneen, joten pisaroiden välimatka kasvaa.

d) Pisaran mekaaninen energia muuttuu veden sisäiseksi energiaksi (pisarasta muodostuu useita pienempiä pisaroita, mihin tarvitaan energiaa), maan sisäiseksi energiaksi (maan molekyylit saavat energiaa vesimolekyylien törmätessä niihin) ja osin myös ääniaaltojen energiaksi.

14-4. **a)** Jääkiekon liike-energia on

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}170\ \mathrm{kg}\cdot\left(\frac{85}{3{,}6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 \approx 47\ \mathrm{J}\,.$$

b) Mekaniikan energiaperiaate on

$$mgh_\mathrm{a} + \frac{1}{2}mv_\mathrm{a}^2 + W = mgh_\mathrm{l} + \frac{1}{2}mv_\mathrm{l}^2.$$

Kappale liukuu ja pysähtyy vaakasuoralla pinnalla, joten $h_\mathrm{a} = 0$ m, $h_\mathrm{l} = 0$ m ja $v_\mathrm{l} = 0$ m/s. Tällöin mekaniikan energiaperiaate saadaan muotoon

$$\frac{1}{2}mv_\mathrm{a}^2 + Fs = 0.$$

Vastusvoima on

$$F = -\frac{\frac{1}{2}mv_\mathrm{a}^2}{s} = -\frac{\frac{1}{2}\cdot 0{,}170\,\mathrm{kg}\cdot\left(\frac{85}{3{,}6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{250\,\mathrm{m}} \approx -0{,}19\,\mathrm{N}.$$

Liikettä vastustaa 0,19 N:n keskimääräinen voima.

14-5. **a)** Mekaniikan energiaperiaate on

$$mgh_\mathrm{a} + \frac{1}{2}mv_\mathrm{a}^2 + W = mgh_\mathrm{l} + \frac{1}{2}mv_\mathrm{l}^2.$$

Asetetaan potentiaalienergian nollataso pyöräilijän alimpaan asemaan, eli $h_\mathrm{l} = 0{,}0$ J. Mekaniikan energiaperiaate saadaan muotoon $mgh_\mathrm{a} + \frac{1}{2}mv_\mathrm{a}^2 + W = \frac{1}{2}mv_\mathrm{l}^2$. Ratkaistaan yhtälöstä ensin pyöräilijän nopeuden neliö $v_\mathrm{l}^2 = \frac{2mgh_\mathrm{a} + mv_\mathrm{a}^2 + 2W}{m}$, josta saadaan nopeudeksi

$$v_\mathrm{l} = \sqrt{\frac{2mgh_\mathrm{a} + mv_\mathrm{a}^2 + 2W}{m}}\,.$$

Vastusvoimat muuntavat mekaanista energiaa muihin energiamuotoihin.

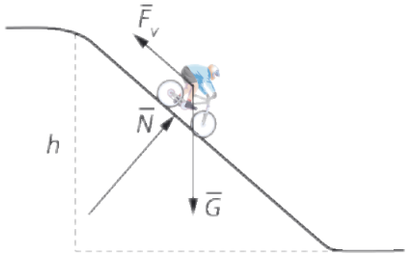
Vastusvoimat pienentävät mekaanista energiaa sen alkuperäisestä arvosta, joten niiden tekemä työ W tulee yhtälöön negatiivisena. Pyöräilijän nopeus mäen alla on silloin

$$v_\mathrm{l} = \sqrt{\frac{2mgh_\mathrm{a} + mv_\mathrm{a}^2 + 2W}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 85\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 17\,\mathrm{m} + 85\,\mathrm{kg} \cdot \left(\frac{16}{3{,}6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + 2 \cdot \left(-8{,}1 \cdot 10^3\ \mathrm{J}\right)}{85\,\mathrm{kg}}}$$

$$\approx 13\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 46\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

b)



Kuvassa $\overline{G}$ on pyöräilijän ja pyörän paino, $\overline{N}$ on pinnan tukivoima ja $\overline{F}_\mathrm{v}$ on kokonaisvastusvoima.

14-6. Hyppääjä lähtee levosta, jolloin hänen liike-energiansa alussa on nolla. Asetetaan potentiaalienergian nollataso hyppyrin nokalle. Mekaniikan energiaperiaate $E_{\mathrm{p,a}} + E_{\mathrm{k,a}} + W = E_{\mathrm{p,l}} + E_{\mathrm{k,l}}$ saa muodon $mgh + 0 + W = 0 + \frac{1}{2}mv^2$, jossa W on liikevastusvoimien tekemä työ liu´un aikana. Tästä saadaan liikevastusvoimien tekemäksi työksi

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - mgh = \frac{1}{2} \cdot 71\,\mathrm{kg} \cdot \left(\frac{101}{3{,}6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - 71\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 66\,\mathrm{m} \approx -18\,\mathrm{kJ}.$$

14-7. Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan

$$mgh_{\mathrm{a}} + \frac{1}{2}mv_{\mathrm{a}}{}^2 + W = mgh_{\mathrm{l}} + \frac{1}{2}mv_{\mathrm{l}}{}^2.$$

Liikettä vastustava keskimääräinen voima $\overline{F}$ muuntaa mekaanista energiaa lumen, suksien ja ilman sisäenergiaksi, joten sen tekemän työn Fs arvo tulee yhtälöön negatiivisena, $Fs = -55\ \mathrm{N} \cdot 35\ \mathrm{m}$. Sovitaan, että mäen alla on potentiaalienergian nollataso eli $h_{\mathrm{l}} = 0\ \mathrm{m}$.

Tällöin

$$mgh_{\mathrm{a}} + \frac{1}{2}mv_{\mathrm{a}}^2 + Fs = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{l}}^2.$$

Yhtälöstä saadaan lumilautailijan nopeudeksi mäen alla

$$v_{\mathrm{l}} = \sqrt{\frac{2mgh_{\mathrm{a}} + mv_{\mathrm{a}}^2 + 2Fs}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 73\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 8{,}0\ \mathrm{m} + 73\ \mathrm{kg} \cdot (2{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 + 2 \cdot (-55\ \mathrm{N}) \cdot 35\ \mathrm{m}}{73\ \mathrm{kg}}} \approx 11\ \mathrm{m/s}.$$

14-8. Auton noustessa mäkeä ylös autoon kohdistuva paino tekee työtä ja muuntaa liike-energiaa potentiaalienergiaksi. Nousun aikana liikevastukset (kitka ja ilmanvastus) muuntavat mekaanista energiaa tien, auton ja ilman sisäenergiaksi. Mekaniikan energiaperiaate on

$$mgh_{\mathrm{a}} + \frac{1}{2}mv_{\mathrm{a}}^2 + W = mgh_{\mathrm{l}} + \frac{1}{2}mv_{\mathrm{l}}^2.$$

Asetetaan potentiaalienergian nollataso mäen alle. Liikevastusten tekemä työ on $W = -F_{\mathrm{v}}s$. Tällöin liike-energia mäen päällä on

$$\frac{1}{2}mv_{\mathrm{l}}^2 = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{a}}^2 - F_{\mathrm{v}}s - mgh_{\mathrm{l}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1200\ \mathrm{kg} \cdot (18\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 - 750\,\mathrm{N} \cdot 60\,\mathrm{m} - 1200\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 9{,}5\,\mathrm{m} \approx 38\ \mathrm{kJ}.$$

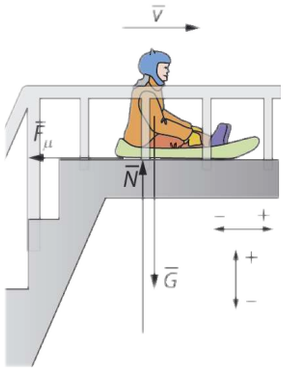
14-9. **a)** Lapseen kohdistuva paino muuntaa osan potentiaalienergiasta liike-energiaksi. Osa potentiaalienergiasta muuntuu vastusvoimien (ilmanvastus ja kitka) tekemän työn takia lapsen, liukumäen ja maan sisäenergiaksi. Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan on

$$mgh_\mathrm{a} + \frac{1}{2}mv_\mathrm{a}^2 + W = mgh_\mathrm{l} + \frac{1}{2}mv_\mathrm{l}^2.$$

Asetetaan potentiaalienergia lopputilanteessa nollaksi. Koska liike-energia alussa on nolla, energiaperiaate saa muodon $mgh_\mathrm{a} + W = \frac{1}{2}mv_\mathrm{l}^2$, joten vastusvoimien tekemä työ on

$$W = \frac{1}{2}mv_\mathrm{l}^2 - mgh_\mathrm{a} = \frac{1}{2}\cdot 20\,\mathrm{kg}\cdot(5{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 - 20\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 3{,}0\,\mathrm{m} \approx -340\,\mathrm{J}.$$

b) Vaakasuoralla pinnalla liukumisen alussa lapsen nopeus on yhtä suuri kuin mäessä saavutettu loppunopeus v_l. Maassa tapahtuvan liu'un aikana kitka ja ilmanvastus muuntavat lapsen liike-energian vuorovaikuttavien kappaleiden ja ilman sisäenergiaksi. Oletetaan ilmanvastus pieneksi. Lapsen liike-energia lopussa on nolla. Sovitaan potentiaalienergian nollatasoksi lapsen painopisteen taso.



Mekaniikan energiaperiaate saa muodon

$$\frac{1}{2}mv_\mathrm{l}^2 - F_\mu s = 0.$$

Kitkan suuruus on $F_\mu = \mu N$. Pystysuunnassa lapsen ja pulkan liikeyhtälö on $\overline{N} + \overline{G} = \overline{0}$. Kun suunta ylös sovitaan positiiviseksi, liikeyhtälö skalaariyhtälönä on $N - G = 0$ eli $N = G$. Kitkan suuruus on $F_\mu = \mu mg$. Lapsen liukuma matka on

$$s = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2}{F_\mu} = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2}{\mu mg} = \frac{v_1^2}{2\mu g} = \frac{(5{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2 \cdot 0{,}77 \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 1{,}7\,\text{m}.$$

Jos kitkakerroin olisi nolla, nopeus olisi

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 23\ \text{m}} \approx 21\ \text{m/s}^2.$$

14-10. Mekaniikan energiaperiaate $E_{\text{p,a}} + E_{\text{k,a}} + W = E_{\text{p,l}} + E_{\text{k,l}}$ tulee muotoon

$mgh + 0 + W = 0 + \frac{1}{2}mv_1^2$, jossa W on kitkan tekemä työ

$W = F_\mu \cdot s = \mu N \cdot s = \mu mg \cdot s$.

Yhtälöstä $mgh + 0 + \mu mgs = 0 + \frac{1}{2}mv_1^2$ saadaan nopeudelle liukumäen lopussa

$$v_1 = \sqrt{2(gh - \mu gs)} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2\,(23\ \text{m} - 0{,}15 \cdot 141\ \text{m})} \approx 6\ \text{m/s}.$$

14-11. **a)** Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan on $E_{\text{p,a}} + E_{\text{k,a}} + W = E_{\text{p,l}} + E_{\text{k,l}}$ eli $m_\text{A}gh_\text{a} + \frac{1}{2}m_\text{A}v_\text{a}^2 + W = m_\text{A}gh_\text{l} + \frac{1}{2}m_\text{A}v_\text{l}^2$. Liikevastusten tekemä työ oletetaan nollaksi. Oletetaan, että pulkat lähtevät levosta, eli liike-energia alussa on nolla. Valitaan potentiaalienergian nollataso mäen alle.

Mekaniikan energiaperiaate on silloin $m_\text{A}gh_\text{a} = \frac{1}{2}m_\text{A}v_\text{l}^2$, josta ratkaistaan nopeus mäen alla:

$v_\text{l}^2 = 2gh_\text{a}$ eli $v_\text{l} = \sqrt{2gh_\text{a}}$.

Antin pulkan nopeus mäen alla on

$$v_1 = \sqrt{2gh_a} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4{,}0\ \text{m}} = 8{,}85889 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 8{,}9 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b) Antilla ja pulkalla on vaakasuoralle pihamaalle saapuessaan liike-energiaa. Liikettä vastustava kokonaisvoiman $\overline{F}$ tekemä työ muuntaa sen toiseen muotoon liukumisen aikana. Sovelletaan mekaniikan energiaperiaatetta $m_A g h_a + \frac{1}{2} m_A v_a^2 + W = m_A g h_l + \frac{1}{2} m_A v_l^2$.
Valitaan vaakasuora maanpinta potentiaalienergian nollatasoksi, jolloin $h_a = h_l = 0$. Koska lopussa pulkka pysähtyy, on $\frac{1}{2} m_A v_l^2 = 0$. Vastusvoima pienentää mekaanista energiaa, joten sen tekemä työ tulee mekaniikan energiaperiaatteen yhtälöön negatiivisena eli $W = -Fs$. Mekaniikan energiaperiaate on silloin

$$\frac{1}{2} m_A v_a^2 - Fs = 0.$$

Tästä saadaan Anttiin ja pulkkaan kohdistuvan vastusvoiman suuruudeksi

$$F = \frac{m_A v_a^2}{2s} = \frac{42\,\text{kg} \cdot \left(8{,}85889 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 12\,\text{m}} = 137{,}340\,\text{N}.$$

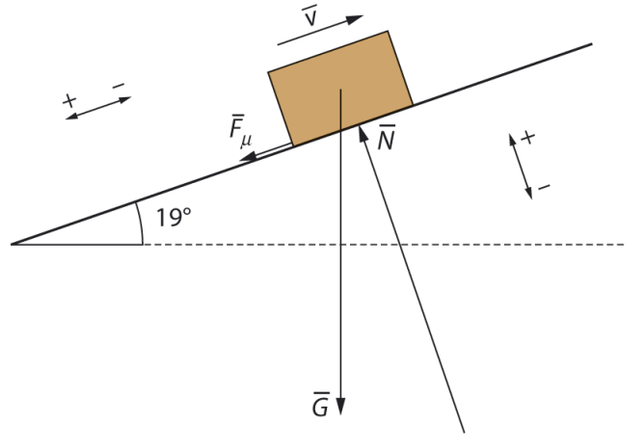
Jos oletetaan, että Tiinaan ja Anttiin vaakasuoralla pihamaalla vaikuttavat vastusvoimat ovat yhtä suuria, saadaan Tiinan pulkan liukumismatka Antin tapauksessa johdetusta yhtälöstä $\frac{1}{2} m_A v_a^2 - \frac{1}{2} Fs = 0$ korvaamalla siinä massa m_A massalla m_T eli $\frac{1}{2} m_T v_a^2 - Fs = 0$.

Ratkaistaan Tiinan pulkan liukuma matka vaakasuoralla pihamaalla:

$$s = \frac{m_{\mathrm{T}} v_{\mathrm{a}}^2}{2F} = \frac{21\,\mathrm{kg} \cdot (8{,}85889\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2}{2 \cdot 137{,}34\,\mathrm{N}} \approx 6{,}0\,\mathrm{m}.$$

c) Antin liukumasta matkasta voitiin laskussa ennustaa Tiinan liukuman matkan pituus, mutta sitä varten piti olettaa, että molempiin vaikuttaa samankokoinen vastusvoima. Oletus ei pidä paikkaansa todellisuudessa. Koska Tiina on pienempi, häneen kohdistuu pienempi ilmanvastus kuin Anttiin. Tiinan pienempi massa puolestaan merkitsee, että Tiinan pulkkaan kohdistuva kitka on pienempi kuin Antin pulkkaan kohdistuva kitka, sillä kitka on $F_\mu = \mu N = \mu G = \mu mg$. Liikettä vastustava kokonaisvoima F, jonka laskussa oletettiin olevan Antille ja Tiinalle yhtä suuri, on siis todellisuudessa pienempi Tiinan tapauksessa kuin Antin tapauksessa. Tämän takia Tiinan liukuma matka on todellisuudessa suurempi kuin laskussa saatiin. Antin liukumasta matkasta ei siis voi luotettavasti ennustaa Tiinan liukuman matkan pituutta.

14-12. **a)**



Olkoon pintaa pitkin kuljettu matka ennen pysähtymistä s. Kitkatyö muuntaa osan liike-energiasta aineen sisäenergiaksi ja kappaleeseen kohdistuva paino potentiaalienergiaksi.

Sovitaan kappaleen potentiaalienergian nollataso lähtöpaikkaan. Kappaleen liike-energia ylimmässä kohdassa on myös nolla. Mekaniikan energiaperiaate $E_{\mathrm{p,a}} + E_{\mathrm{k,a}} + W = E_{\mathrm{p,l}} + E_{\mathrm{k,l}}$ on tässä tapauksessa

$$\frac{1}{2}mv^2 - F_\mu s = mgh.$$

Kitka on $F_\mu = \mu N = \mu G \cos\alpha = \mu mg \cdot \cos\alpha$ ja korkeus $h = \sin\alpha \cdot s$, joten mekaniikan energiaperiaate antaa yhtälön

$$\frac{1}{2}mv^2 - \mu mg\cos\alpha \cdot s = mg\sin\alpha \cdot \mathrm{s}\,.$$

Kappaleen liukuma matka on

$$s = \frac{v^2}{2\mu g\cos\alpha + 2g\sin\alpha}$$

$$= \frac{(4{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2}{2\cdot 0{,}14\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\cos 19° + 2\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\sin 19°} = 2{,}254\ \mathrm{m}.$$

Korkeusero on

$h = s \sin\alpha = 2{,}254\ \mathrm{m} \cdot \sin 19° = 0{,}7338\ \mathrm{m} \approx 0{,}73\ \mathrm{m}.$

b) Kappaleen kulkema matka on sama kuin a-kohdassa, joten kitkavoiman tekemä työ on yhtä suuri. Yhtälöstä

$$mgh - F_\mu s = \frac{1}{2}mv^2 \text{ eli } mgh - \mu mg\cos\alpha \cdot s = \frac{1}{2}mv^2$$

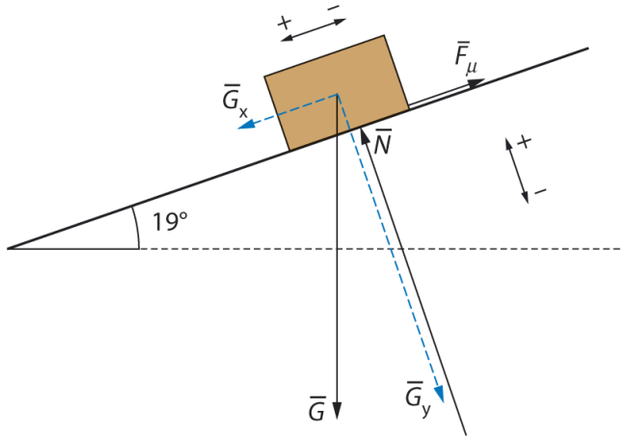
saadaan kappaleen nopeus, kun kappale ohittaa lähtöpisteensä:

$$v = \sqrt{2gh - 2\mu g\cos\alpha \cdot s}$$

$$= \sqrt{2\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0{,}7338\ \mathrm{m} - 2\cdot 0{,}14\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\cos 19°\cdot 2{,}254\ \mathrm{m}}$$

$$\approx 2{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

c)



Rajatapauksessa pinnan suuntaisten voimien summa on oltava nolla eli kappaleen liikeyhtälö on $\sum \overline{F} = \overline{F}_\mu + \overline{G}_x = \overline{0}$. Sovitaan suunta alaviistoon positiiviseksi, jolloin liikeyhtälö on skalaariyhtälönä $G_x - F_\mu = 0$.

Yhtälöstä $G_x = F_\mu$ eli $mg\sin\alpha = \mu mg\cos\alpha$ kitkakertoimeksi

saadaan $\mu = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = \tan 19° \approx 0{,}34$,

eli kappale ei lähde liukumaan, jos lepokitkakerroin on vähintään 0,34 mittaustarkkuuden mukaisesti pyöristettynä. Vastaus voidaan tässä tapauksessa pyöristää myös ylöspäin arvoon 0,35.

TESTAA OSAATKO S. 137

1. a, b, c **2.** b **3.** a, b **4.** c **5.** c **6.** c **7.** b **8.** c **9.** a, b, c **10.** a, c

TEHTÄVIEN RATKAISUT

15-1. **a)** Hyökkääjän liikemäärä on $p = mv = 89\ \text{kg} \cdot 8{,}0\ \text{m/s} = 712\ \text{kgm/s}$.

b) 105-kiloisella puolustajalla on yhtä suuri liikemäärä, jos nopeus on

$$v = \frac{p}{m} = \frac{712\ \frac{\text{kgm}}{\text{s}}}{105\ \text{kg}} \approx 6{,}8\ \text{m/s}.$$

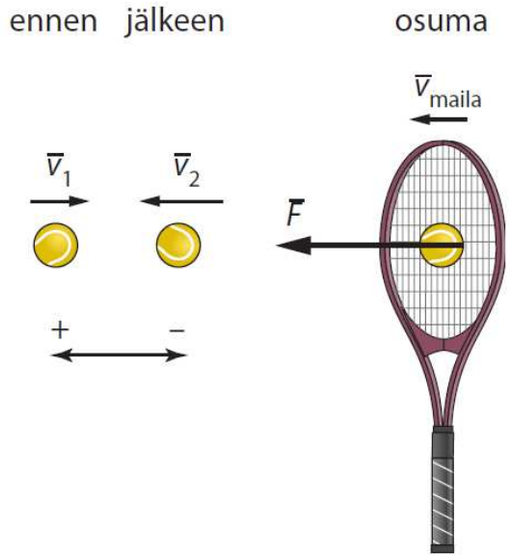
15-2. Impulssien suuruudet saadaan kuvaajista graafisella integroinnilla eli arvioimalla kuvaajien ja t-akselin väliin jäävän pinnan fysikaalinen pinta-ala. Yhden ruudun fysikaalinen pinta-ala on $1\ \text{s} \cdot 1\ \text{N} = 1\ \text{Ns}$. Molemmissa tapauksissa impulssin suuruudeksi saadaan noin 6 Ns. Impulssit eroavat siten, että a-tapauksessa vaikuttava voima on suurempi kuin b-tapauksessa, ja a-tapauksessa voiman vaikutusaika on pidempi kuin b-tapauksessa. Vaikka impulssit ovat yhtä suuret, voiman vaikutus ei aina ole samanlainen. Suurempi voima saattaa esimerkiksi rikkoa rakenteita, mutta pienempi voima ei, vaikka voimien impulssit olisivat yhtä suuret.

15-3. Nopeutta kuvatussa tilanteessa esittää parhaiten kuva a. Kuvissa b ja c nopeuden pieneneminen muuttuu nopeuden suurenemiseksi voiman vaikutusaikana. Tämä ei ole kuitenkaan mahdollista, kun kyseessä on vakiovoima, sillä vakiovoiman tapauksessa impulssilla I ja siten liikemäärän muutoksella $\Delta p = I$ on koko ajan sama suunta.
Koska $\Delta p = mv$, silloin kappaleen nopeuden pitää koko ajan joko pienentyä tai suurentua, toisin kuin kuvissa b ja c. Kuva c ei vastaa kuvattua tilannetta, koska siinä nopeus muuttuu vain yhdessä pisteessä, mikä ei ole mahdollista vakiovoiman tapauksessa.

Kuvan a tilanteessa voi olla kyse esimerkiksi suoraan ylös heitetyn kappaleen liikkeestä. Koska nopeus on kuvaajan mukaan alussa positiivinen, on suunta ylös valittu positiiviseksi suunnaksi.

Kappaleeseen vaikuttaa alaspäin paino. Sen impulssi on negatiivinen, koska voima on suuntasopimuksen mukaisesti negatiivinen. Koska impulssi I on negatiivinen, kappaleen liikemäärään tulee negatiivinen muutos, $\Delta p = I < 0$. Tämä tarkoittaa, että kappaleen nopeus pienenee. Koska voima on vakio, nopeuden kuvaaja välillä 0…10 s on laskeva suora. Huomaa, että nopeuden suunta muuttuu noin 4 s:n kohdalla; silloin pallo saavuttaa lakikorkeuden ja alkaa liikkua alaspäin.

15-4. Mailan palloon kohdistavan voiman impulssi on yhtä suuri kuin pallon liikemäärän muutos: $\overline{F}\Delta t = m\Delta\overline{v} = m\overline{v}_2 - m\overline{v}_1$.



Sovitaan voiman suunta positiiviseksi, jolloin pallon suunta ennen mailaan osumista on negatiivinen. Saadaan skalaariyhtälö $F\Delta t = mv_2 - m(-v_1) = m(v_2 + v_1)$. Maila vaikuttaa palloon voimalla

$$F = \frac{m(v_2 + v_1)}{\Delta t} = \frac{0{,}057\ \text{kg} \cdot (30{,}0\ \text{m/s} + 20{,}0\ \text{m/s})}{0{,}020\ \text{s}} \approx 140\ \text{N}.$$

Keskimääräisen voiman suuruus on 140 N ja suunta on vastakkainen pallon alkuperäiseen liikesuuntaan nähden.

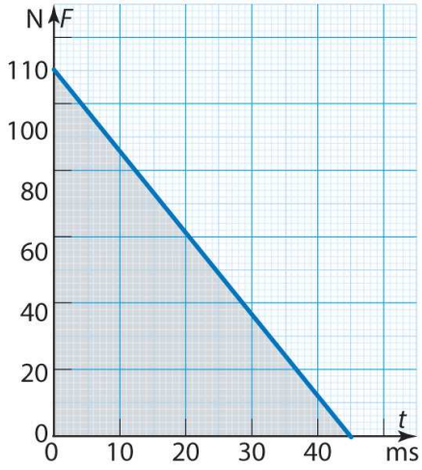
15-5. Voiman kuvaajasta *t,F*-koordinaatistossa saadaan impulssi laskemalla voiman kuvaajan ja koordinaattiakselien muodostaman kolmion fysikaalinen pinta-ala:

$I = 1/2 \cdot 45\ \text{ms} \cdot 110\ \text{N} = 2{,}475\ \text{Ns}.$

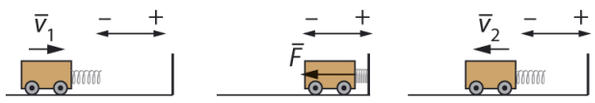
Impulssi on $I = \Delta p = mv$, joten nopeuden muutos on

$$\Delta v = \frac{I}{m} = \frac{2{,}475\ \text{Ns}}{0{,}036\ \text{kg}} \approx 69\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

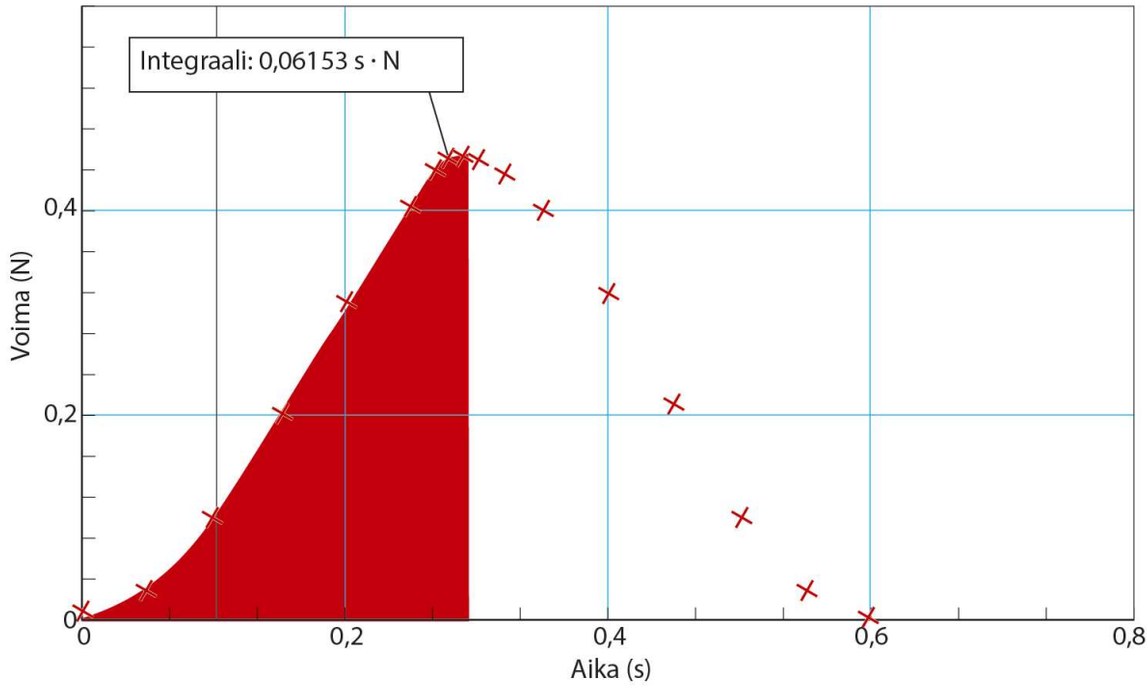
Nuolen lähtönopeus siis on 140 m/s.



15-6. **a)**



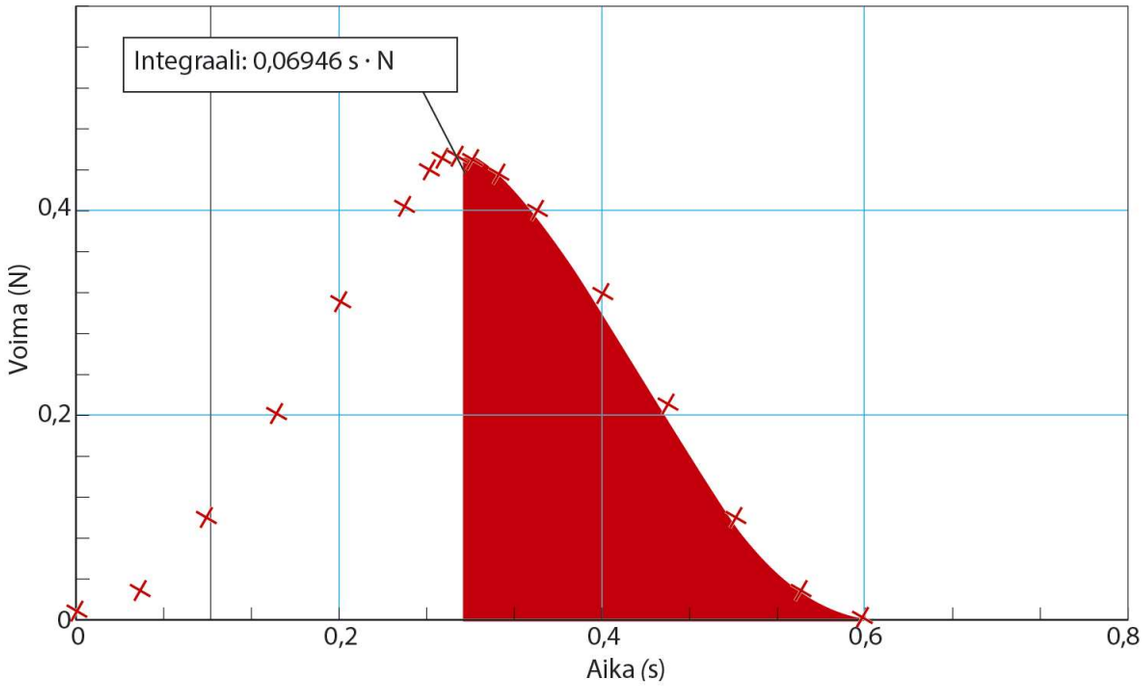
Vaunun nopeus ennen törmäystä on $\overline{v}_1$ ja törmäyksen jälkeen $\overline{v}_2$. Anturin vaunuun kohdistama voima aiheuttaa vaunun liikemäärän muutoksen, joka on yhtä suuri kuin voiman impulssi. Jousi puristuu kasaan kunnes vaunun liikesuunta muuttuu vastakkaiseksi, jolloin vaunuun kohdistuva voima on suurin ja vaunun nopeus on hetkellisesti 0 m/s. Vaunun hidastuessa törmäyksessä vaunuun kohdistuvan voiman impulssi on yhtä suuri kuin kuvion huipun vasemmalle puolelle jäävä fysikaalinen pinta-ala. Mittausohjelma antaa impulssin suuruudeksi 0,061 Ns. Impulssin suunta on kohti vaunun tulosuuntaa.



b) Impulssiperiaatteen mukaan on $\overline{I} = m\Delta\overline{v}$ eli $\overline{I} = m(\overline{0} - \overline{v}_1)$. Sovitaan vaunun tulosuunta positiiviseksi. Impulssin suunta on vaunun liikkeelle vastakkaissuuntainen, joten saadaan skalaariyhtälö $-I_1 = m(0 - v_1)$. Vaunun nopeus ennen törmäystä on

$$v_1 = \frac{I_1}{m} = \frac{0{,}06153\ \text{Ns}}{0{,}215\ \text{kg}} = 0{,}286186\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0{,}29\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Kun vaunun liikesuunta on muuttunut, jousi vapautuu aiheuttaen vaunun liikemäärään muutoksen, joka on yhtä suuri kuin jousivoiman impulssi $\overline{I}_2$. Impulssin suuruus on käyrän huipun oikealle puolelle jäävä fysikaalinen pinta-ala.



Mittausohjelma antaa impulssin arvoksi 0,06946 Ns.

Vaunun nopeuden suunta vaihtuu törmäyksessä, joten nopeus törmäyksen jälkeen on

$$v_2 = \frac{-I_2}{m} = \frac{-0{,}06946\ \text{Ns}}{0{,}215\ \text{kg}} = -0{,}323070\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx -0{,}32\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c) Impulssiperiaatteen mukaan törmäyksen aikana vaikuttavan voiman impulssi on yhtä suuri kuin vaunun liikemäärän muutos. Vaunun törmätessä anturiin impulssiperiaate skalaariyhtälönä on

$I = m\Delta v = m(v_2 - v_1)$.

Liikemäärän muutos on

$I = 0{,}215\ \text{kg} \cdot (-0{,}323070\ \text{m/s} - 0{,}286186\ \text{m/s}) \approx -0{,}13\ \text{kgm/s}.$

15-7. Valitaan pallon alkuperäinen liikesuunta positiiviseksi suunnaksi. Silloin $v_1 = 25$ m/s ja $v_2 = -35$ m/s. Pallon liikemäärän muutos on silloin

$\Delta p = mv_2 - mv_1 = m(v_2 - v_1)$

$= 0{,}065 \text{ kg} \cdot (-35 \text{ m/s}) - 25 \text{ m/s}) = -3{,}9 \text{ kgm/s}$. Impulssiperiaatteen mukaan liikemäärän muutos on yhtä suuri kuin impulssi $I = Ft$, jossa F on kappaleeseen kohdistunut keskimääräinen voima ja Δt on voiman vaikutusaika. Saadaan yhtälö $Ft = \Delta p$, josta voidaan ratkaista keskimääräinen voima: $F = \dfrac{\Delta p}{\Delta t} = \dfrac{-3{,}9 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{4{,}0 \text{ ms}} \approx -0{,}98 \text{ kN}$.

15-8. Pallon nopeus sen osuessa lattiaan saadaan energiaperiaatteen avulla: pallon potentiaalienergia muuntuu pudotuksessa liike-energiaksi.

Saadaan yhtälö $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$, josta saadaan nopeuden suuruudeksi

$v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 1{,}0 \text{ m}} = 4{,}42944 \text{ m/s}$.

Valitaan suunta ylös positiiviseksi suunnaksi. Silloin pallon liikemäärä juuri ennen lattiaan osumista on

$p_a = -mv_1 = -0.150 \text{ kg} \cdot 4{,}42944 \text{ m/s} = -0{,}654416 \text{ Ns}$.

Koska pallon nopeus törmäyksen jälkeen on likimain samansuuruinen kuin ennen törmäystä, on pallon liikemäärä törmäyksen jälkeen $p_1 = mv_1 = 0{,}654416 \text{ Ns}$. Impulssiperiaatteen mukaan palloon törmäyksessä vaikuttavan voiman impulssi on sama kuin liikemäärän muutos eli

$I = \Delta p = p_1 - p_a = 0{,}654416 \text{ Ns} - (-0{,}654416 \text{ Ns}) \approx 1{,}3 \text{ Ns}$.

Koska impulssi on positiivinen, on sen suunta ylöspäin.

15-9. **a)** Heinäsirkkaan vaikuttavan voiman impulssi ylöspäin on $I = Ft = 0{,}38 \text{ N} \cdot 0{,}019 \text{ s} = 0{,}00722 \text{ Ns}$.

Impulssi on yhtä suuri kuin liikemäärän muutos eli
$\Delta p = mv_2 - mv_1 = m(v_2 - 0)$, josta saadaan nopeudeksi

$$v = \frac{\Delta p}{m} = \frac{I}{m} = \frac{0{,}00722\ \text{Ns}}{0{,}0025\ \text{kg}} = 2{,}888\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Tätä nopeutta vastaava liike-energia $E_\text{k} = \frac{1}{2}mv^2$ on muuntunut potentiaalienergiaksi $E_\text{p} = mgh$ heinäsirkan saavuttaessa hyppynsä lakikorkeuden h.
Tästä saadaan yhtälö $mgh = \frac{1}{2}mv^2$, josta saadaan hypyn korkeudeksi

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{(2{,}888\ \text{m/s})^2}{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} \approx 0{,}43\ \text{m}.$$

b) Heinäsirkan kyky hypätä korkealle perustuu sen pitkiin takajalkoihin. Heinäsirkka painaa jalkojaan voimakkaasti alustaa vastaan, jolloin alusta kohdistaa niihin voiman Newtonin III lain mukaisesti. Jalkojen pituuden takia voimavaikutus kestää suhteellisen pitkän ajan, jolloin impulssi (liikemäärän muutos) on suuri.

15-10. Kananmunan potentiaalienergia $E_\text{p} = mgh$ muuttuu putoamisen aikana liike-energiaksi $E_\text{k} = \frac{1}{2}mv^2$. Yhtälöstä $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$ voidaan ratkaista kananmunan nopeus sen osuessa lattiaan:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 1{,}0\ \text{m}} = 4{,}42945\ \text{m/s}.$$

Kananmunan liikemäärä sen osuessa lattiaan on

$p = mv = 0{,}060\ \text{kg} \cdot 4{,}42945\ \text{m/s} \approx 0{,}27\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$. Koska kananmuna särkyy lattiaan osuessaan, törmäyksen jälkeen sen liikemäärä on nolla, joten liikemäärän muutos Δp on suuruudeltaan sama ja suunnaltaan vastakkainen kuin liikemäärä ennen törmäystä. Lattian kananmunaan kohdistaman voiman impulssi on yhtä suuri kuin kananmunan liikemäärän muutos eli $I = \Delta p = 0{,}27$ Ns ja sen suunta on ylöspäin.

15-11. Lasketaan ensin pallon nopeus törmäyksen jälkeen. Törmäyksen jälkeen pallo pomppaa korkeudelle $h_2 = 3{,}1$ m, jolloin sen liike-energia on muuttunut potentiaalienergiaksi eli $\frac{1}{2}mv_2^{\,2} = mgh_2$.

Ratkaistaan tästä nopeuden suuruus törmäyksen jälkeen:

$v_2 = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ (\text{m/s}^2) \cdot 3{,}1\ \text{m}} = 7{,}79885\ \text{m/s}.$

Pallon nopeus pienenee törmäyksessä, joten

$\Delta p = mv_2 - mv_1 = -0{,}91\ \text{kgm/s}.$

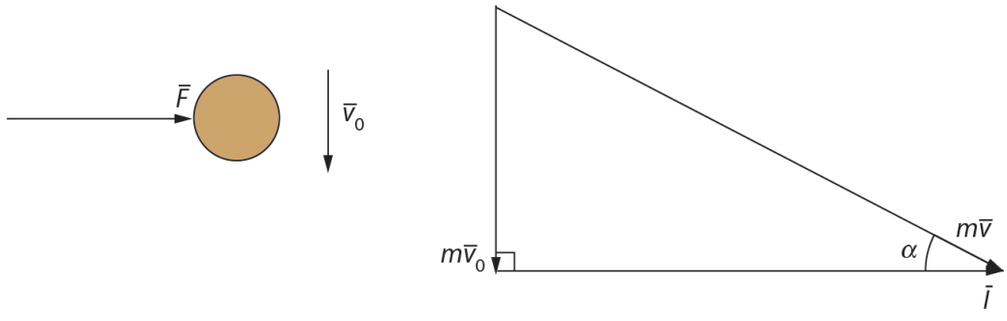
Pallon nopeus ennen törmäystä on silloin

$$v_1 = \frac{mv_2 - \Delta p}{m} = \frac{0{,}20\ \text{kg} \cdot 7{,}79885\ \text{m/s} - (-0{,}91\ \text{kg} \cdot \text{m/s})}{0{,}20\ \text{kg}} = 12{,}3489\ \text{m/s}.$$

Mekaanisen energian säilymislaista saadaan $\frac{1}{2}mv_1^{\,2} = mgh_1$, josta saadaan pudotuskorkeudeksi

$$h_1 = \frac{v_1^{\,2}}{2 \cdot g} = \frac{\left(12{,}3489\ \text{m/s}\right)^2}{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} \approx 7{,}8\ \text{m}.$$

15-12. Mailan osuessa palloon voiman impulssi on $\bar{I} = \Delta\bar{p} = m\bar{v} - m\bar{v}_0 = m\bar{v} + (-m\bar{v}_0)$. Impulssi voidaan arvioida kuvaajasta fysikaalisena pinta-alana (likimain kolmion alana):
$I \approx 3{,}3$ Ns.



Voiman impulssi on liikemäärän muutos vaakasuunnassa eli $I = mv_x$, joten

$$v_x = \frac{I}{m} = \frac{3{,}3\,\text{Ns}}{0{,}15\,\text{kg}} = 22\,\text{m/s}.$$

Pallon nopeus pystysuunnassa on $v_0 = v_y = 11{,}2$ m/s.

Nopeudeksi saadaan

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(22\,\text{m/s}\right)^2 + \left(11{,}2\,\text{m/s}\right)^2} \approx 25\,\text{m/s}.$$

Nopeuden suuntakulma on α: $\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}$, josta $\alpha \approx 27°$ vaakatasoon nähden alaviistoon.

15-13. **a)** Voiman impulssi on sama kuin liikemäärän muutos eli

$\overline{I} = \Delta\overline{p}$ eli $\overline{F}\Delta t = \overline{p}_\text{l} - \overline{p}_\text{a} = m_\text{a}\left(\overline{v}_\text{l} - \overline{v}_\text{a}\right) = m_\text{a} \cdot 0 - m_\text{a}\overline{v}_\text{a}$, sillä auto pysähtyy törmäyksessä eli auton nopeus lopussa on $v_\text{l} = 0$. Kun auton nopeuden suunta valitaan negatiiviseksi suunnaksi, saadaan voimaksi

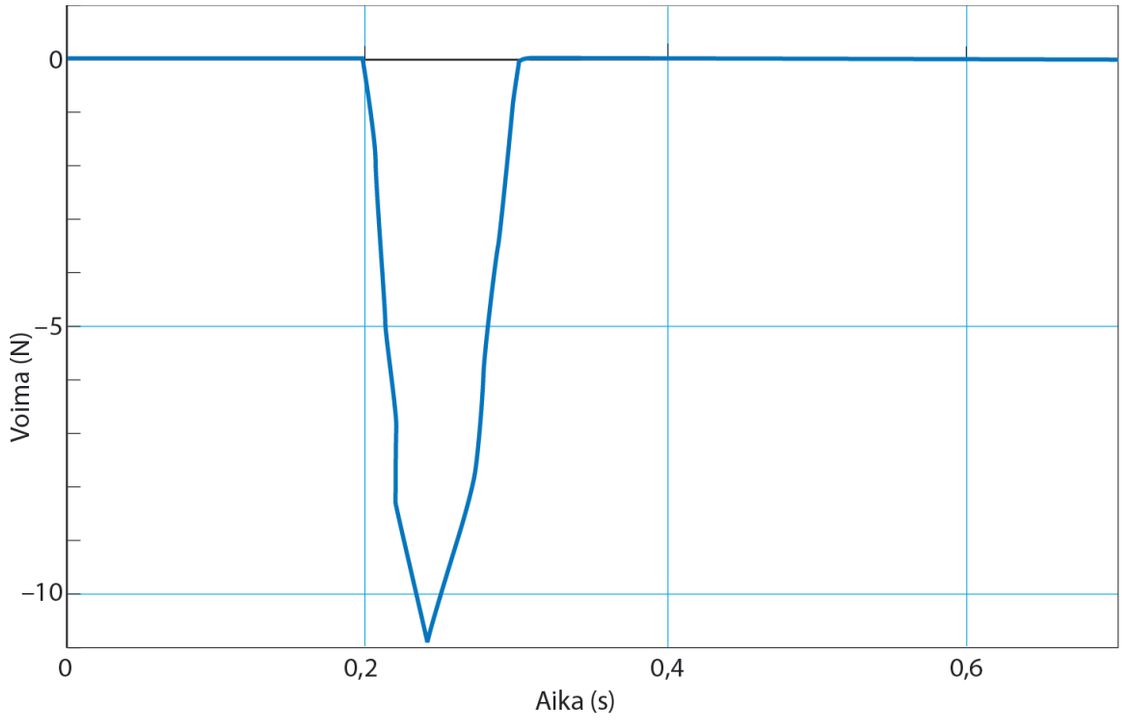
$$F = \frac{m_\text{a} v_\text{a}}{\Delta t_\text{a}} = \frac{1300\ \text{kg} \cdot 15{,}6\ \text{m/s}}{0{,}072\ \text{s}} = 281\ 883 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \approx 2{,}8 \cdot 10^5\ \text{N}.$$

Voima on positiivinen eli sen suunta on auton nopeuden suunnalle vastakkainen.

b) Koska aikuisnuken nopeus törmäyksen alkaessa on sama kuin auton nopeus, saadaan voimalle samalla tavalla kuin a-kohdassa yhtälö

$$F = \frac{m_\text{h} v_\text{a}}{\Delta t_\text{n}} = \frac{75\ \text{kg} \cdot 15{,}6\ \text{m/s}}{0{,}115\ \text{s}} = 10173{,}9 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \approx 1{,}0 \cdot 10^4\ \text{N}.$$

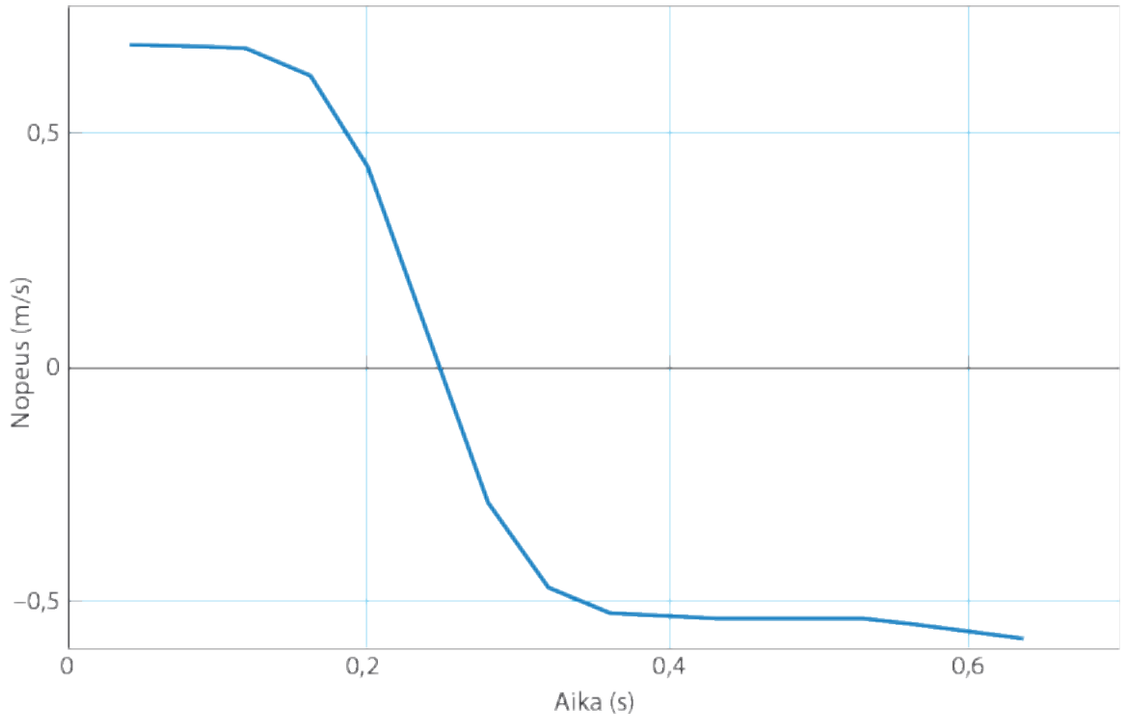
15-14. **a)**



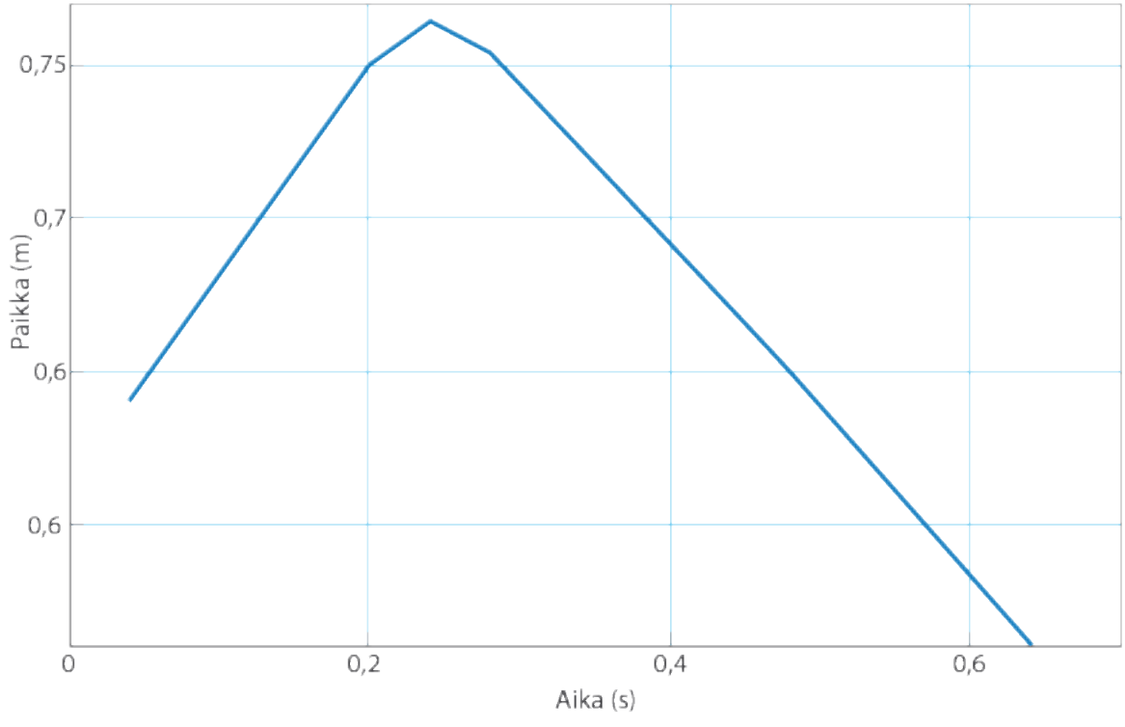
Voima, aika-kuvaajasta saadaan törmäyksen kestoksi 0,10 s.

b) Kohdan a kuvaajasta saadaan voiman suurimmaksi arvoksi 11 N.

c) Nopeus, aika-kuvaajasta saadaan nopeudeksi ennen törmäystä 0,69 m/s ja törmäyksen jälkeen −0,54 m/s, joten nopeuden muutos on $\Delta v = -0{,}54 - 0{,}69 \text{ m/s} = -1{,}23 \text{ m/s}$.
Impulssi on yhtä suuri kuin liikemäärän muutos, joten
$I = \Delta p = m\Delta v = 0{,}250 \text{ kg} \cdot (-1{,}23 \text{ m/s}) \approx -0{,}31 \text{ Ns}$.
Data-aineistossa positiivinen suunta on vaunun suunta ennen törmäystä, joten impulsiin suuruus on 0,31 Ns ja suunta päinvastainen kuin vaunun alkuperäisen nopeuden suunta.



Huomaa, että nopeudet saa myös annetusta paikka,aika-kuvaajasta määrittämällä kuvaajan fysikaaliset kulmakertoimet ennen ja jälkeen törmäyksen.



TEHTÄVIEN RATKAISUT

16-1. Kimmoisina a, b ja e, kimmottomina c ja d.

16-2. Mittauksessa määritettiin toisiinsa törmäävien vaunujen massat m_1 ja m_2 sekä törmäävän vaunun nopeus v_1 ja toisiinsa tarttuneiden vaunujen nopeus u:

m_1 (kg)	m_2 (kg)	v_1 (m/s)
0,526	0,549	3,98
0,526	0,650	4,30
0,526	0,751	3,94
0,526	0,853	3,82
0,526	0,954	4,00

Mittaustuloksista lasketut liikemäärät ja liike-energiat ennen ja jälkeen törmäyksen ovat:

$p_a = m_1 v_1$ (kgm/s)	$p_l = (m_1 + m_2)u$ (kgm/s)	$E_{k,a} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$ (J)	$E_{k,l} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2$ (J)
2,09	2,05	4,17	1,96
2,26	2,22	4,86	2,10
2,07	2,03	4,08	1,61
2,01	1,97	3,84	1,41
2,10	2,07	4,21	1,45

a) Liikemäärä säilyy törmäyksissä mittaustarkkuuden rajoissa.

b) Liike-energia ei säily törmäyksissä.

c) Koska vaunut liikkuvat törmäyksen jälkeen toisiinsa kiinnittyneinä, kyse on täysin epäelastisesta törmäyksestä.

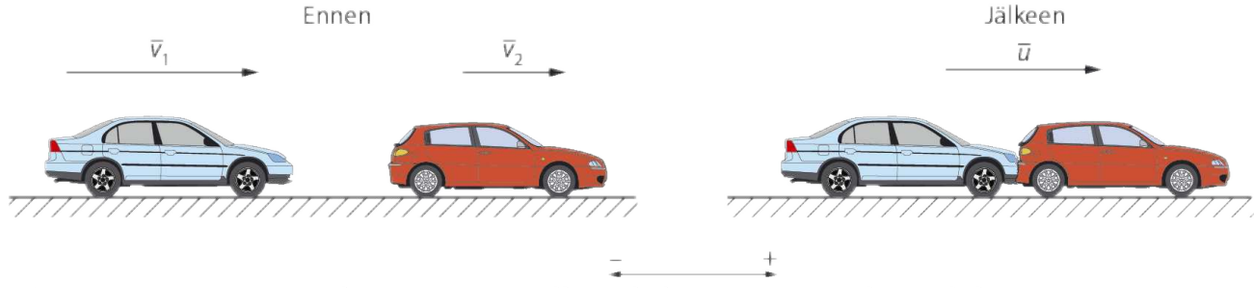
16-3. **a)** Alussa liikemäärä on nolla. Kun mies alkaa kävellä, hänen liikemääränsä on $p_{\text{mies}} = m_{\text{mies}} v_{\text{mies}} = 75\ \text{kg} \cdot 1{,}5\ \ \text{m/s} = 112{,}5\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$. Liikemäärän säilymislain mukaan vaunun liikemäärä on yhtä suuri ja vastakkaismerkkinen kuin miehen liikemäärä niin, että liikemäärien summa on nolla. Vaunun liikemäärän suuruudelle saadaan silloin yhtälö $p_{\text{vaunu}} = m_{\text{vaunu}} v_{\text{vaunu}} = p_{\text{mies}}$ eli

$$v_{\text{vaunu}} = \frac{p_{\text{mies}}}{m_{\text{vaunu}}} = \frac{112{,}5\ \text{kg} \cdot \text{m/s}}{210\ \text{kg}} \approx 0{,}54\ \text{m/s}.$$

Nopeuden suunta on miehen suuntaan nähden vastakkainen.

b) Kun mies pysähtyy, hänen liikemääränsä on nolla. Liikemäärän säilymisen perusteella myös vaunun liikemäärä on nolla eli myös vaunu pysähtyy.

16-4.



Autojen törmäys on kimmoton, jolloin liikemäärän säilymislaki on

$$m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 = (m_1 + m_2)\bar{u}.$$

Sovitaan autojen alkuperäinen liikesuunta positiiviseksi, jolloin

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u.$$

Autojen yhteinen nopeus heti törmäyksen jälkeen on

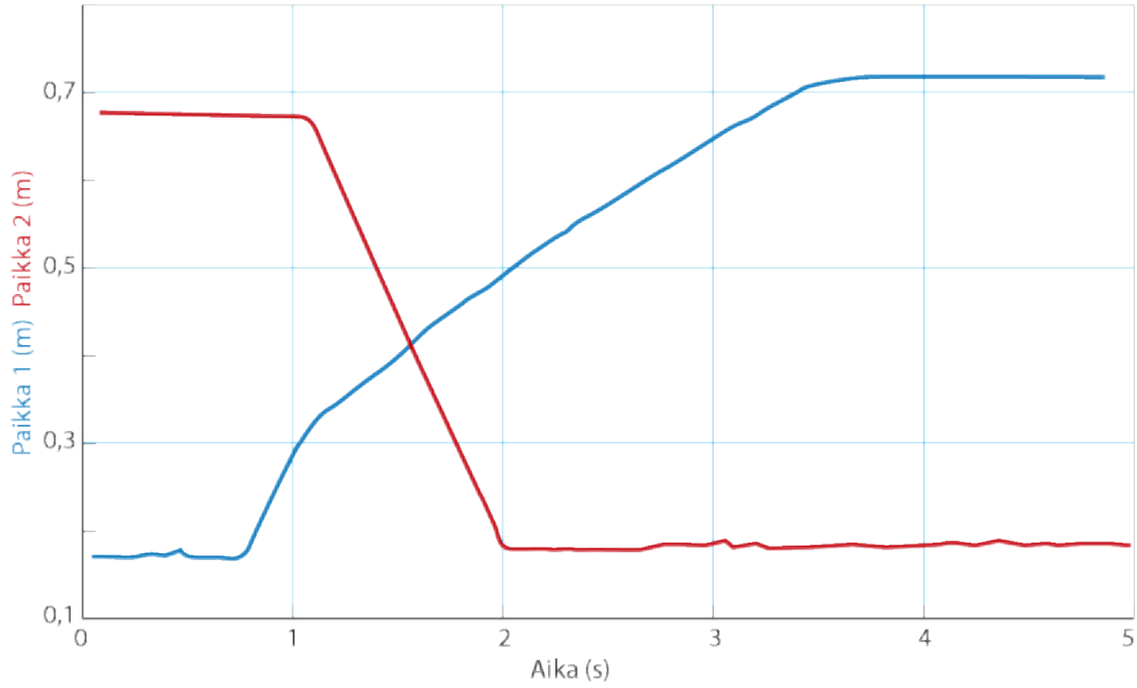
$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{940\ \text{kg} \cdot 102\ \text{km/h} + 920\ \text{kg} \cdot 85\ \text{km/h}}{940\ \text{kg} + 920\ \text{kg}}$$
$$\approx 94\ \text{km/h}.$$

Liikkeen suunta on sama kuin autojen alkuperäisen liikkeen suunta.

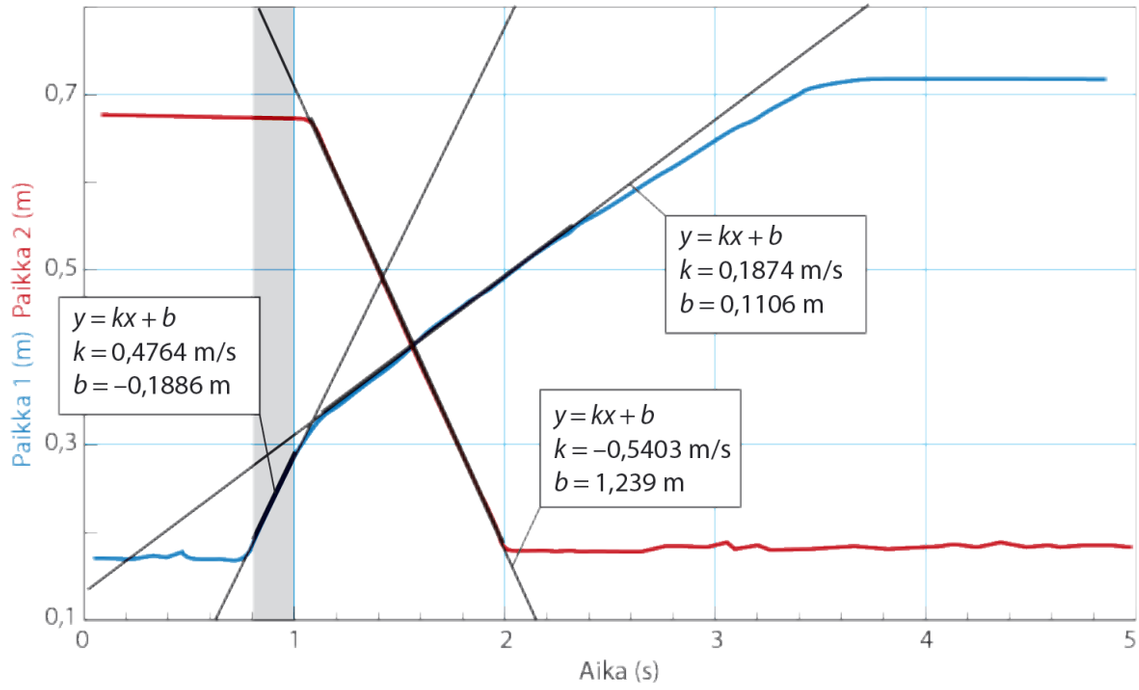
16-5. Veneen ja veden vuorovaikutus oletetaan pieneksi, joten tyttöä ja venettä tarkastellaan eristettynä systeeminä. Tytön liikemäärä hypyn aikana on yhtä suuri kuin veneen ja tytön yhteenlaskettu liikemäärä tytön pysähdyttyä veneen pohjalle. Kun tytön liikesuunta sovitaan positiiviseksi, liikemäärän säilymislaista saadaan skalaariyhtälö $m_1 v = (m_1 + m_2)u$, koska liikesuunnat hypyn aikana ja hypyn jälkeen ovat samat. Skalaariyhtälöstä tytön massaksi saadaan

$$m_1 = \frac{m_2 u}{v - u} = \frac{34\,\text{kg} \cdot 1{,}5\,\text{m/s}}{2{,}5\,\text{m/s} - 1{,}5\,\text{m/s}} = 51\ \text{kg}.$$

16-6. **a)** Mittausohjelmalla saadusta kuvasta saadaan selville törmäävän vaunun nopeus ennen sen törmäämistä paikallaan olevaan vaunuun ja molempien vaunujen nopeudet törmäyksen jälkeen.



b) Mittausohjelmalla on määritetty liikkeen kuvaajien sivuajat juuri ennen ja jälkeen törmäyksen.



Sivuajien fysikaaliset kulmakertoimet antavat vaunujen nopeudet, ja ne ovat luettavissa mittausohjelman antamista tiedoista. Vaunun 1 (m_1 = 1,000 kg) nopeus ennen törmäystä on $v_{1,a} = 0{,}4764$ m/s ja törmäyksen jälkeen $v_{1,l} = 0{,}1874$ m/s.

Vaunun 2 ($m_2 = 0{,}500$ kg) nopeus ennen törmäystä on $v_{2,a} = 0$ m/s ja törmäyksen jälkeen $v_{2,l} = |-0{,}5403 \text{ m/s}|$.

Vaunujen yhteen laskettu liikemäärä ennen törmäystä on

$$p_\mathrm{a} = p_{1,\mathrm{a}} + p_{2,\mathrm{a}} = 1{,}000 \text{ kg} \cdot 0{,}4764 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 0 = 0{,}4764 \frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}}$$

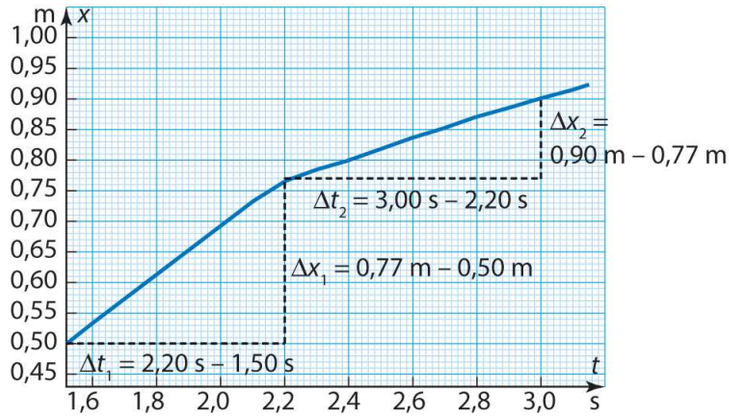
ja törmäyksen jälkeen

$$p_l = p_{1,l} + p_{2,l} = 1{,}000 \text{ kg} \cdot 0{,}1874 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 0{,}500 \text{ kg} \cdot 0{,}5403 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$= 0{,}4576 \frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}}.$$

Liikemäärä säilyy törmäyksessä mittaustarkkuuden rajoissa. Huomaa, mittausohjelma antaa samaan suuntaan liikkuville vaunuille erimerkkiset nopeudet, koska anturi ovat radan eri päissä.

16-7.



a) Tutka mittaa vaunuradalla liikkuvan vaunun paikkaa. Hetkellä 2,2 s vaunu törmää toiseen vaunuun, jolloin vaunut tarttuvat yhteen. Vaunun nopeus ennen törmäystä on suurempi kuin yhteen tarttuneiden vaunujen nopeus.

b) Vaunun nopeus ennen törmäystä saadaan jyrkemmän suoran kulmakertoimesta.

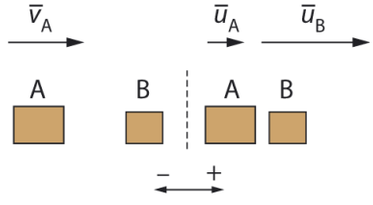
Keskinopeus on $v_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \dfrac{0{,}77\ \text{m} - 0{,}50\ \text{m}}{2{,}20\ \text{s} - 1{,}50\ \text{s}} \approx 0{,}39\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$.

Yhteen tarttuneiden vaunujen keskinopeus on

$$v_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{0{,}90 - 0{,}77\ \text{m}}{3{,}00\ \text{s} - 2{,}20\ \text{s}} \approx 0{,}16\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Nopeudet ovat samaan suuntaan.

16-8. **a)** Aluksi kappale A on tasaisessa liikkeessä ja B levossa. Hetkellä 0,50 s kappale A törmää kappaleeseen B. Törmäyksen jälkeen A:lla ja B:llä on erisuuret vakionopeudet. Molemmat liikkuvat kappaleen A alkuperäisen nopeuden suuntaan.



b) Liikemäärä säilyy törmäyksessä. Ennen törmäystä $m_\mathrm{B}\overline{v}_\mathrm{B} = \overline{0}$, joten kuvan merkinnöillä saadaan yhtälö $m_\mathrm{A}\overline{v}_\mathrm{A} = m_\mathrm{A}\overline{u}_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}\overline{u}_\mathrm{B}$. Valitaan kappaleiden liikesuunta positiiviseksi. Skalaariyhtälöstä

$m_\mathrm{A}v_\mathrm{A} = m_\mathrm{A}u_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}u_\mathrm{B}$ eli $m_\mathrm{A}(v_\mathrm{A} - u_\mathrm{A}) = m_\mathrm{B}u_\mathrm{B}$

saadaan kappaleen A massaksi

$$m_\mathrm{A} = \frac{u_\mathrm{B}}{v_\mathrm{A} - u_\mathrm{A}} m_\mathrm{B}$$

Kappaleiden nopeudet saadaan kappaleiden paikan kuvaajista suorien fysikaalisina kulmakertoimina:

$$v_\mathrm{A} = \frac{\Delta x_{\mathrm{A}1}}{\Delta t_{\mathrm{A}1}} = \frac{0{,}80\,\mathrm{m}}{0{,}50\ \mathrm{s}} = 1{,}6\ \mathrm{m/s}, \quad u_\mathrm{A} = \frac{\Delta x_{\mathrm{A}2}}{\Delta t_{\mathrm{A}2}} = \frac{0{,}20\,\mathrm{m}}{0{,}50\,\mathrm{s}} = 0{,}40\ \mathrm{m/s} \quad \text{ja}$$

$$u_\mathrm{B} = \frac{\Delta x_\mathrm{B}}{\Delta t_\mathrm{B}} = \frac{1{,}0\,\mathrm{m}}{0{,}50\,\mathrm{s}} = 2{,}0\ \mathrm{m/s}.$$

Kappaleen A massa on

$$m_\mathrm{A} = \frac{u_\mathrm{B}}{v_\mathrm{A} - u_\mathrm{A}} m_\mathrm{B} = \frac{2{,}0\ \mathrm{m/s}}{1{,}6\ \mathrm{m/s} - 0{,}40\,\mathrm{m/s}} \cdot 51\,\mathrm{g} = 85\ \mathrm{g}.$$

Kappaleiden yhteenlaskettu liike-energia ennen törmäystä on

$$E_{\mathrm{k}1} = \frac{1}{2}m_\mathrm{A}v^2 + \frac{1}{2}m_\mathrm{B}v^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}085\ \mathrm{kg} \cdot (1{,}6\ \mathrm{m/s})^2 + 0\ \mathrm{J} = 0{,}1088\ \mathrm{J} \approx 0{,}11\ \mathrm{J}$$

ja törmäyksen jälkeen

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{k}2} &= \frac{1}{2}m_\mathrm{A}v_\mathrm{A}^2 + \frac{1}{2}m_\mathrm{B}v_\mathrm{B}^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0{,}085\ \mathrm{kg} \cdot (0{,}40\ \mathrm{m/s})^2 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}051\ \mathrm{kg} \cdot (2{,}0\ \mathrm{m/s})^2 \approx 0{,}1088\ \mathrm{J} = 0{,}11\,\mathrm{J}. \end{aligned}$$

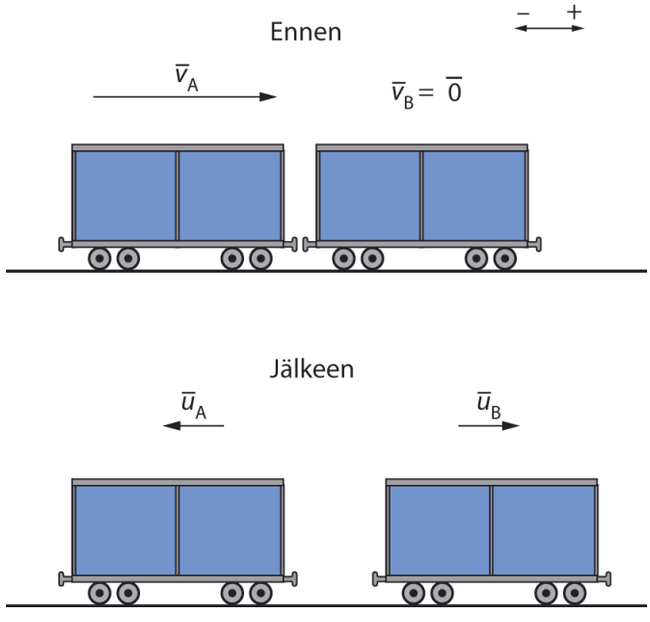
Huomataan, että liike-energia säilyy, joten a-kohdan vastausta voidaan täydentää toteamalla, että törmäys on kimmoinen.

16-9. Kappaleen ja siihen tarttuneen nuolen liike-energia törmäyksen jälkeen on $E_k = \frac{1}{2}Mu^2$, jossa $M = m_{kpl} + m_{nuoli}$ ja u on yhteinen nopeus. Kun kappaleen heilahduksen lakikorkeus on h, mekaanisen energian säilymislaista seuraa yhtälö $\frac{1}{2}Mu^2 = Mgh$, josta voidaan ratkaista nopeus u, $u = \sqrt{2gh}$. Merkitään nuolen nopeutta sen osuessa kappaleeseen v_{nuoli}. Koska liikemäärä säilyy nuolen ja kappaleen törmäyksessä, saadaan yhtälö $m_{nuoli}v_{nuoli} = Mu$, josta saadaan nuolen nopeudeksi

$$v_{nuoli} = \frac{Mu}{m_{nuoli}} = \frac{\left(m_{kpl} + m_{nuoli}\right)\sqrt{2gh}}{m_{nuoli}}$$

$$= \frac{\left(0{,}95\ \text{g} + 0{,}045\ \text{kg}\right)\cdot\sqrt{2\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot 0{,}08\ \text{m}}}{0{,}045\ \text{kg}} \approx 28\ \text{m/s}.$$

16-10.



Törmäyksessä liikemäärä säilyy, joten $m_A\overline{v}_A + m_B\overline{v}_B = m_A\overline{u}_A + m_B\overline{u}_B$. Koska vaunu B on levossa ennen törmäistä, liikemäärän säilymislaki saa muodon $m_A\overline{v}_A + \overline{0} = m_A\overline{u}_A + m_B\overline{u}_B$.

Valitaan vaunun A suunta ennen törmäystä positiiviseksi suunnaksi, jolloin saadaan skalaariyhtälö

$$m_A v_A = m_A(-u_A) + m_B u_B .$$

Vaunun B nopeudeksi saadaan

$$u_B = \frac{m_A v_A - m_A(-u_A)}{m_B} = \frac{80\,\text{kg} \cdot 5{,}0\,\text{m/s} - 80\,\text{kg} \cdot (-1{,}45\,\text{m/s})}{320\,\text{kg}} = 1{,}61250\,\text{m/s}.$$

Koska vierimisvastus on pieni, mekaaninen energia säilyy törmäyksen jälkeen.

Vaunun B liike-energia muuntuu potentiaalienergiaksi:

$$\frac{1}{2} m_B u_B^2 = m_B g h.$$

Ylätasanteen suurin korkeus on

$$h = \frac{u_B^2}{2g} = \frac{(1{,}6125\,\text{m/s})^2}{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} \approx 0{,}13\,\text{m}.$$

16-11. **a)** Liikemäärän säilymislaista seuraa yhtälö $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u$, jossa u on yhteen tarttuneiden autojen nopeus heti törmäyksen jälkeen. Valitaan kuorma-auton liikkeen suunta positiiviseksi suunnaksi, jolloin henkilöauton nopeus tulee kaavoihin negatiivisena. Ratkaistaan u:

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{21\,500\,\text{kg} \cdot 72\,\text{km/h} + 980\,\text{kg} \cdot (-108\,\text{km/h})}{21\,500\,\text{kg} + 980\,\text{kg}}$$
$$= 64{,}1530\,\text{km/h} \approx 64\,\text{km/h}.$$

Koska tulos on positiivinen, liike on kuorma-auton alkuperäisen liikkeen suuntainen.

b) Kuorma-auton liikemäärän muutos on

$$\Delta p_1 = m_1 u - m_1 v_1 = m_1 \left(u - v_1 \right) = 21\ 500\ \text{kg} \cdot (64{,}1530\ \text{km/h} - 72\ \text{km/h})$$
$$= -1{,}68711 \cdot 10^5\ \text{kg} \cdot \frac{1}{3{,}6}\ \text{m/s} = -4{,}68640 \cdot 10^4\ \ \text{kg} \cdot \text{m/s}.$$

Suunta on päinvastainen kuorma-auton liikkeen alkuperäiseen suuntaan nähden.

Impulssiperiaatteen mukaan liikemäärän muutos $\Delta \overline{p}$ on yhtä suuri kuin impulssi $\overline{I} = \overline{F}t,$ jossa $\overline{F}$ on kappaleeseen vaikuttava voima ja t voiman vaikutusaika. Voimalle saadaan silloin yhtälö

$\overline{F} = \dfrac{\overline{I}}{t} = \dfrac{\Delta \overline{p}}{t}$ eli skalaariyhtälönä

$$F = \frac{\Delta p_1}{t} = \frac{-4{,}68640 \cdot 10^4\ \ \text{kg} \cdot \text{m/s}}{50 \cdot 10^{-3}\ \text{s}} \approx -0{,}94\ \text{MN}.$$

Koska voima on negatiivinen, sen suunta on päinvastainen kuorma-auton liikkeen alkuperäiseen suuntaan nähden.

16-12. **a)** Kun mies (massa m_1) työntää pariaan (naisen massa m_2), he erkanevat ja liikkuvat vastakkaisiin suuntiin. Tapahtumassa kokonaisliikemäärä säilyy eli $m_1 \overline{v}_1 + m_2 \overline{v}_2 = m_1 \overline{u}_1 + m_2 \overline{u}_2$. Aluksi liikemäärä on nolla, joten $\overline{0} = m_1 \overline{u}_1 + m_2 \overline{u}_2.$ Kun miehen liikkeen suunta valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $0 = m_1 u_1 - m_2 u_2$, josta saadaan miehen nopeudeksi

$$u_1 = \frac{m_2 u_2}{m_1}.$$

Kitkan tekemä työ on työnnön aikana pieni työnnössä vaikuttaviin voimiin verrattuna, joten se voidaan jättää huomiotta.

Työntöön käytetty energia 41 J muuttuu luistelijoiden liike-energiaksi eli

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = E.$$

Sijoitetaan tähän miehen nopeus $u_1 = \frac{m_2 u_2}{m_1}$:

$$\frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2 u_2}{m_1} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = E.$$

Yhtälö sievenee muotoon

$$\frac{m_2^2}{m_1} u_2^2 + m_2 u_2^2 = 2E,$$

josta saadaan naisen nopeudeksi

$$u_2 = \sqrt{\frac{2E}{\frac{m_2^2}{m_1} + m_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 41\,\text{J}}{\frac{(53\,\text{kg})^2}{75\,\text{kg}} + 53\,\text{kg}}} = 0{,}952126\ \text{m/s} \approx 0{,}95\ \text{m/s}.$$

Miehen nopeus on

$$u_1 = \frac{m_2 u_2}{m_1} = \frac{53\,\text{kg} \cdot 0{,}952126\ \text{m/s}}{75\ \text{kg}} = 0{,}672836\ \text{m/s} \approx 0{,}67\ \text{m/s}$$ vastakkaiseen suuntaan.

b) Työ-energiaperiaatteen mukaan kokonaisvoiman tekemä työ on yhtä suuri kuin liike-energian muutos eli $W = \Delta E_\text{k}$. Luistelijoiden liike-energia kuluu kitkatyöhön. Nainen liukuu matkan *s*, jolloin työperiaatteen mukaan on

$$F_{\mu 2} s = \frac{1}{2} m_2 u_2^2.$$

Kun kitkavoima $F_{\mu 2} = \mu N = \mu m_2 g$ sijoitetaan yhtälöön $F_{\mu 2} s = \frac{1}{2} m_2 u_2^2$,

yhtälö tulee muotoon

$$\mu m_2 g s = \frac{1}{2} m_2 u_2^2.$$

Naisen liukuma matka on

$$s = \frac{u_2^2}{2\mu g} = \frac{(0{,}952126\ \text{m/s})^2}{2 \cdot 0{,}020 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} \approx 2{,}3\ \text{m}.$$

Vastaavalla tavalla ratkaistaan miehen liukuma matka, joka on

$$s = \frac{u_1^2}{2\mu g} = \frac{(0{,}672836\ \text{m/s})^2}{2 \cdot 0{,}020 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} \approx 1{,}2\ \text{m}.$$

16-13. **a)** Pallo pomppaa ensimmäisessä pompussa noin 64 cm:n korkeudelle, jolloin sen mekaaninen energia on $E = mgh = 0{,}055\ \text{g} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}64\ \text{m} = 0{,}345312\ \text{J}$. Alussa mekaaninen energia oli $E = mgh = 0{,}055\ \text{g} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 1{,}00\ \text{m} = 0{,}539550\ \text{J}$. Koska mekaaninen energia säilyy, nämä potentiaalienergiat ovat yhtä suuria kuin vastaavat liike-energiat lattian tasolla. Todetaan, että liike-energia ei säily törmäyksessä, vaan pienenee $0{,}53955\ \text{J} - 0{,}345312\ \text{J} = 0{,}194238\ \text{J}$, joten törmäys ei ole kimmoisa. Törmäys ei myös ole täysin kimmoton, koska pallo ei tartu lattiaan kiinni. Törmäys on siis kimmoton.

b) Pallon osuessa lattiaan, sen liike-energia on a-kohdan mukaan $\frac{1}{2}mv_a^2 = 0{,}539550\ \text{J}$, josta saadaan nopeudeksi

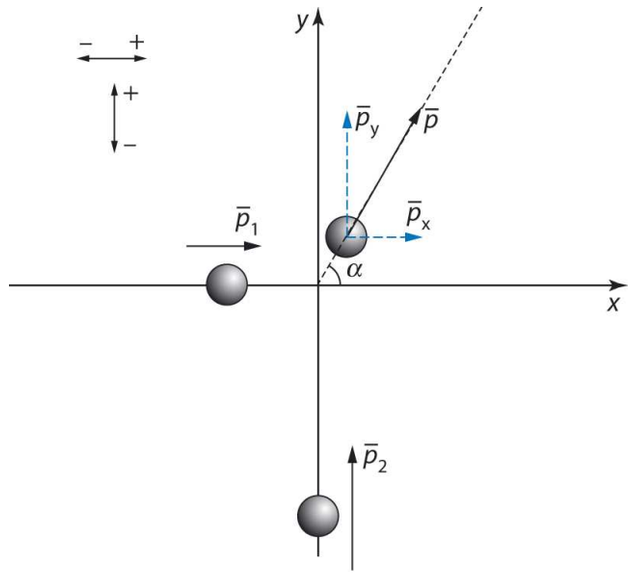
$$v_a = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}539550\ \text{J}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}539550\ \text{J}}{0{,}055\ \text{kg}}} = 4{,}42944\ \text{m/s}.$$

Lattiaan törmäyksen jälkeen pallon nopeus saadaan yhtälöstä $\frac{1}{2}mv_1^2 = 0{,}345312\ \text{J}$ eli

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}345312\ \text{J}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}345312\ \text{J}}{0{,}055\ \text{kg}}} = 3{,}54356\ \text{m/s}.$$ Valitaan suunta ylös positiiviseksi suunnaksi. Pallon liikemäärän muutos on silloin

$$\Delta p = mv_1 - mv_a = m(v_1 - v_a) = 0{,}055\ \text{kg} \cdot \left(3{,}54356\ \text{m/s} - (-4{,}42944\ \text{m/s})\right)$$
$$\approx 0{,}44\ \text{kg} \cdot \text{m/s}.$$

16-14.



Oletetaan, että kiekko 1 liikkuu pitkin x-akselia ja kiekko 2 pitkin y-akselia, kumpikin positiiviseen suuntaan, ja että kiekot törmäävät origossa. Kiekot tarttuvat törmäyksessä yhteen, joten törmäys on kimmoton. Kokonaisliikemäärä säilyy eli $m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 = (m_1 + m_2)\bar{u}$. Liikemäärä säilyy myös x- ja y-suunnissa komponenteittain:

$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u_x$ ja $m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u_y$.

Ratkaistaan nopeuden u komponentit:

$$u_x = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{0{,}71\,\text{kg} \cdot 1{,}6\,\text{m/s}}{0{,}71\,\text{kg} + 0{,}52\,\text{kg}} \approx 0{,}9236\,\text{m/s} \quad \text{ja}$$

$$u_y = \frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{0{,}52\,\text{kg} \cdot 3{,}8\,\text{m/s}}{0{,}71\,\text{kg} + 0{,}52\,\text{kg}} \approx 1{,}607\,\text{m/s}.$$

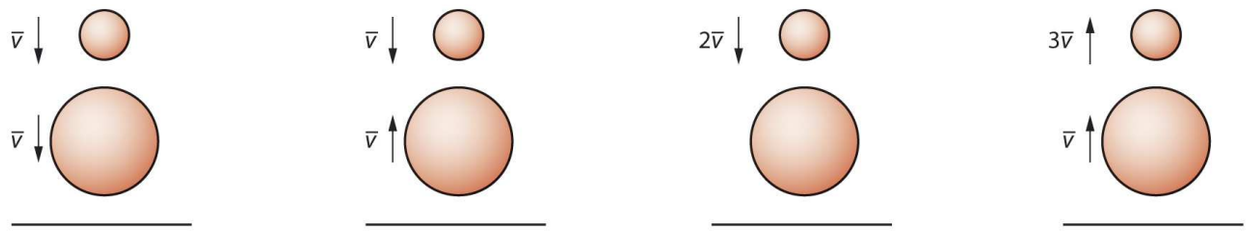
Kiekkojen yhteinen nopeus törmäyksen jälkeen on

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{(0{,}9236\ \text{m/s})^2 + (1{,}607\ \text{m/s})^2} \approx 1{,}9\ \text{m/s}.$$

Suuntakulma α positiivisen x-akselin suhteen saadaan trigonometrian avulla:

$\tan\alpha = \frac{u_y}{u_x} = \frac{1{,}61\,\text{m/s}}{0{,}924\,\text{m/s}}$, josta saadaan suuntakulmalle arvo $\alpha \approx 60^\circ$.

16-16. Kun pallot putoavat, ne saavat saman nopeuden v. Voimme olettaa, että koripallon törmäys lattiaan on likipitäen kimmoisa, jolloin koripallon nopeus sen alkaessa liikkua ylöspäin on myös suunnilleen v. Tällöin jalkapallon nopeus koripallon suhteen on niiden törmätessä $2v$. Voidaan olettaa, että pallojen törmäys on kimmoinen, jolloin jalkapallo liikkuu törmäyksen jälkeen ylöspäin nopeudella $2v$ koripallon suhteen. Lattian suhteen se siis liikkuu nopeudella $3v$. Jalkapallon nopeuden suuruus siis kolminkertaistuu törmäyksessä eli sen liike-energia $\frac{1}{2}mv^2$ yhdeksänkertaistuu. Jos kaikki törmäykset olisivat täysin kimmoisia ja ilmanvastus ei vaikuttaisi, nousisi jalkapallo siis yhdeksän kertaa korkeammalle kuin mistä se pudotettiin, koska mekaanisen energian säilymislain mukaan $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$. Ihan niin korkealle se ei nouse käytännössä, mutta yllättävän korkealle kuitenkin.



Kuvat esittävät pallojen nopeuksia tapahtuman eri vaiheissa. Ensimmäisessä kuvassa molemmat pallot liikkuvat alaspäin. Toisessa kuvassa iso pallo on osunut jo lattiaan ja liikkuu ylöspäin, ja pieni pallo on vielä matkalla alaspäin. Kolmas kuva esittää samaa vaihetta kuin toinen kuva, mutta isomman pallon kannalta nähtynä: koska iso pallo

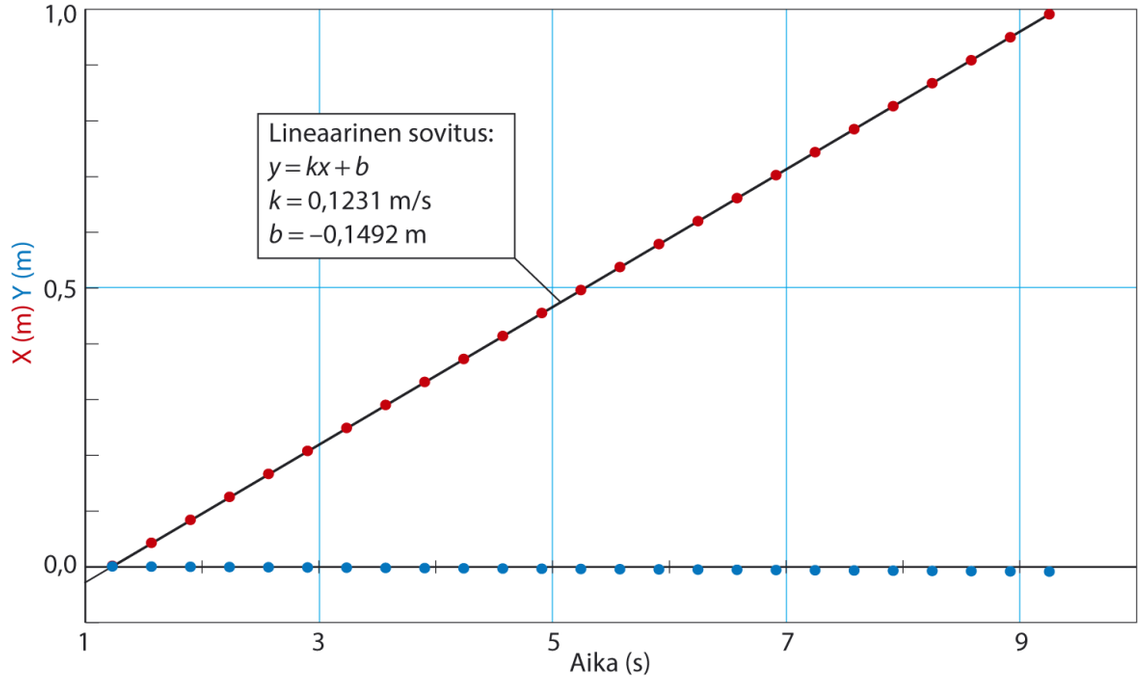
liikkuu nopeudella v ylöspäin ja pieni pallo samalla nopeudella alaspäin, pieni pallo lähestyy isoa palloa nopeudella $2v$. Neljännessä kuvassa molemmat pallot ovat matkalla ylöspäin.

TESTAA OSAATKO S. 159

1. a, b, c **2.** b **3.** a, b **4.** a, c **5.** a, b **6.** c **7.** a, b, c **8.** a, b, c 9**.** a **10.** a

KERTAUSTEHTÄVIEN RATKAISUT

1. Mittausohjelman mukaan veturin nopeus on 12 cm/s.



2. **c)** Kiihtyvyys on $a = \dfrac{v - v_0}{t} = \dfrac{\frac{18}{3,6}\frac{\text{m}}{\text{s}} - \frac{72}{3,6}\frac{\text{m}}{\text{s}}}{15\,\text{s}} = -1,0\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Kolmessa sekunnissa kuljettu matka on

$$s_3 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{72}{3,6}\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3,0\,\text{s} + \frac{1}{2} \cdot (-1,0\,\text{m/s}^2) \cdot (3,0\,\text{s})^2 = 55,5\,\text{m}.$$

Kahdessa sekunnissa kuljettu matka saadaan vastaavalla tavalla,

$$s_2 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{72}{3,6}\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2,0\,\text{s} + \frac{1}{2} \cdot (-1,0\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \cdot (2,0\,\text{s})^2 = 38\,\text{m}.$$

Kolmannen sekunnin aikana kuljettu matka on

$s = s_3 - s_2 = 55,5\,\text{m} - 38\,\text{m} = 17,5\,\text{m} \approx 18\,\text{m}.$

3. **a)** Kuljettu matka saadaan fysikaalisena pinta-alana:

aikaväli 0,0...4,0 s: $s_1 = ½ \cdot 2{,}0 \text{ m/s} \cdot 4{,}0 \text{ s} = 4{,}0 \text{ m}$ ja
aikaväli 4,0...6,0 s: $s_2 = ½ \cdot |-2{,}0 \text{ m/s}| \cdot 2{,}0 \text{ s} = 2{,}0 \text{ m}.$

Kokonaismatka on $s = s_1 + s_2 = 4{,}0 \text{ m} + 2{,}0 \text{ m} = 6{,}0 \text{ m}.$

b) Etäisyys lähtöpaikasta on $4{,}0 \text{ m} - 2{,}0 \text{ m} = 2{,}0 \text{ m}.$

c) Keskinopeus on $v_k = \frac{s}{t} = \frac{6{,}0 \text{ m}}{7{,}0 \text{ s}} \approx 0{,}86 \text{ m/s}.$

4. **a)** Auton loppunopeus 8,0 sekunnin kuluttua on
$v = at = 3{,}0 \text{ m/s}^2 \cdot 8{,}0 \text{ s} = 24 \text{ m/s}.$

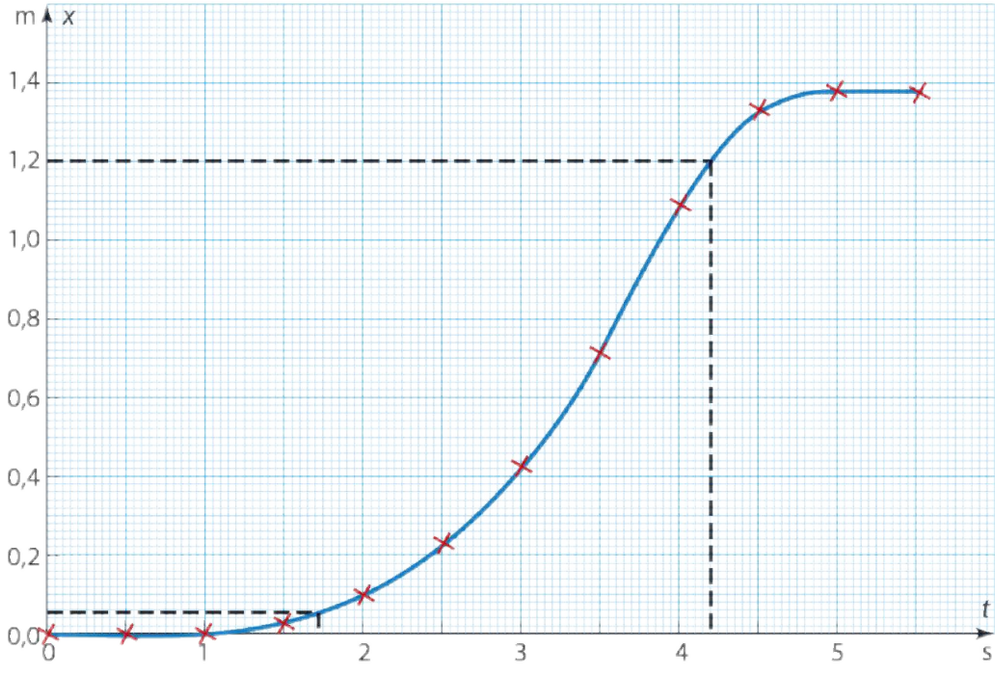
b) Keskinopeus on $v_k = \frac{v_0 + v}{2} = \frac{0 \text{ m/s} + 24 \text{ m/s}}{2} = 12 \text{ m/s}.$

c) Auton kahdeksassa sekunnissa kulkema matka on

$s = v_k \cdot t = 12 \text{ m/s} \cdot 8{,}0 \text{ s} = 96 \text{ m}.$

(Toinen tapa: $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}0 \text{ m/s}^2 \cdot (8{,}0 \text{ s})^2 = 96 \text{ m}.$)

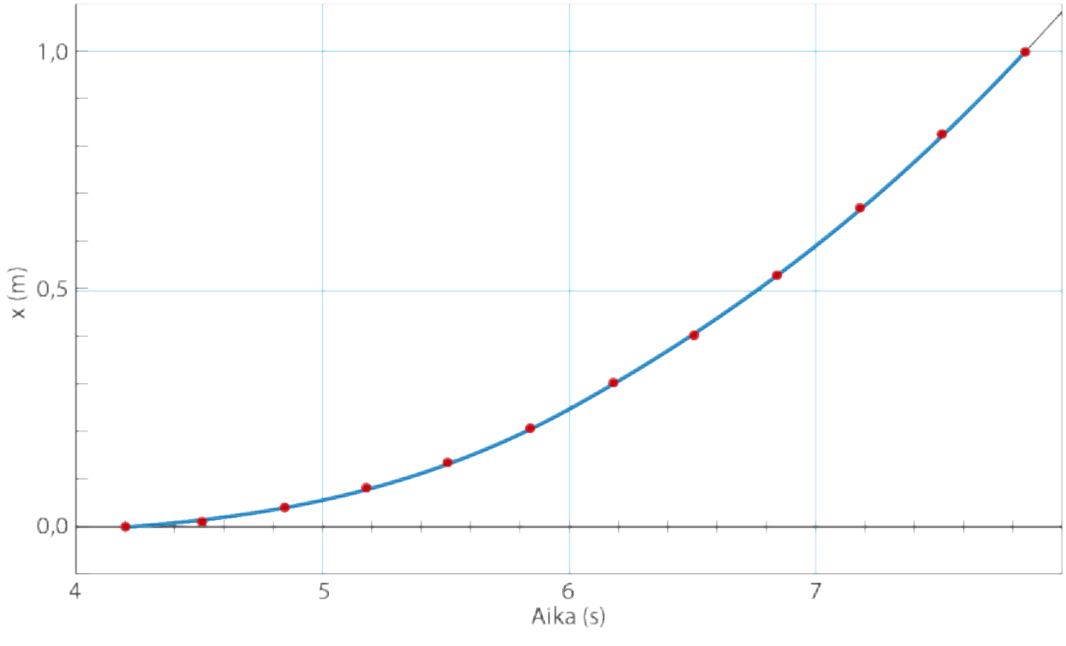
5. **a)** Auton paikka x ajan t funktiona:



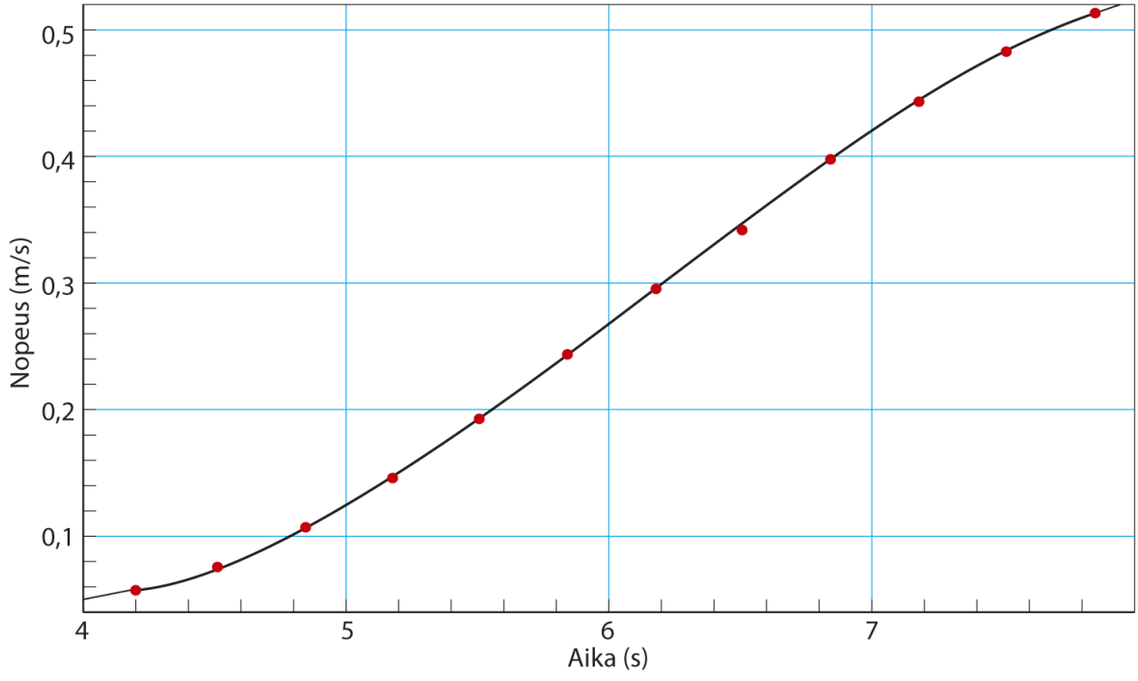
b) Luetaan kuvaajasta auton paikka hetkillä 1,7 s ja 4,2 s. Keskinopeus kysytyllä aikavälillä on $v_k = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1{,}2\text{ m} - 0{,}05\text{ m}}{4{,}2\text{ s} - 1{,}7\text{ s}} \approx 0{,}46\text{ m/s}$.

c) Kuvaajasta nähdään, että auto lähtee liikkeelle, kun $t = 1{,}00$ s ja pysähtyy, kun $t = 4{,}85$ s. Auto liikkuu siis 4,85 s – 1,00 s ≈ 3,9 s ajan.

6. **a)** Kappaleen paikan kuvaaja.



b) Kappaleen nopeuden kuvaaja.



c) Kappaleen kiihtyvyys on likimain tasaista oheisen kuvaajan aikavälillä 5,5…6,9 s.

7. Matka, jonka ilmatyynyn on joustettava, saadaan yhtälöstä $s = \frac{1}{2}at^2$, jossa a on nuken maksimikiihtyvyys. Sijoitetaan aika $t = \frac{v}{a}$ yhtälöön $s = \frac{1}{2}at^2$:

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a \cdot \left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{v^2}{2a} = \frac{\left(\frac{82}{3{,}6}\ \text{m/s}\right)^2}{2 \cdot 250\ \text{m/s}^2} \approx 1{,}03765\ \text{m}.$$

Kun auton etuosa lyhenee törmäyksessä 65 cm, ilmatyynyn on joustettava vähintään 1,03765 m – 0,65 m ≈ 39 cm.

8. **a)** Auton liike on esitetty *t*,*x*-koordinaatistossa.

Koska kuvaaja aikavälillä 0…25 s on suora, auton nopeus on vakio ja liike tasaista.

Välillä

25…35 s auton nopeus kasvaa

35…45 s auton nopeus pienenee

45…60 s auto on paikallaan

60…70 s auton nopeus kasvaa

70…90 s auton nopeus on vakio.

b) Auton keskinopeus on $v_{\mathrm{k}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{900\ \mathrm{m} - 200\ \mathrm{m}}{80\ \mathrm{s} - 20\ \mathrm{s}} \approx 12\ \mathrm{m/s}.$

c) Koska kuvaaja on jyrkin ajanhetkellä $t = 35$ s, auton suurin nopeus saadaan tähän kohtaan piirretyn tangentin fysikaalisena kulmakertoimena. Auton suurin nopeus on $v_{\max} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{330\ \mathrm{m}}{11\ \mathrm{s}} = 30\ \mathrm{m/s}.$

Auto on paikallaan aikavälillä 45…60 s; tällöin auton nopeus on pienin eli 0 m/s.

9. **a**) Kivellä ei ole alkunopeutta (pystysuunnassa) ja kivi on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä alas. Yhtälöstä $y = \frac{1}{2}gt^2$ saadaan kiven putoamisajaksi $t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15\ \mathrm{m}}{9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}} \approx 1{,}74874\ \mathrm{s}.$

Vaakasuunnassa nopeus on vakio eli $v = 19$ m/s. Etäisyydeksi tornin juuresta maahan osumiskohtaan saadaan

$x = vt = 19\,\mathrm{m/s} \cdot 1{,}74874\ \mathrm{s} \approx 33\,\mathrm{m}.$

b) Pystysuunnassa kiven liike on tasaisesti kiihtyvää, joten kiven osuessa maahan nopeuden pystykomponentti on $v_y = v_{0y} - gt$. Koska kivi heitetään vaakasuoraan, kiven alkunopeus *y*-suunnassa eli v_{0y} on nolla. Nopeus *y*-suunnassa on $v_y = -gt = -9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 1{,}74874\,\mathrm{s} \approx -17{,}1552\,\mathrm{m/s}.$

Kiven osuessa maahan nopeuden vaakakomponentti on $v_x = 19\,\text{m/s}$.

Nopeuden suuruus kiven osuessa maahan on

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{(19\,\text{m/s})^2 + (-17{,}1552\,\text{m/s})^2} \approx 26\,\text{m/s}.$$

10. **a)** Kappaleen alkunopeus on 7,0 m/s.

b) Kappaleen 0,70 sekunnin aikana kulkema matka saadaan fysikaalisena pinta-alana:

$$s = \frac{0{,}70\ \text{s} \cdot 7{,}0\ \text{m/s}}{2} \approx 2{,}5\ \text{m}.$$

c) Kappaleen nopeuden suunta vaihtuu vastakkaiseksi.

d) Kuvaaja liittyy pystysuoraan heittoliikkeeseen.

11. **a)** Kirjan ja pöydän välillä on kosketusvuorovaikutus.

Tuolin jalan ja lattian välillä on kosketusvuorovaikutus.

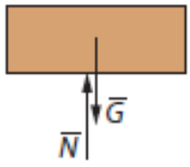
Veneen ja veden välillä on kosketusvuorovaikutus.

b) Maa ja Kuun välillä oleva gravitaatiovuorovaikutus on etävuorovaikutus.

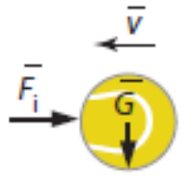
Ilmassa lentävän jalkapallon ja Maan välillä olevan gravitaatiovuorovaikutus on etävuorovaikutus.

Magneettien välillä on magneettisesta vuorovaikutuksesta johtuva etävuorovaikutus.

c) Pöydällä olevan kirjan voimakuvio.



Ilmassa lentävän pallon voimakuvio.



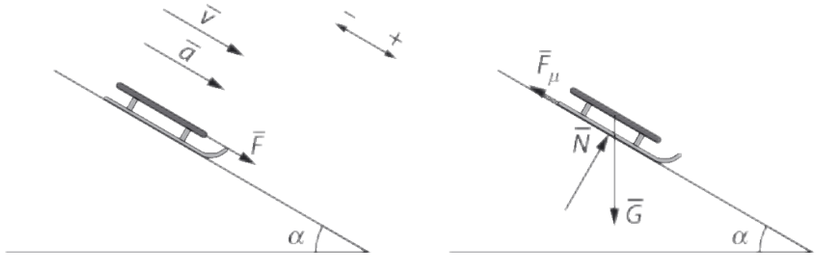
d) Kirjaan kohdistuu paino $\overline{G}$. Tämän voiman vastavoima on $\overline{F}_{\text{kirja Maahan}}$.

Kirjaan kohdistuu pöydän aiheuttama tukivoima $\overline{N}$. Tämän voiman vastavoima on kirjan pöytään kohdistama voima $\overline{F}_{\text{kirja pöytään}}$.

Ilmassa olevaan jalkapalloon kohdistuvat paino $\overline{G}$ ja ilmanvastus $\overline{F}_{\text{i}}$. Painon vastavoima on $\overline{F}_{\text{pallo Maahan}}$. Ilmanvastuksen vastavoima on $\overline{F}_{\text{pallo ilmaan}}$.

12. Ilmanvastus on kummassakin kohdassa pieni.

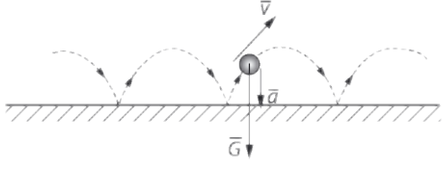
a) Kuvassa on esitetty jyrkässä mäessä olevan kelkan nopeus- ja kiihtyvyysvektorit:



Kelkkaan vaikuttava kokonaisvoima on painon, rinteen tukivoiman ja kitkavoiman summa eli

$$\Sigma\overline{F} = \overline{G} + \overline{N} + \overline{F}_{\mu}.$$

b) Ilmanvastusta ei oteta huomioon. Pallon nopeus on käyrän (paraabelin) tangentin suuntainen. Palloon kohdistuu paino, joka aiheuttaa pallolle kiihtyvyyden. Kiihtyvyyden suunta on alaspäin. Kokonaisvoima on $\Sigma\overline{F} = \overline{G}$.

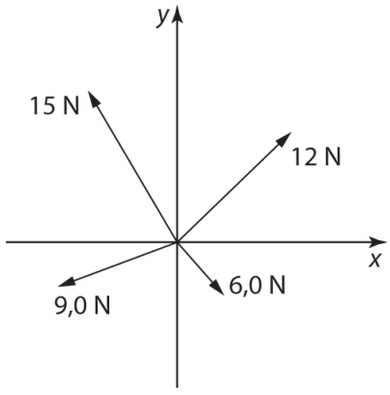


13. Resultantin x-suuntaisen komponentin suuruus on

$$F_x = 12\ \text{N} \cdot \cos 45° - 15\ \text{N} \cdot \cos 60° - 9{,}0\ \text{N} \cdot \cos 20° + 6{,}0\ \text{N} \cdot \cos 50° \approx -3{,}61523\ \text{N}.$$

Resultantin y-suuntaisen komponentin suuruus

$$F_y = 12\ \text{N} \cdot \sin 45° + 15\ \text{N} \cdot \sin 60° - 9{,}0\ \text{N} \cdot \sin 20° - 6{,}0\ \text{N} \cdot \sin 50° \approx 13{,}8012\ \text{N}.$$



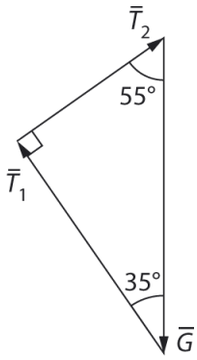
Resultantin suuruus on

$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(-3{,}61523\,\text{N})^2 + (13{,}8012\,\text{N})^2} \approx 14\,\text{N}$ ja suunta:

$\tan\beta = \left|\dfrac{F_y}{F_x}\right| = \left|\dfrac{13{,}8012\,\text{N}}{-3{,}6152\,\text{N}}\right|$, josta kulma $\beta \approx 75°$.

Resultantin suunta on origosta vasemmalle yläviistoon. Suuntakulma negatiivisen x-akselin suhteen on 75°, positiivisen x-akselin suhteen 105°.

14. Vektorit $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$ ja $\overline{G}$ toteuttavat ehdon $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$.



Narun T_1 jännitysvoiman suuruus saadaan yhtälöstä

$\sin 55° = \dfrac{T_1}{G}$, josta

$T_1 = mg \sin 55° = 7{,}3\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \sin 55° \approx 59\ \text{N}.$

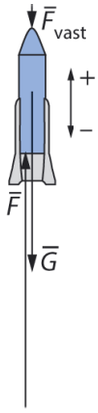
Narun T_2 jännitysvoima saadaan yhtälöstä

$\sin 35° = \dfrac{T_2}{G}$, josta

$T_2 = mg \sin 35° = 7{,}3\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \sin 35° \approx 41\ \text{N}.$

Jännitysvoimat ovat narujen suuntaiset.

15. **a)** Raketin voimakuvio.



b) Newtonin II lain mukaan on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{F} + \overline{F}_{\text{vast}} + \overline{G} = m\overline{a}$. Kun raketin liikkeen suunta valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $F - F_{\text{vast}} - G = ma$. Raketin kiihtyvyydeksi saadaan

$$a = \frac{F - F_{\text{vast}} - G}{m} = \frac{6450\,\text{N} - 470\,\text{N} - 450\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{450\,\text{kg}}$$

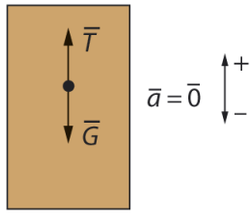
$$= 3{,}47889\,\text{m/s}^2 \approx 3{,}5\,\text{m/s}^2 \quad .$$

c) Raketin nousumatka on $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}47889\,\text{m/s}^2 \cdot (3{,}0\ \text{s})^2 \approx 16\,\text{m}$.

16. Newtonin II lain mukaan on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{T} + \overline{G} = m\overline{a}$. Kun suunta ylös on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö $T - mg = ma$.

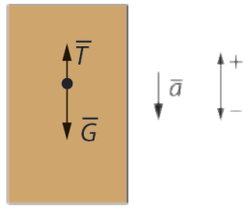
a) Koska punnus liikkuu vakionopeudella, kiihtyvyys on nolla. Yhtälöstä $T - mg = 0$ jousivaa'an lukemaksi saadaan

$T = mg = 1{,}6\ \text{m/s}^2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \approx 16\ \text{N}$.



b) Kun hissi lähtee alaspäin, skalaariyhtälö on $T - mg = -ma$. Jousivaa'an lukema on

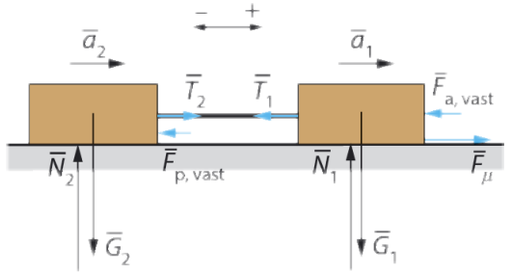
$T = mg - ma = m(g - a) = 1{,}6\ \text{m/s}^2 \cdot (9{,}81\ \text{m/s}^2 - 1{,}7\ \text{m/s}^2) \approx 13\ \text{N}$.



c) Kun hissi lähtee ylöspäin, skalaariyhtälö on $T - mg = ma$ ja lukema

$T = mg + ma = m(g + a) = 1{,}6\ \text{m/s}^2 \cdot (9{,}81\ \text{m/s}^2 + 1{,}7\ \text{m/s}^2) \approx 18\ \text{N}.$

17. **a)** Piirretään voimakuvio.



Newtonin II lain mukaan on

autolle $\Sigma\overline{F} = \overline{F}_\mu + \overline{F}_{\text{a,vast}} + \overline{T}_1 + \overline{G}_1 + \overline{N}_1 = m_1\overline{a}_1$ ja

perävaunulle $\Sigma\overline{F} = \overline{T}_2 + F_{\text{p,vast}} + \overline{N}_2 + \overline{G}_2 = m_2\overline{a}_2$.

Koska vetokoukku on yhtä kappaletta, vetokoukkuun kohdistuvat voimat ovat yhtä suuret eli $\left|\overline{T}_1\right| = \left|\overline{T}_2\right| = T$. Koska auto ja perävaunu liikkuvat yhdessä, kummankin kiihtyvyyden suuruus on yhtä suuri eli $\left|\overline{a}_1\right| = \left|\overline{a}_2\right| = a$. Kappaleita voidaan tarkastella erillisinä systeemeinä.

Koska liike tapahtuu vaakasuunnassa ja pystysuunnassa voimat kumoavat toisensa, pystysuuntaa ei tarvitse tarkastella.

Kun suunta oikealle on positiivinen, auton skalaariyhtälö on

$F_\mu - F_{\text{a,vast}} - T = m_1 a$, josta $T = F_\mu - F_{\text{a,vast}} - m_1 a.$

Perävaunun skalaariyhtälö on $T - F_{\text{p,vast}} = m_2 a.$

Sijoitetaan auton skalaariyhtälö $T = F_\mu - F_{\text{a,vast}} - m_1 a$ perävaunun skalaariyhtälöön $T - F_{\text{p,vast}} = m_2 a$, jolloin saadaan

$F_\mu - F_{\text{a,vast}} - m_1 a - F_{\text{p,vast}} = m_2 a.$

Perävaunuun kohdistuvan liikevastusvoiman suuruus on

$F_{\text{p,vast}} = F_\mu - F_{\text{a,vast}} - m_1 a - m_2 a =$

$= 5{,}7\ \text{kN} - 1{,}7\ \text{kN} - 1450\ \text{kg} \cdot 1{,}7\ \text{m/s}^2 - 370\ \text{kg} \cdot 1{,}7\ \text{m/s}^2$

$= 906\ \text{N} \approx 910\ \text{N}.$

b) Vetokoukkuun kohdistuvan voiman suuruus

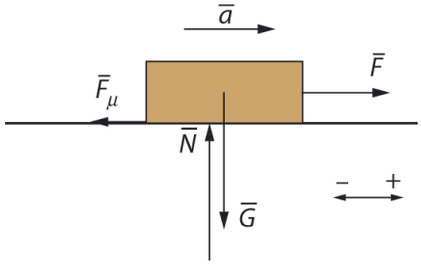
$T = F_{\text{p,vast}} + m_2 a = 906\ \text{N} + 370\ \text{kg} \cdot 1{,}7\ \text{m/s}^2 \approx 1{,}5\ \text{kN}.$

18. **a)** Liikettä ylläpitävä pienin voima on yhtä suuri kuin kitka eli

$F = \mu N = \mu mg = 0{,}30 \cdot 5{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 14{,}714\ \text{N} \approx 15\ \text{N}.$

Kappale liikkuu, jos siihen kohdistuva voima on vähintään 15 N.

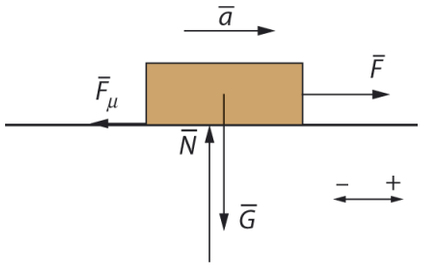
b) Newtonin II lain mukaan vaakasuunnassa on $\Sigma \overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{F} + \overline{F}_\mu = m\overline{a}$. Valitaan suunta oikealle positiiviseksi.



Kappale on kiihtyvässä liikkeessä, koska pinnan suuntainen voima (24 N) on suurempi kuin kitka (15 N). Skalaariyhtälöstä $F - F_\mu = ma$ kappaleen kiihtyvyys on

$$a = \frac{F - F_\mu}{m} = \frac{24\ \text{N} - 14{,}715\ \text{N}}{5{,}0\ \text{kg}} \approx 1{,}9\ \text{m/s}^2.$$

19. **a)** Newtonin II lain mukaan vaakasuunnassa on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{F} + \overline{F}_\mu = m\overline{a}$.

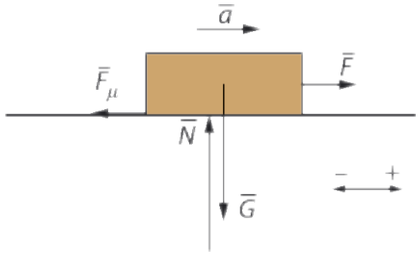


Kun liikkeen suunta valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö

$F - F_\mu = ma$ eli $F - \mu mg = ma$. Kitkakerroin on

$$\mu = \frac{F - ma}{mg} = \frac{4{,}0\ \text{N} - 1{,}0\ \text{kg} \cdot 2{,}0\ \text{m/s}^2}{1{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} = 0{,}203874 \approx 0{,}20\,.$$

b) Kun liike on tasaista, vetävän voiman $\overline{F}$ ja liikevastusten, tässä tapauksessa kitkan $\overline{F}_\mu$, summa on nolla eli $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$.



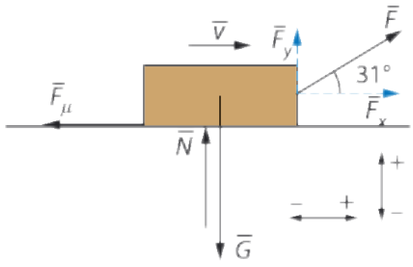
Kun liikkeen suunta valitaan positiiviseksi, saadaan $F - F_\mu = 0$.

Vetävän voiman suuruus on

$F = F_\mu = \mu mg = 0{,}203874 \cdot 1{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \approx 2{,}0\ \text{N}$.

Vetävä voima tekee työtä samalla teholla kuin liikevastukset muuntavat mekaanista työtä muihin energiamuotoihin esimerkiksi lämmöksi ja ääneksi. Myös pintojen kuluminen eli pintojen rakenteen muuttuminen vaatii energiaa.

20. Koska reki liikkuu vakionopeudella, on $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{F}_x + \overline{F}_\mu = \overline{0}$.



Valitsemalla suunta oikealle positiiviseksi saadaan $\overline{F}_x - \overline{F}_\mu$ eli

$F\cos\alpha - \mu N = 0$. Kitkakertoimeksi saadaan

$$\mu = \frac{F\cos\alpha}{N}.$$

Kitkakertoimen laskemiseksi tarvitaan suureyhtälö tukivoimalle *N*. Pystysuorassa suunnassa voimien summa on nolla $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{G} + \overline{N} + \overline{F}_y = \overline{0}$.

Kun suunta ylös on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö

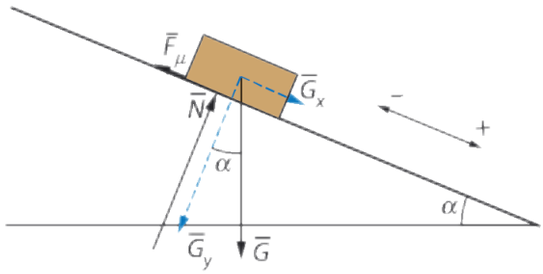
$-G + N + F_y = 0$, josta tukivoimalle saadaan yhtälö

$N = G - F_y = mg - F\sin\alpha.$

Kun tukivoiman yhtälö $N = mg - F\sin\alpha$ sijoitetaan kitkakertoimen yhtälöön $\mu = \frac{F\cos\alpha}{N}$, kitkakertoimeksi saadaan

$$\mu = \frac{F\cos\alpha}{N} = \frac{F\cos\alpha}{mg - F\sin\alpha} = \frac{85\ \text{N} \cdot \cos 31°}{78\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 - 85\ \text{N} \cdot \sin 31°} \approx 0{,}10.$$

21. **a)** Newtonin II lain mukaan rinteen suunnassa on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{G}_x + \overline{F}_\mu = m\overline{a}$.



Valitaan suunta rinnettä alaspäin positiiviseksi. Saadaan skalaariyhtälö

$G_x - F_\mu = ma.$

Ratkaistaan yhtälöstä hiihtäjän kiihtyvyyden suuruus:

$$a = \frac{G_x - F_\mu}{m} = \frac{G_x - \mu N}{m} = \frac{G_x - \mu G_y}{m}$$
$$= \frac{mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha}{m} = \frac{m(g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha)}{m}$$
$$= g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha$$
$$= 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \sin 25° - 0{,}12 \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \cos 25° = 3{,}07898\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 3{,}1\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

b) Yhtälöstä $s = \frac{1}{2}at^2$ saadaan ajaksi $t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25\,\text{m}}{3{,}07898\,\text{m/s}^2}} \approx 4{,}0\ \text{s}.$

c) Tätä mallia käytettäessä massalla ei ole merkitystä, koska massa supistuu laskuista pois.

22. Vedessä alumiinipalaan kohdistuva noste on suuruudeltaan

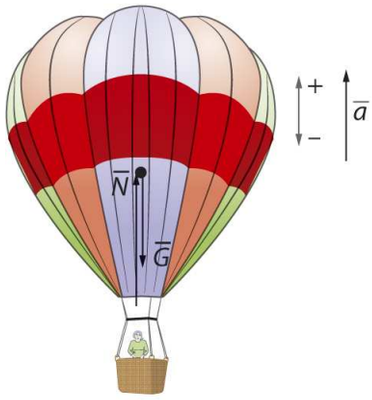
$N = 1{,}02\ \text{N} - 0{,}63\ \text{N} = 0{,}39\ \text{N}.$

Alumiinipalan tilavuus on $V = \frac{m}{\rho} = \frac{\frac{0{,}39\ \text{N}}{9{,}81\ \text{m/s}^2}}{1000\ \text{kg/m}^3} \approx 3{,}97554 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^3.$

Nosteen suuruus bensiinissä on $1{,}02\ \text{N} - 0{,}75\ \text{N} = 0{,}27\ \text{N}.$

Bensiinin tiheys on $\rho = \dfrac{m_2}{V} = \dfrac{\dfrac{0{,}27\ \text{N}}{9{,}81\ \text{m/s}^2}}{3{,}97554 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^3} \approx 690\ \text{kg/m}^3$.

23. Newtonin II lain mukaan on $\Sigma\overline{F} = M\overline{a}$ eli $\overline{N} + \overline{G} = M\overline{a}$, jossa M on kokonaismassa ja $\overline{N}$ noste.



Kun suunta ylös valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö

$N - G = Ma$ eli $N - Mg = Ma$.

Kun pallo laskeutuu, on $N = Mg - Ma_{\text{alas}}$.

Jotta pallo nousisi ylöspäin, massaa on kevennettävä määrällä m. Saadaan yhtälö

$(M - m)\ a_{\text{alas}} = N - (M - m)g$ eli

$Ma_{\text{ylös}} - ma_{\text{ylös}} = M(g - a_{\text{alas}}) - Mg + mg.$

Massaksi m saadaan

$$m = \frac{Ma_{\text{ylös}} + Ma_{\text{alas}}}{g + a_{\text{ylös}}} = \frac{1210\ \text{kg} \cdot (0{,}03\ \text{m/s}^2 + 0{,}2\ \text{m/s}^2)}{9{,}81\ \text{m/s}^2 + 0{,}03\ \text{m/s}^2} \approx 30\ \text{kg}.$$

24. Koska jokaiseen esineeseen kohdistuvan painon suuruus $G = mg$ ilmassa tiedetään, voidaan laskea jokaisen esineen massa yhtälöstä $m = \frac{G}{g}$.

esine	1	2	3	4	5	6
m (g)	12,2	26,5	39,8	54,0	70,3	80,5

Koska esineet punnittiin sekä ilmassa että vedessä, saadaan nosteen suuruus erotuksesta $N = G_{\text{ilma}} - G_{\text{vesi}}$.

Noste on yhtä suuri kuin kappaleen syrjäyttämän väliainemäärän paino. Syrjäytyneen veden paino G on

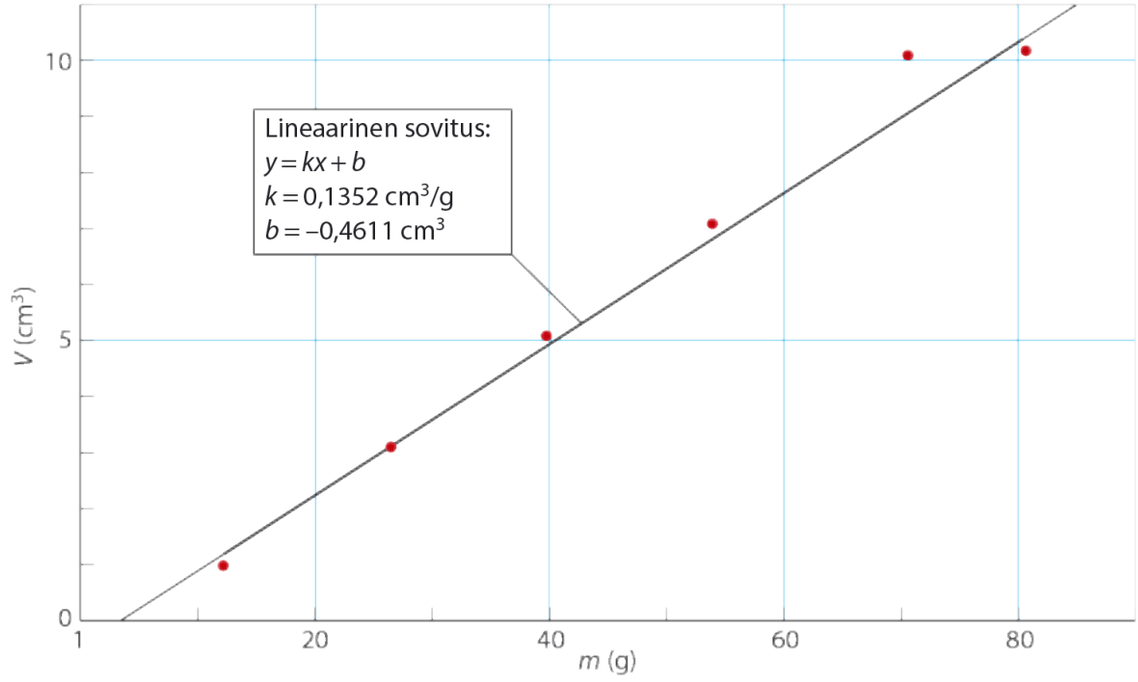
$G = N = m_{\text{vesi}}g = \rho_{\text{vesi}} V_{\text{vesi}}g = \rho_{\text{vesi}} V_{\text{esine}}g$, josta esineen tilavuus on

$V_{\text{esine}} = \frac{N}{\rho_{\text{vesi}}g}$.

Lasketaan nosteen ja tilavuuden arvot ja kirjoitetaan ne taulukkoon.

Esine	1	2	3	4	5	6
noste (N)	0,01	0,03	0,05	0,07	0,10	0,10
tilavuus (cm^3)	1,0	3,1	5,1	7,1	10,2	10,2

Esitetään mittaustulokset m, V-koordinaatistossa:



Kuvaajaksi saadun suoran fysikaalinen kulmakerroin on 0,1352 cm^3/g.

Tiheyden yhtälöstä $\rho = \frac{m}{V}$ saadaan tilavuudelle yhtälö $V = \frac{m}{\rho} = \frac{1}{\rho} \cdot m$.

Vastaavan *m, V*-koordinaatistossa kulkevan suoran kulmakerroin on $k = \frac{1}{\rho}$. Tiheydeksi saadaan $\rho = \frac{1}{k} = \frac{1}{0{,}1352\,\text{cm}^3/\text{g}} \approx 7{,}4\ \text{g/cm}^3$.

25. **a)** Kuvan mukaan voima kohdistetaan avaajan varteen kohtisuorasti, joten avaamiseen tarvittava voiman momentti on $M = Fr$. Avaamiseen tarvittavan voiman suuruus on

$$F = \frac{M}{r} = \frac{110\ \text{Nm}}{0{,}45\ \text{m}} = 244{,}444\ \text{N} \approx 240\ \text{N}.$$

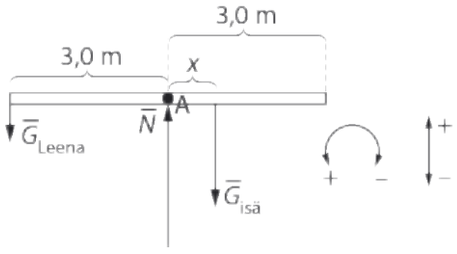
b) Henkilön painon suuruus on $G = mg = 66\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \approx 650\ \text{N}$.

Henkilö voi kohdistaa avaimen varteen enintään noin painonsa suuruisen voiman ylhäältä alas.

Henkilöön kohdistuva paino 650 N on selvästi suurempi kuin pulttien avaamiseen tarvittava voima 240 N. Näin ollen pulttien avaaminen onnistuu.

c) Pultteja avataan melko harvoin. Pultit voivat juuttua kiinni erimerkiksi likaantuminen tai ruostumisen takia, jolloin pulttien avaamiseen tarvittava momentti on suurempi kuin se, jolla pultit kiristettiin kiinni.

26.



Koska keinulauta on tuettu keskipisteestään, laudan painolla ei ole vääntövaikutusta keskipisteen suhteen eli laudan painon momentti keskipisteen suhteen on 0.

Leenan ja isän tulee asettua eri puolille tukipistettä eli laudan keskikohtaa A. Olkoon isän etäisyys tukipisteestä x. Jotta lauta pysyy tasapainossa, on momenttien summan oltava nolla minkä tahansa laudan akselin suhteen eli $\Sigma M = 0$. Kun suunta vastapäivään on positiivinen, momenttien summa laudan keskipisteen suhteen on $\sum M_{\text{A}} = -M_{\text{isä}} + M_{\text{Leena}} = 0$ eli $-G_{\text{isä}} \cdot x + G_{\text{Leena}} \cdot 3{,}0\,\text{m} = 0.$

Isän etäisyys tukipisteestä on

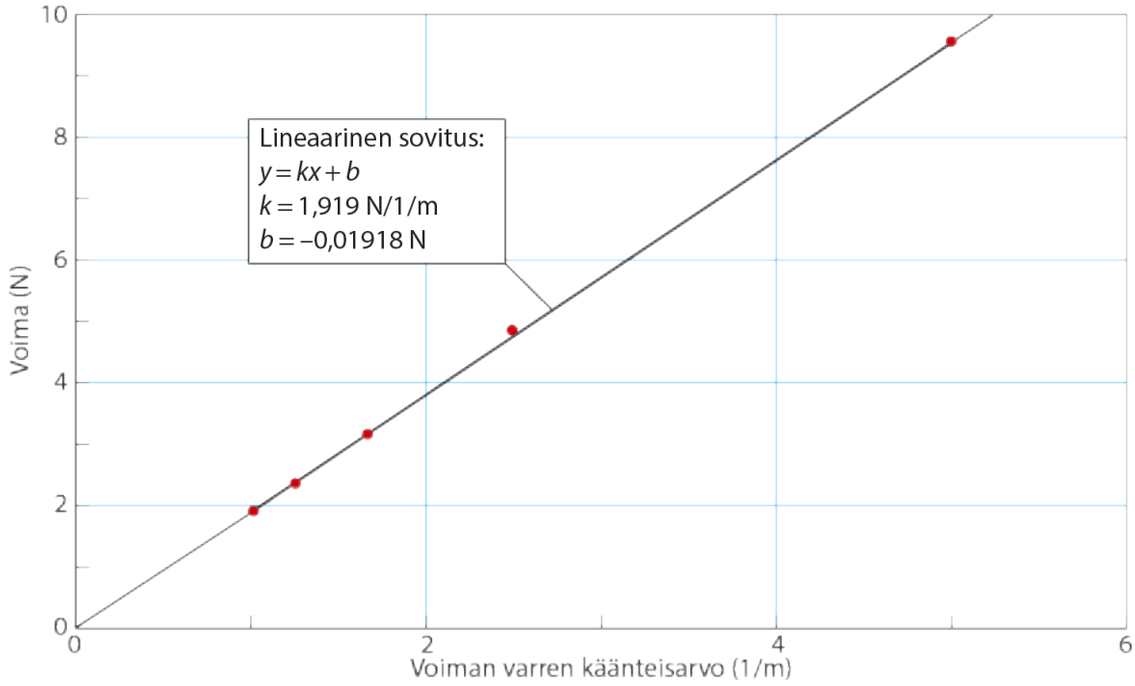
$$x = \frac{G_{\text{Leena}} \cdot 3{,}0\,\text{m}}{G_{\text{isä}}} = \frac{m_{\text{Leena}} g \cdot 3{,}0\,\text{m}}{m_{\text{isä}} g} = \frac{m_{\text{Leena}} \cdot 3{,}0\,\text{m}}{m_{\text{isä}}}$$
$$= \frac{30\,\text{kg} \cdot 3{,}0\,\text{m}}{80\,\text{kg}} = 1{,}125\,\text{m}.$$

Isän etäisyys Leenasta on silloin 1,125 m + 3,0 m ≈ 4,1 m.

27. Taulukoidaan mittaustulokset eli voiman vaikutussuoran etäisyys r kiertoakselista ja ripustuslangan viivaimeen kohdistaman voiman suuruus. Lasketaan taulukkoon myös r:n käänteisarvot $1/r$. Kiertoakseli on viivaimen kohdassa 0,00 m.

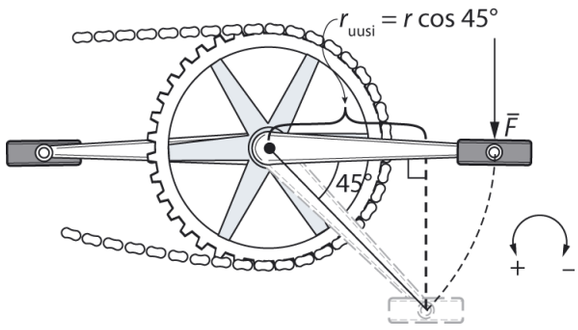
r (m)	$1/r$ (1/m)	F (N)
0,20	5,00	9,56
0,40	2,50	4,83
0,60	1,66667	3,16
0,80	1,25	2,35
1,00	1,00	1,91

Viedään arvot mittausohjelmaan ja esitetään ne $1/r$,F-koordinaatistossa.



Voiman momentti on $1/r$,F-koordinaatistossa esitetyn suoran $F = M \cdot \frac{1}{r}$ kulmakerroin. Mittausohjelman mukaan voiman momentti on 1,919 N/1/m ≈ 1,9 Nm. Tasapainottavan voiman momentti on 1,9 Nm vastapäivään.

28.



a) Kun kiertosuunta myötäpäivään on negatiivinen, momentti on

$$M = -Fr = -35\,\text{N} \cdot 0{,}17\,\text{m} \approx -6{,}0\,\text{Nm}$$

Voiman momentti on 6,0 Nm myötäpäivään.

b) Voiman vaikutussuoran etäisyys keskiöstä on nyt pienempi kuin a-kohdassa. Vääntövarren pituus on nyt

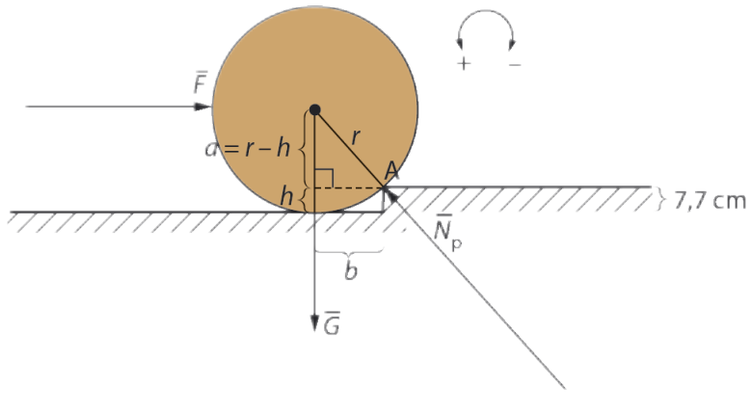
$$r_{uusi} = 0{,}17\,\text{m} \cdot \cos 45° \approx 0{,}120208\,\text{m}.$$

Momentti on

$$M = -Fr_{uusi} = -35\,\text{N} \cdot 0{,}120208\,\text{m} \approx -4{,}2\,\text{Nm}.$$

Voiman momentti on 4,2 Nm myötäpäivään.

29. Puupölkkyyn vaikuttavat voimat ovat pölkkyyn kohdistuva paino $\bar{G}$, vaakasuoran maanpinnan tukivoima $\bar{N}_\text{m}$, portaan reunan tukivoima $\bar{N}_\text{p}$ ja työntövoima $\bar{F}$. Tarkastellaan tilannetta, jossa pölkky on juuri irtoamassa maan pinnalta. Tällöin maanpinnan tukivoima $\bar{N}_\text{m}$ on nolla. Lasketaan momenttien summa akselin A suhteen, tällöin voiman $\bar{N}_\text{p}$ momentti on nolla. Selvitetään ensin pölkkyyn kohdistuvan painon ja työntövoiman varret.



Työntövoiman $\overline{F}$ varsi on

$$a = r - h = \frac{0{,}66\ \text{m}}{2} - h = 0{,}33\ \text{m} - 0{,}077\ \text{m} = 0{,}253\ \text{m}.$$

Painon $\overline{G}$ varsi b saadaan Pythagoraan lauseen avulla: $b^2 + a^2 = r^2$, josta saadaan

$$b = \pm\sqrt{r^2 - a^2} = \pm\sqrt{(0{,}33\,\text{m})^2 - (0{,}253\,\text{m})^2} \approx 0{,}211875\ \text{m}.$$

Hyväksytään vain varren positiivinen arvo. Tarkastellaan tilannetta, kun pölkky on juuri irtoamassa maan pinnalta. Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, momenttien summa akselin A suhteen on $\Sigma M_\text{A} = -Fa + Gb = 0$.

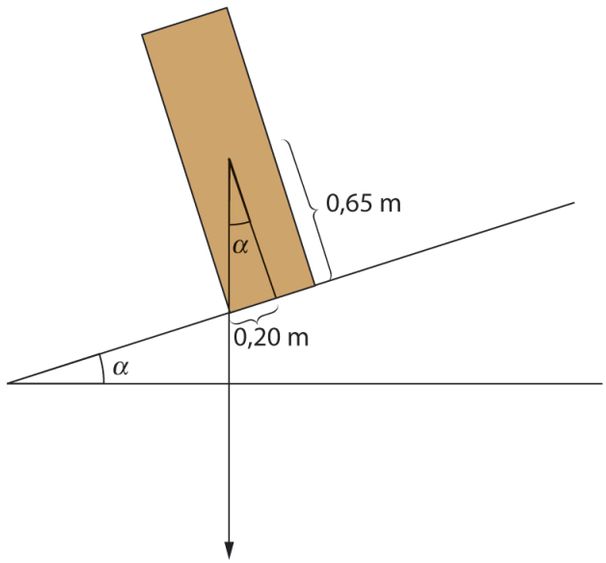
Yhtälöstä saadaan pienimmän työntövoiman suuruudeksi

$$F = \frac{Gb}{a} = \frac{144\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 0{,}211875\,\text{m}}{0{,}253\,\text{m}} \approx 1200\ \text{N}.$$

30. **a)** Paksumman pään massa on suurempi. Painopiste ei ole keskellä karttakeppiä, vaan lähempänä paksua päätä. Painopisteestä tuettuna karttakeppi pysyy tasapainossa. Silloin kepin päiden momenttien summa on nolla tukipisteen kautta kulkevan akselin suhteen. Lyhyempi eli paksumpi pää on raskaampi, koska tähän osaan kohdistuva paino on suurempi ja vääntövarsi näin ollen pienempi. Pidemmän osan vääntövarsi on suurempi, joten siihen kohdistuva paino on pienempi kuin lyhyemmän osan. Lyhyemmän osan massa on siis suurempi kuin pidemmän osan massa.

b) Ripusta kappale jostakin kohdasta. Kiinnitä luotilanka (lanka, jonka toisessa päässä on paino) ripustuspisteeseen ja piirrä luotilankaa käyttäen tästä pisteestä lähtien kappaleen pintaan suora viiva alas (luotisuora). Ripusta sitten kappale muistakin kohdista esimerkiksi kolme kertaa ja piirrä luotisuorat. Suorat leikkaavat kappaleen painopisteen kohdalla.

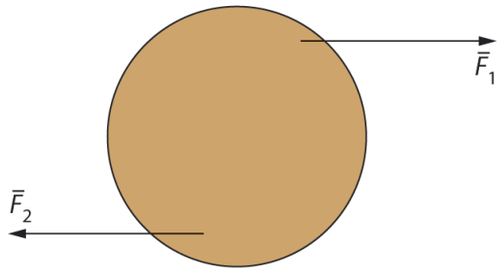
31.



Säiliö pysyy pystyssä, jos sen painopisteen kautta kulkeva luotisuora kulkee tukipinnan kautta. Rajatapauksessa saadaan yhtälö

$\tan\alpha = \dfrac{0{,}20\,\text{m}}{0{,}65\,\text{m}}$, josta kaltevuuskulma on $\alpha \approx 17°$.

32. **a)** Väite on väärin. Kappale on tasapainossa etenemisen suhteen, jos kokonaisvoima on nolla, ja pyörimisen suhteen, jos kappaleeseen kohdistuvien voimien momenttien summa on nolla. Esimerkiksi kuvan tilanteessa kokonaisvoima on nolla, mutta silti voimat aiheuttavat kappaleeseen sitä kääntämään pyrkivän momentin.

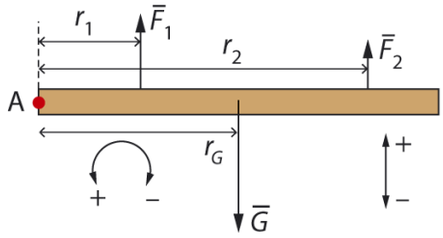


b) Väite on väärin. Jos kappaleeseen vaikuttavien momenttien summa on nolla, kappale ei pyöri tai se pyörii tasaisesti. Tällöin pyörimissuunnassa voiman momentti on yhtä suuri kuin vastusvoimien aiheuttama momentti. Jos esimerkiksi auton, polkupyörän tai junan pyörät pyörivät vakiona pysyvällä kulmanopeudella, pyörään kohdistuvien momenttien summa on nolla. Tällöin pyörimistä vastustavien voimien (laakereiden kitka ja vierimisvastus) momentti on yhtä suuri, mutta vaikuttaa vastakkaiseen kiertosuuntaan kuin pyörimistä ylläpitävien voimien momentit. Kun kappale vierii alas kaltevaa pintaa tasaisella nopeudella, pyörimistä ylläpitävä voima on pinnasta pyörään kohdistuva kitka.

33. Taulukossa on videolta poimittujen voimien suuruudet ja niiden vaikutussuorien etäisyydet tangon vasemmasta päästä, johon asetetaan kiertoakseli A. Tankoon kohdistuva paino on suuruudeltaan $G = mg = 0{,}657\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \approx 6{,}44519\ \text{N}$.

Merkitään taulukkoon mittaustulokset: G on tankoon kohdistuvan painon suuruus, F_1 ja F_2 ovat ripustuslankojen tankoon kohdistamien voimien suuruudet ja r_G, r_1 ja r_2 voimien vaikutussuorien etäisyydet kiertoakselista A.

	F_1 (N)	r_1 (m)	F_2 (N)	r_2 (m)	G (N)	r_G (m)
Mittaus 1	0,57	0,100	5,81	0,400	6,44519	0,375
Mittaus 2	2,91	0,100	3,49	0,600	6,44519	0,375
Mittaus 3	4,24	0,200	2,26	0,700	6,44519	0,375
Mittaus 4	4,75	0,250	1,76	0,700	6,44519	0,375



Tutkitaan onko tankoon kohdistuvien voimien summa $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli onko $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{G} = \overline{0}$.

Valitaan suunta ylös positiiviseksi, jolloin skalaariyhtälö on

$F_1 + F_2 - G = 0$.

Mittaus 1: $F_1 + F_2 - G = 0{,}57\ \text{N} + 5{,}81\ \text{N} - 6{,}44519\ \text{N} = -0{,}06519\ \text{N}$.

Mittaus 2: $F_1 + F_2 - G = 2{,}91\ \text{N} + 3{,}49\ \text{N} - 6{,}44519\ \text{N} = -0{,}04519\ \text{N}$.

Mittaus 3: $F_1 + F_2 - G = 4{,}24\ \text{N} + 2{,}26\ \text{N} - 6{,}44519\ \text{N} = 0{,}05481\ \text{N}$.

Mittaus 4: $F_1 + F_2 - G = 4{,}75\ \text{N} + 1{,}76\ \text{N} - 6{,}44519\ \text{N} = 0{,}06481\ \text{N}$.

Tankoon kohdistuvien voimien summa on mittaustarkkuuden rajoissa nolla.

Tutkitaan, onko voimien momenttien summa kiertoakselin A suhteen nolla eli onko $\sum M_\text{A} = 0$.

Valitaan kiertosuunta vastapäivään positiiviseksi, jolloin momenttiehto on $F_1 r_1 - G r_G + F_2 r_2 = 0$.

Mittaus1:

$F_1 r_1 - G r_G + F_2 r_2 = 0{,}57\ \text{N} \cdot 0{,}100\ \text{m} - 6{,}44519\ \text{N} \cdot 0{,}375\ \text{m} + 5{,}81\ \text{N} \cdot 0{,}400\ \text{m} = -0{,}0359463\ \text{Nm}$.

Mittaus 2:

$F_1 r_1 - G r_G + F_2 r_2 = 2{,}91\ \text{N} \cdot 0{,}100\ \text{m} - 6{,}44519\ \text{N} \cdot 0{,}375\ \text{m} + 3{,}49\ \text{N} \cdot 0{,}600\ \text{m} = -0{,}0319463\ \text{Nm}$.

Mittaus 3:

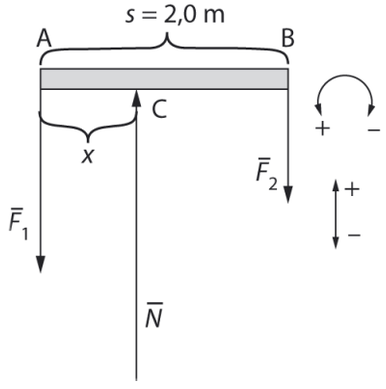
$F_1 r_1 - G r_G + F_2 r_2 = 4{,}24\ \text{N} \cdot 0{,}200\ \text{m} - 6{,}44519\ \text{N} \cdot 0{,}375\ \text{m} + 2{,}26\ \text{N} \cdot 0{,}700\ \text{m} = 0{,}0130538\ \text{Nm}$.

Mittaus 4:

$F_1 r_1 - G r_G + F_2 r_2 = 4{,}75\ \text{N} \cdot 0{,}250\ \text{m} - 6{,}44519\ \text{N} \cdot 0{,}375\ \text{m} + 1{,}76\ \text{N} \cdot 0{,}700\ \text{m} = 0{,}00255375\ \text{Nm}.$

Voimien momenttien summa on mittaustarkkuuden rajoissa nolla. Näin ollen jäykän kappaleen tasapainoehdot ovat voimassa.

34.



a) Voimien $\overline{F}_1$ ja $\overline{F}_2$ momentti akselin A suhteen on

$$M_\text{A} = F_1 \cdot 0 - F_2 \cdot s = -35\,\text{N} \cdot 2{,}0\,\text{m} = -70\,\text{Nm},$$

Vastaavasti momentti akselin B suhteen on

$$M_\text{B} = F_1 \cdot s + F_2 \cdot 0 = 55\,\text{N} \cdot 2{,}0\,\text{m} = 110\,\text{Nm}.$$

Voimien momentti akselin A suhteen on 70 Nm myötäpäivään ja akselin B suhteen 110 Nm vastapäivään.

b) Tasapainoehto pystysuunnassa on Newtonin II lain mukaan $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{N} = \overline{0}$. Kun suunta ylös valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $-F_1 - F_2 + N = 0$. Tukipisteessä C sauvaan kohdistuvan tukivoiman suuruus on

$N = F_1 + F_2 = 55\ \text{N} + 35\ \text{N} = 90\ \text{N}$ ja sen suunta on ylös.

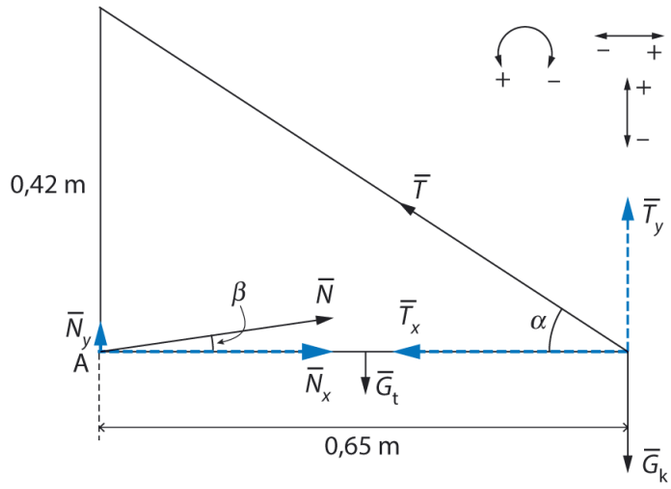
c) Sauva on tasapainossa, joten voimien momenttien vääntövaikutus on nolla minkä tahansa akselin suhteen.

Kun kiertosuunta vastapäivään on positiivinen, voimien momenttien summa akselin A suhteen on

$$\sum M_{\mathrm{A}} = Nx - F_2 s + F_1 \cdot 0 = 0.$$

Voiman $\overline{N}$ vaikutussuoran paikka eli sauvan tuen paikka akselista A lukien on $x = \dfrac{F_2 s}{N} = \dfrac{35\,\mathrm{N} \cdot 2{,}0\,\mathrm{m}}{90\,\mathrm{N}} \approx 0{,}78\,\mathrm{m}.$

35.



$\tan\alpha = \dfrac{0{,}42\,\mathrm{m}}{0{,}65\,\mathrm{m}}$, josta kulma alfa on $\alpha = 32{,}8687°$.

Tukitanko on tasapainossa, joten siihen kohdistuvien voimien summa on nolla eli $\Sigma \overline{F} = \overline{0}$ ja momenttien summa on nolla eli $\Sigma M = 0.$ Valitaan kiertosuunta vastapäivään positiiviseksi, jolloin momenttiyhtälö kiertoakselin A suhteen on $\Sigma M_A = l \cdot T_y - \dfrac{l}{2} \cdot G_{\mathrm{t}} - l \cdot G_{\mathrm{k}} = 0,$ joka jakamalla pituudella l yksinkertaistuu muotoon $T_y - \dfrac{G_{\mathrm{t}}}{2} - G_{\mathrm{k}} = 0.$ Koska $T_y = T \sin\alpha,$ vaijerin jännitysvoiman suuruus on

$$T = \frac{\frac{G_\mathrm{t}}{2} + G_\mathrm{k}}{\sin\alpha} = \frac{\left(\frac{m_\mathrm{t}}{2} + m_\mathrm{k}\right)g}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{\left(\frac{1{,}2\ \mathrm{kg}}{2} + 5{,}2\ \mathrm{kg}\right)\cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\sin 32{,}8687^\circ} = 104{,}839\ \mathrm{N} \approx 100\ \mathrm{N}$$

vaijerin suuntaan.

Valitaan suunta oikealle positiiviseksi. Koska vaakasuunnassa on voimassa ehto $\sum \overline{F}_x = \overline{0},$ saadaan yhtälö $N_x - T_x = 0,$ josta

$N_x = T_x = T\cos\alpha = 104{,}839\ \mathrm{N}\cdot\cos 32{,}8687^\circ \approx 88{,}0560\ \mathrm{N}.$

Valitaan suunta ylös positiiviseksi. Koska pystysuunnassa on voimassa ehto $\sum \overline{F}_y = \overline{0},$ saadaan yhtälö $N_y - G_\mathrm{t} - G_\mathrm{k} + T_y = 0,$ josta

$$N_y = G_\mathrm{t} + G_\mathrm{k} - T_y = \left(m_\mathrm{t} + m_\mathrm{k}\right)g - T\sin\alpha$$

$$= (1{,}2\ \mathrm{kg} + 5{,}2\ \mathrm{kg})\cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 104{,}839\ \mathrm{N}\cdot\sin 32{,}8687^\circ = 5{,}88623\ \mathrm{N}.$$

Seinän tankoon kohdistaman kokonaisvoiman suuruus on

$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = \sqrt{(88{,}0560\ \mathrm{N})^2 + (5{,}88623\ \mathrm{N})^2} \approx 88\ \mathrm{N}.$

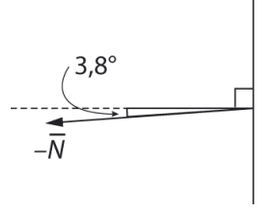
Voiman suunnan määrittävä kulma saadaan yhtälöstä

$\tan\beta = \frac{N_y}{N_x} = \frac{5{,}88623\ \mathrm{N}}{88{,}0560\ \mathrm{N}},$ josta saadaan kulmaksi $\beta \approx 3{,}8°.$

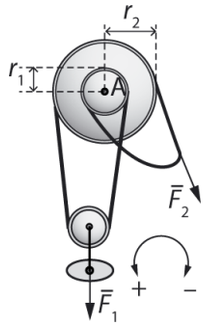
Kysytty tukitangon seinään kohdistama voima on voiman $\overline{N}$ vastavoima ja siten Newtonin III lain mukaan yhtä suuri, mutta suunnaltaan vastakkainen.

Vaijeriin BC kohdistuva jännitysvoiman suuruus on 100 N.

Tukitangon AB seinään kohdistaman voiman suuruus on 88 N ja suuntakulma seinän normaalin suhteen 3,8° (kuvio).



36. **a)**



Alemmasta pyörästä lähtevät ketjut kohdistavat ylempiin pyöriin voimat, joiden suuruus on $F_1/2$.

Tasapainotilanteessa ylempiin pyöriin kohdistuvien voimien momenttien summa pyörien keskipisteen suhteen on nolla $\Sigma M_A = 0$.

Valitaan kiertosuunta vastapäivään positiiviseksi, jolloin momenttiehto on $\frac{F_1}{2}r_2 - \frac{F_1}{2}r_1 - F_2 r_2 = 0$. Ratkaistaan yhtälöstä F_2:

$$F_2 r_2 = \frac{F_1}{2}r_2 - \frac{F_1}{2}r_1 = 0 \;\Big\| \cdot 2$$

$$F_2 = \frac{\frac{F_1}{2}(r_2 - r_1)}{r_2}$$

$$F_2 = \frac{r_2 - r_1}{2r_2}F_1$$

b) Tasapainoehdosta $F_2 = \frac{r_2 - r_1}{2r_2}F_1$ saadaan kuormaksi

$$F_1 = \frac{F_2}{\frac{r_2 - r_1}{2r_2}} = \frac{850\,\text{N}}{\frac{22\,\text{cm} - 15\,\text{cm}}{2 \cdot 22\,\text{cm}}} \approx 5{,}3\,\text{kN}.$$

Kuorman paino voi olla korkeintaan 5,3 kN.

37. **a)** Newtonin II lain mukaan $F = ma = 11\ \text{kg} \cdot 2{,}0\ \text{m/s}^2 = 22\ \text{N}$.

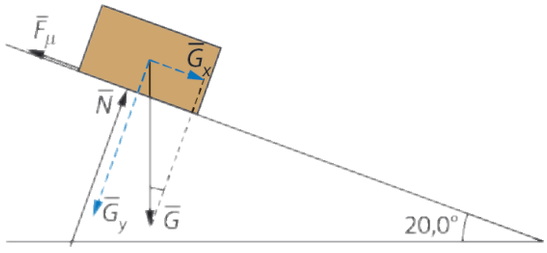
b) Voiman tekemä työ on $W = Fs = 22\ \text{N} \cdot 5{,}0\ \text{m} = 110\ \text{J}$.

38. **a)** Gravitaatiovoiman (painon) $\overline{G}$ komponentti liikkeen suunnassa on
$G_x = G\sin 20{,}0° = mg\sin 20{,}0° = 13\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \sin 20{,}0° = 43{,}6178\ \text{N}$.

Gravitaatiovoiman tekemä työ on

$W_g = G_x s = 43{,}6178\ \text{N} \cdot 2{,}0\ \text{m} = 87{,}2356\ \text{J} \approx 87\ \text{J}$.

b) Kitkan suuruus on $F = \mu N$ ja suunta tasoa ylöspäin. Tukivoiman suuruus N on sama kuin gravitaatiovoiman pintaa vastaan kohtisuora komponentti eli $N = G_y = mg\cos 20{,}0° = 13\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \cos 20{,}0° = 119{,}839\ \text{N}$. Koska kitka vaikuttaa vastakkaiseen suuntaan kuin mihin laatikko liikkuu, sen tekemä työ on negatiivinen. Kitkan tekemä työ on
$W_\mu = -F_\mu s = -\mu N s = -0{,}22 \cdot 119{,}839\ \text{N} \cdot 2{,}0\ \text{m} = -52{,}7292\ \text{J} \approx -53\ \text{J}$.



39. **a)** Työ saadaan kuvasta graafisella integroinnilla eli kuvaajan ja x-akselin välissä olevan alueen fysikaalisena pinta-alana. Kun kappale liikkuu kohdasta $x = 0\ \text{m}$ kohtaan $x = 3{,}0\ \text{m}$, voima tekee työn

$$W = \frac{1}{2} \cdot 1{,}0\ \text{m} \cdot 4{,}0\ \text{N} + 2\ \text{m} \cdot 4{,}0\ \text{N} = 10\ \text{J}.$$

b) Kun kappale liikkuu kohdasta $x = 3{,}0\ \text{m}$ kohtaan $x = 6{,}0\ \text{m}$, voima tekee työn

$$W = \frac{1}{2}\cdot 1{,}0\ \text{m}\cdot 4{,}0\ \text{N} + \frac{1}{2}\cdot 1{,}0\ \text{m}\cdot(-4{,}0\ \text{N}) + 1{,}0\ \text{m}\cdot(-4{,}0\ \text{N}) = -4{,}0\ \text{J}.$$

c) Mekaniikan työ-energiaperiaatteen mukaan kappaleen liike-energian muutos on yhtä suuri kuin kappaleeseen kohdistuvan kokonaisvoiman tekemä työ. Koska kappaleen nopeus on alussa nolla, saadaan yhtälö

$$W = \Delta E_\text{k} = E_\text{k,l} - E_\text{k,a} = \frac{1}{2}mv_\text{l}^2 - 0 = \frac{1}{2}mv_\text{l}^2,$$

josta ratkaistaan nopeus lopussa:

$$v_\text{l} = \sqrt{\frac{2W}{m}}.$$

Kun kappale siirtyy kohdasta $x = 0$ m kohtaan $x = 3{,}0$ m, voima tekee tehtävän a-kohdan työn 10 J, joten kappaleen liike-energia pisteessä $x = 3{,}0$ m on 10 J ja nopeus

$$v_\text{l} = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10\ \text{J}}{4{,}0\ \text{kg}}} = 2{,}2\ \ \text{m/s}.$$

d) Kun kappale siirtyy kohdasta $x = 0$ m kohtaan $x = 6{,}0$ m, voima tekee tehtävän a- ja b-kohtien mukaan työn 10 J – 4,0 J = 6,0 J, joten kappaleen liike-energia pisteessä $x = 6{,}0$ m on 6,0 J ja nopeus

$$v_\text{l} = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6{,}0\ \text{J}}{4{,}0\ \text{kg}}} \approx 1{,}7\ \ \text{m/s}.$$

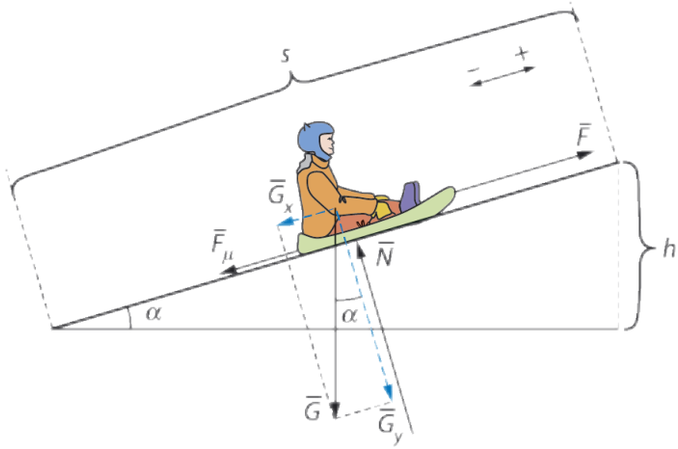
40. **a)** Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan $E_\text{p,a} + W = E_\text{p,l}$, jossa $E_\text{p,a}$ on potentiaalienergia alussa, $E_\text{p,l}$ on potentiaalienergia lopussa ja W on ei-konservatiivisten voimien – tässä tapauksessa kitkan – tekemä työ. Liike-energian voimme olettaa olleen alussa ja lopussa yhtä suuret. Kuvan suorakulmaisesta kolmiosta saadaan $\sin\alpha = \frac{h}{s}$ eli kelkan kulkema matka

on $s = \dfrac{h}{\sin\alpha}$. Kun koira vetää kelkkaa ja lasta, kelkkaan kohdistuva voima tekee työtä, joka on yhtä suuri kuin kelkan ja lapsen potentiaalienergian muutos ja kitkan kelkkaan tekemä työ eli

$$W_{\text{koira}} = \left(E_{\text{p,l}} - E_{\text{p,a}}\right) + W = mgh + F_\mu s = mgh + \mu N s$$

$$= mgh + \mu mg\cos\alpha \cdot \frac{h}{\sin\alpha} = mgh(1 + \mu\cos\alpha \cdot \frac{1}{\sin\alpha})$$

$$= 18\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 8{,}0\,\text{m} \cdot (1 + 0{,}20 \cdot \frac{\cos 19°}{\sin 19°}) \approx 2{,}2\,\text{kJ}.$$



b) Reitistä riippumatta potentiaalienergian muutos on sama. Kitkan voittamiseksi tehty työ kasvaa loivempia reittejä valittaessa, koska matka pitenee.

41. Liike-energia saadaan yhtälöstä $E_{\text{k}} = \dfrac{1}{2}mv^2$. Koska kappaleiden nopeudet ovat samat ja raskaamman kappaleen massa on kolme kertaa niin suuri kuin kevyemmän kappaleen massa, on raskaamman kappaleen liike-energia kolminkertainen kevyemmän kappaleen liike-energiaan verrattuna eli 12 J. Oikea vastaus on a.

42. Mekaniikan työ-energiaperiaatteen mukaan liike-energian muutos on yhtä suuri kuin kappaleeseen vaikuttavan kokonaisvoiman tekemä työ. Koska kappale oli aluksi levossa eli liike-energia oli alussa nolla, saadaan yhtälö $\frac{1}{2}mv^2 = W$, josta saadaan kappaleen massaksi

$$m = \frac{2W}{v^2} = \frac{2 \cdot 23 \text{ J}}{\left(3{,}4 \text{ m/s}\right)^2} = 3{,}97924 \text{ kg}.$$

Kun työ on $W = 46$ J, saadaan työ-energiaperiaatteesta $\frac{1}{2}mv^2 = W$ kappaleen saamaksi nopeudeksi

$$v = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 46 \text{ J}}{3{,}97924 \text{ kg}}} \approx 4{,}8 \text{ m/s}.$$

43. Liike-energia on $E_\text{k} = \frac{1}{2}mv^2$, joten liike-energioiden suhde on

$$\frac{E_\text{k,juoksu}}{E_\text{k,kävely}} = \frac{\frac{1}{2}mv^2{}_\text{juoksu}}{\frac{1}{2}mv^2{}_\text{kävely}} = \left(\frac{v_\text{juoksu}}{v_\text{kävely}}\right)^2 = \left(\frac{6{,}0 \text{ m/s}}{2{,}0 \text{ m/s}}\right)^2 = 9{,}0.$$

Juoksevan ihmisen liike-energia on yhdeksänkertainen kävelevän ihmisen liike-energiaan verrattuna.

44. Liike-energian yhtälöstä $E_\text{k} = \frac{1}{2}mv^2$ saadaan gepardin huippunopeudeksi

$$v = \sqrt{\frac{2E_\text{k}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 42 \cdot 10^3 \text{ J}}{65 \text{ kg}}} = 35{,}9487 \text{ m/s}.$$

Jos gepardi juoksee 100 m maksiminopeudellaan, kuluu siihen aikaa

$$t = \frac{s}{v} = \frac{100 \text{ m}}{35{,}9487 \text{ m/s}} \approx 2{,}8 \text{ s}.$$

45. Työ-energiaperiaatteen mukaan vastusvoimien tekemä työ on yhtä suuri kuin pulkan liike-energian muutos, $W = \frac{1}{2}mv_\text{l}^2 - \frac{1}{2}mv_\text{a}^2$. Vastusvoimien $\vec{F}$ tekemä työ on $W = -Fs$, jossa s on pulkan ennen pysähtymistään kulkema matka. Huomaa, että työ on negatiivinen, koska voima vaikuttaa päinvastaiseen suuntaan kuin mihin pulkka liikkuu. Nopeus alussa on $v_\text{a} = 3{,}0$ m/s ja lopussa $v_\text{l} = 0$ m/s. Pulkan kulkema matka on silloin

$$s = \frac{W}{F} = \frac{\frac{1}{2}mv_\text{l}^2 - \frac{1}{2}mv_\text{a}^2}{F} = \frac{0 - \frac{1}{2}\cdot 48\ \text{kg}\cdot(3{,}0\ \text{m/s})^2}{-32\ \text{N}} \approx 6{,}8\ \text{m}.$$

Oikea vaihtoehto on b.

46. **a)** Voiman suuruus voidaan ratkaista Newtonin II laista $a = \frac{F}{m}$ ja tasaisesti kiihtyvää liikettä kuvaavista yhtälöistä

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2,$$
$$v = v_0 + at.$$

Väli 0…150 m:

$x_0 = 0$, $v_0 = 0$. Tällöin jälkimmäisestä yhtälöstä saadaan $t = \frac{v}{a}$. Sijoitetaan tämä ensimmäiseen yhtälöön:

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{v^2}{2a},$$

josta saadaan kiihtyvyydeksi

$$a = \frac{v^2}{2x} = \frac{\left(\frac{40}{3{,}6}\ \text{m/s}\right)^2}{2\cdot 150\ \text{m}} = 0{,}411523\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Autoon vaikuttava kokonaisvoima on Newtonin II lain perusteella

$F = ma = 1150\ \text{kg}\cdot 0{,}411523\ \text{m/s}^2 = 473{,}251\ \text{N} \approx 470\ \text{N}$ liikkeen suuntaan.

Väli 150…350 m:

Auton nopeus on vakio, joten kokonaisvoima on nolla, $F = 0$ N.

Väli 350…450 m:

Nyt $v = 20$ km/h, $v_0 = 40$ km/h, $x - x_0 = 100$ m. Matkaan kuluva aika on $t = \dfrac{v - v_0}{a}$. Sijoitetaan se yhtälöön $x = x_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2} a t^2$, jolloin

$$\begin{aligned} x - x_0 &= v_0 \cdot \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2 \\ &= \frac{v_0 v - {v_0}^2}{a} + \frac{v^2 - 2 v_0 v + {v_0}^2}{2a} \\ &= \frac{1}{2a} \left(2 v_0 v - 2 {v_0}^2 + v^2 - 2 v_0 v + {v_0}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2a} \left(v^2 - {v_0}^2 \right), \end{aligned}$$

josta saadaan kiihtyvyydeksi

$$a = \frac{v^2 - {v_0}^2}{2\left(x - x_0\right)} = \frac{\left(\dfrac{20}{3{,}6} \text{ m/s} \right)^2 - \left(\dfrac{40}{3{,}6} \text{ m/s} \right)^2}{2 \cdot \left(450 \text{ m} - 350 \text{ m} \right)} = -0{,}462963 \text{ m/s}^2.$$

Kokonaisvoima on silloin

$$F = ma = 1150 \text{ kg} \cdot \left(-0{,}462963 \text{ m/s}^2 \right) = -532{,}407 \text{ N} \approx -530 \text{ N}.$$

Voiman suunta on liikkeen suuntaa vastaan.

b) Tapa 1: Kokonaisvoiman tekemä työ voidaan laskea työn yhtälöstä $W = Fs$ eli tässä $W = Fx$:

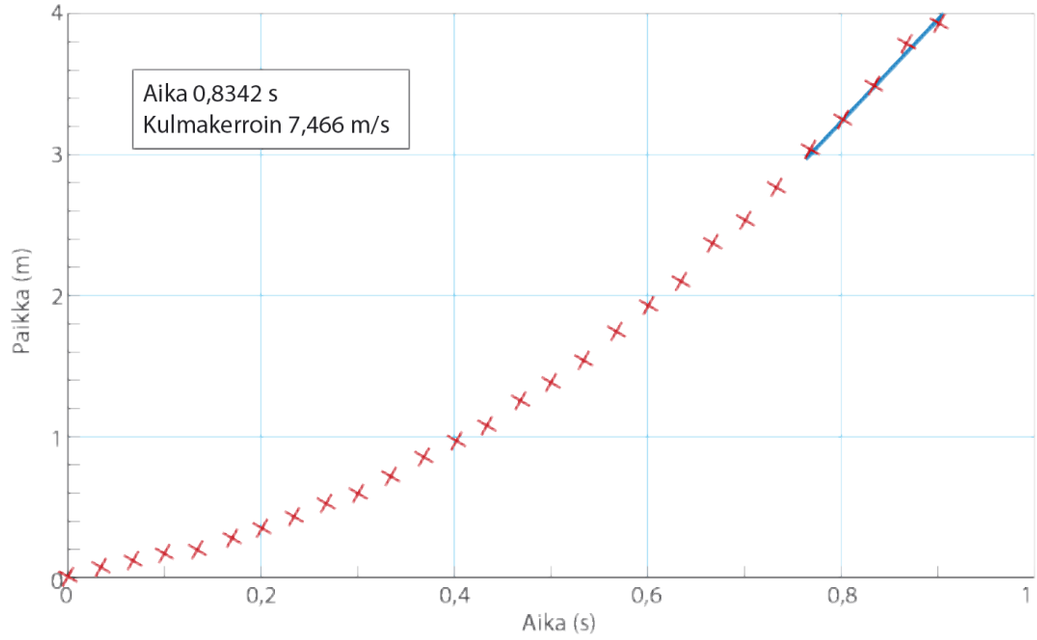
$$W = Fx = 473{,}251 \text{ N} \cdot 150 \text{ m} + 0 \text{ N} \cdot 200 \text{ m} + \left(-532{,}407 \text{ N} \right) \cdot 100 \text{ m} \approx 18 \text{ kJ}.$$

Tapa 2: Työ-energiaperiaatteen mukaan $W = \Delta E_\text{k}$, joten

$$W = E_{\mathrm{k,l}} - E_{\mathrm{k,a}} = \frac{1}{2}mv_l^{\,2} - \frac{1}{2}mv_{\mathrm{a}}^{\,2} = \frac{1}{2}\cdot 1150\ \mathrm{kg}\cdot\left(\frac{20}{3{,}6}\ \mathrm{m/s}\right)^2 - 0 \approx 18\ \mathrm{kJ}.$$

47. **a)** Mekaaninen energia ei säily, sillä pallo ei palaa lähtökorkeuteensa lattiasta pompattuaan.

b) Pallon paikan kuvaajasta tangentin avulla määritetty pallon nopeus sen osuessa maahan on 7,5 m/s.



c) Pallon liike-energia sen osuessa lattiaan on

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}12\,\mathrm{kg}\cdot(7{,}466\,\mathrm{m/s})^2 = 3{,}34447\,\mathrm{J}.$$

Koska pallon pudotuskorkeus 4,0 m, pallon potentiaalienergia terassin lattian suhteen on alussa

$E_{\mathrm{p}} = mgh = 0{,}12\ \mathrm{kg}\cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}\cdot 4{,}0\ \mathrm{m} = 4{,}7088\ \mathrm{J}.$

Alussa liike-energia on nolla ja lopussa potentiaalienergia on nolla. Mekaniikan energiaperiaatteesta $E_{\mathrm{k,a}} + E_{\mathrm{p,a}} + W = E_{\mathrm{k,l}} + E_{\mathrm{p,l}}$ saadaan silloin yhtälö $0 + E_{\mathrm{p,a}} + W = E_{\mathrm{k,l}} + 0$, josta saadaan ilmanvastuksen tekemäksi työksi $W = E_{\mathrm{k,l}} - E_{\mathrm{p,a}} = 3{,}34447\ \mathrm{J} - 4{,}7088\ \mathrm{J} \approx -1{,}4\ \mathrm{J}$.

48. **a)** Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan $E_{p,a} + E_{k,a} + W = E_{p,l} + E_{k,l}$, jossa $W = Fs$ on liikevastusten tekemä työ. Valitaan auton painopisteen asema pystysuunnassa potentiaalienergian nollatasoksi. Auto pysähtyy lopuksi, joten mekaniikan energiaperiaate on $0 + E_{k,a} + Fs = 0 + 0$, kun s on jarrutusmatka. Liikevastusvoimat jarrutuksen aikana ovat

$$F = -\frac{E_{k,a}}{s} = -\frac{\frac{1}{2}mv^2}{s} = -\frac{\frac{1}{2}\cdot 1200\ \text{kg}\cdot\left(\frac{79}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{96\ \text{m}} = -3009{,}74\ \text{N} \approx -3{,}0\ \text{kN}.$$

Voiman suunta on liikesuuntaa vastaan.

b) Mekaniikan energiaperiaate $E_{p,a} + E_{k,a} + W = E_{p,l} + E_{k,l}$ kirjoitetaan a-kohdan perusteella nopeammalle autolle: $0 + E_{k,a} + Fs = E_{k,l}$ eli $\frac{1}{2}mv_a^2 + Fs = \frac{1}{2}mv_l^2$. Yhtälö sievenee muotoon $mv_l^2 = mv_a^2 + 2Fs$.
Auton nopeus törmäyshetkellä on

$$v_l = \sqrt{\frac{mv_a^2 + 2Fs}{m}} = \sqrt{\frac{1200\ \text{kg}\cdot\left(\frac{104}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 2\cdot(-3009{,}74\ \text{N})\cdot 96\ \text{m}}{1200\ \text{kg}}}$$

$$= 18{,}79\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 68\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

49. Molemmissa tapauksissa loppunopeus on nolla. Jarruttavan voiman $\overline{F}$ tekemä työ on liike-energian muutos eli $W = 0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}mv^2$.

Toisaalta voiman tekemä työ on $W = -F\Delta x$, jossa etumerkki johtuu siitä, että voiman suunta on vastakkainen siirtymän suuntaan nähden. Saadaan yhtälö $-F\Delta x = -\frac{1}{2}mv^2$ eli $\Delta x = \frac{m}{2F}v^2$.

Koska auton massa m ja jarruttava voima F ovat molemmissa tapauksissa samat, havaitaan että jarrutusmatka on verrannollinen nopeuden toiseen potenssiin. Silloin

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{{v_2}^2}{{v_1}^2} = \frac{\left(120\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2}{\left(60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2} = 4 \text{ eli } \Delta x_2 = 4\Delta x_1 = 4 \cdot 20\ \text{m} = 80\ \text{m}.$$

Jarrutusmatka on 80 m.

50. Kun ilmanvastus voidaan jättää pienenä huomiotta, saadaan mekaniikan energiaperiaatteesta $E_{\text{k,a}} + E_{\text{p,a}} + W = E_{\text{k,l}} + E_{\text{p,l}}$ yhtälö $E_{\text{k,a}} + E_{\text{p,a}} = E_{\text{k,l}} + E_{\text{p,l}}$. Valitaan maanpinta potentiaalienergian nollatasoksi, jolloin $E_{\text{p,l}} = 0$ ja $E_{\text{p,a}} = mgh$, jossa $h = 150$ m.

a) Koska $v_{\text{a}} = 0$, yhtälö $E_{\text{k,a}} + E_{\text{p,a}} = E_{\text{k,l}} + E_{\text{p,l}}$ tulee muotoon $0 + mgh = \frac{1}{2}m{v_{\text{l}}}^2 + 0$, josta saadaan jakoavaimen vauhdiksi sen osuessa maahan

$$v_{\text{l}} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 75\ \text{m}} \approx 38\ \text{m/s}.$$

b) Nyt jakoavaimella on alkuvauhti, joten yhtälö $E_{\text{k,a}} + E_{\text{p,a}} = E_{\text{k,l}} + E_{\text{p,l}}$ tulee muotoon $\frac{1}{2}m{v_{\text{a}}}^2 + mgh = \frac{1}{2}m{v_{l}}^2 + 0$. Tästä saadaan jakoavaimen vauhdiksi sen osuessa maahan

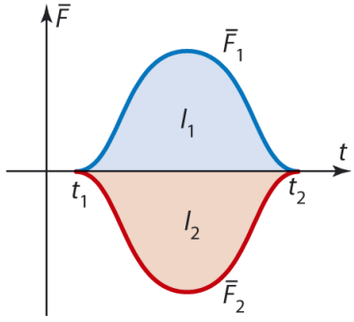
$$v_{\text{l}} = \sqrt{{v_{\text{a}}}^2 + 2gh} = \sqrt{\left(2{,}4\ \text{m/s}\right)^2 + 2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 75\ \text{m}} \approx 38\ \text{m/s}.$$

c) Nyt $v_{\text{a}} = 5{,}6$ m/s, joten jakoavaimella on maahan osuessaan vauhti

$$v_{\text{l}} = \sqrt{{v_{\text{a}}}^2 + 2gh} = \sqrt{\left(5{,}6\ \text{m/s}\right)^2 + 2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 75\ \text{m}} \approx 39\ \text{m/s}.$$

51. **a)** Newtonin III lain eli voiman ja vastavoiman lain mukaan kahden kappaleen 1 ja 2 vuorovaikutuksessa kumpikin kappale kohdistaa toiseen kappaleeseen yhtä suuren voiman. Voimat ovat vastakkaissuuntaisia.

b)



c) Voiman ja vastavoiman lain mukaan voimat ovat joka hetki yhtä suuria ja vuorovaikutuksen kestoaika on kummallekin kappaleelle sama eli $t_2 - t_1$. Näin ollen kumpaankin vaunuun kohdistuvan voiman impulssi on yhtä suuri.

d) Liikemäärä säilyy törmäyksessä, joten liikemäärän muutos on nolla.

52. Aluksen ja luotaimen yhteenlaskettu massa on m ja pelkän luotaimen massa 0,15 m.

Alus ja luotain muodostavat eristetyn systeemin. Irtoamistapahtumassa kokonaisliikemäärä säilyy eli $m\bar{v}_0 = 0{,}15m\bar{v}_{\text{luotain}} + 0{,}85m\bar{v}_{\text{alus}}$.

Molempien kappaleiden liikesuunta säilyy alkuperäisenä. Valitaan liikkeen suunta positiiviseksi, joten saadaan skalaariyhtälö $mv_0 = 0{,}15mv_{\text{luotain}} + 0{,}85mv_{\text{alus}}$. Massa supistuu yhtälöstä, jolloin yhtälö saadaan muotoon $0{,}85v_{\text{alus}} = v_0 - 0{,}15v_{\text{luotain}}$. Aluksen ja luotaimen alkunopeus on $v_0 = 2100$ km/h ja luotaimen nopeus irtoamisen jälkeen $v_{\text{luotain}} = v_{\text{alus}} - 500$ km/h. Ratkaistaan aluksen nopeus irtoamisen jälkeen:

$$0{,}85v_{\text{alus}} = 2100\ \text{km/h} - 0{,}15\left(v_{\text{alus}} - 500\ \text{km/h}\right)$$
$$0{,}85v_{\text{alus}} = 2100\ \text{km/h} - 0{,}15v_{\text{alus}} + 0{,}15 \cdot 500\ \text{km/h}$$
$$0{,}85v_{\text{alus}} + 0{,}15v_{\text{alus}} = 2100\ \text{km/h} + 0{,}15 \cdot 500\ \text{km/h}.$$

Aluksen nopeus irtoamisen jälkeen on

$$v_{\text{alus}} = 2100\,\text{km/h} + 0{,}15 \cdot 500\,\text{km/h} \approx 2200\,\text{km/h}.$$

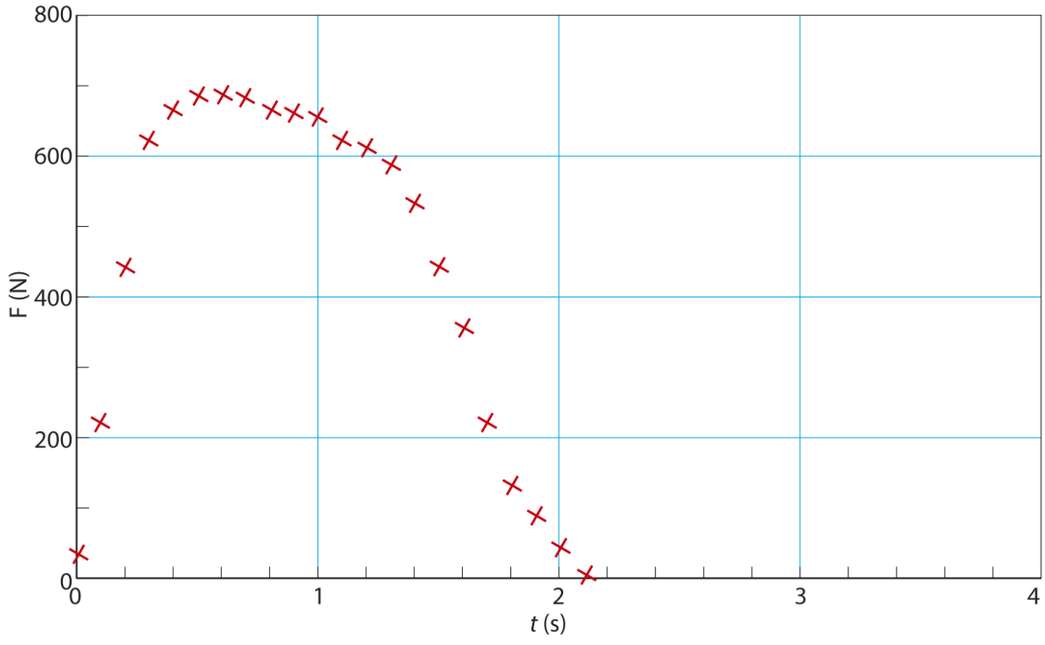
53. Aluksen nopeuden muutos saadaan impulssiperiaatteesta $I = F\Delta t = m\Delta v$, josta

$$\Delta v = \frac{F\Delta t}{m} = \frac{1{,}0\,\text{kN} \cdot 60{,}0\,\text{s}}{10000\,\text{kg}} = 6{,}0\ \text{m/s}.$$

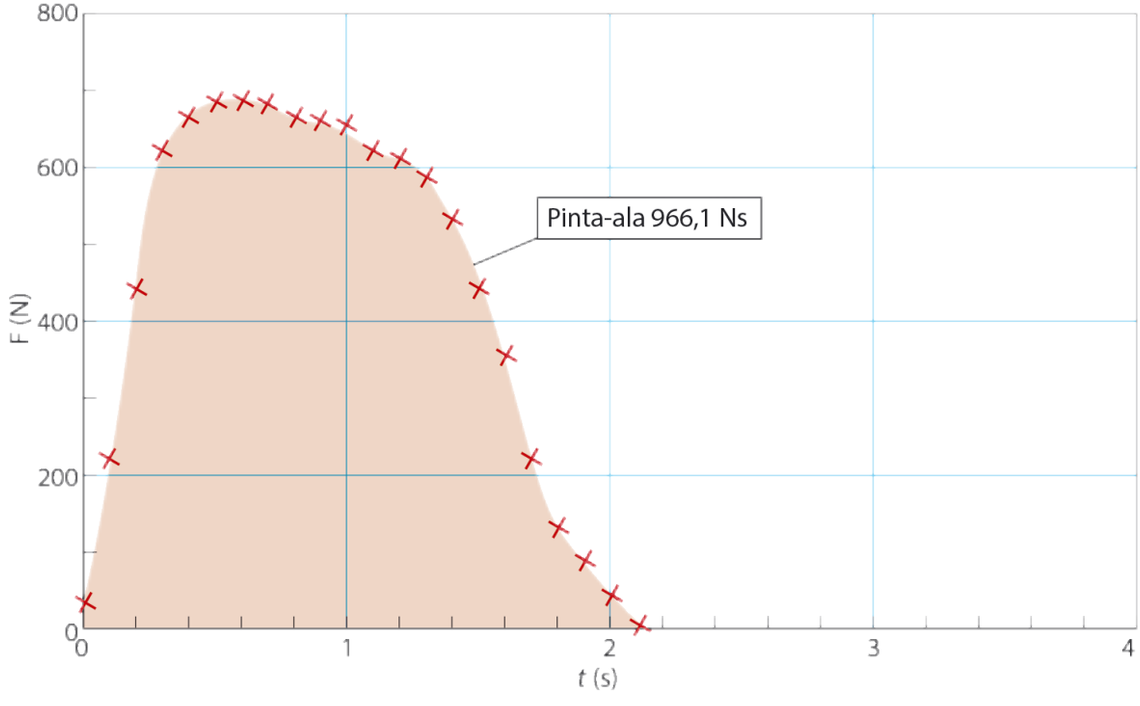
54. **a)** Mittaustulokset taulukoituna ovat

Aika (s)	Voima (N)
0,009	35
0,1	222
0,2	445
0,3	623
0,4	667
0,5	689
0,6	689
0,7	685
0,8	667
0,9	663
1,0	658
1,1	623
1,2	614
1,3	587
1,4	534
1,5	445
1,6	356
1,7	222
1,8	133
1,9	89
2,0	44
2,1	0

Nämä viedään mittausohjelmaan, joka esittää tulokset *t,F*-koordinaatistossa:



Voiman impulssi on mittausarvojen ja *t*-akselin väliin jäävän alueen fysikaalinen pinta-ala. Käytetään mittausohjelman integrointitoimintoa pinta-alan määrittämiseksi:



Impulssiksi saadaan $I = 966{,}1\ \text{Ns} \approx 970\ \text{Ns}$.

b) Impulssiperiaatteen mukaan $\overline{I} = \Delta\overline{p} = m\Delta\overline{v}$. Oletetaan, että liikkeen suunta ei muutu, jolloin saadaan skalaariyhtälö $\Delta v = \frac{I}{m} = \frac{966{,}1\ \text{Ns}}{3{,}4\ \text{kg}} \approx 280\ \text{m/s}$. Rakettimoottori antaa alussa levossa olevalle raketille nopeuden 280 m/s.

55. Törmäyksessä liikemäärä säilyy: $m_1\overline{v}_1 + m_2\overline{v}_2 = (m_1 + m_2)\overline{u}$, jossa $\overline{u}$ on puukappaleen ja luodin yhteinen nopeus törmäyksen jälkeen. Kun luodin suunta on positiivinen, saadaan skalaariyhtälö
$m_1 v_1 + m_2 \cdot 0\ \text{m/s} = (m_1 + m_2)u$, josta seuraa yhtälö

$$v_1 = \frac{(m_1 + m_2)u}{m_1}.$$

Työ-energiaperiaatteen mukaan kappaleen liike-energian muutos on yhtä suuri kuin kitkan tekemä työ eli $\Delta E_k = W_\mu$, jossa $W_\mu = -F_\mu s = -\mu Ns$

$= -\mu(m_1 + m_2)gs$. Liike-energia lopussa eli puukappaleen pysähtyessä on nolla, joten saadaan yhtälö $-\frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 = -\mu(m_1 + m_2)gs$. Tästä saadaan puukappaleen ja luodin törmäyksen jälkeiseksi nopeudeksi

$u = \sqrt{\frac{2\mu(m_1 + m_2)gs}{m_1 + m_2}} = \sqrt{2\mu gs}$. Sijoitetaan tämä luodin nopeuden $v_1 = \frac{(m_1 + m_2)u}{m_1}$ yhtälöön, jolloin saadaan

$$v_1 = \frac{(m_1 + m_2)u}{m_1} = \frac{(m_1 + m_2)\sqrt{2\mu gs}}{m_1}$$

$$= \frac{(0{,}0020\,\text{kg} + 0{,}250\,\text{kg}) \cdot \sqrt{2 \cdot 0{,}16 \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 0{,}020\,\text{m}}}{0{,}0020\,\text{kg}} \approx 32\,\text{m/s}.$$

56. **a)** Koska kajakin ja siinä olevien henkilöiden ja repun muodostamaan systeemiin ei vaikuta ulkoisia voimia, systeemin kokonaisliikemäärä

säilyy. Alussa liikemäärä on nolla, joten se täytyy olla nolla myös silloin kun reppu lentää ilmassa.

Kajakin, Matin ja Maijan yhteisen liikemäärän pitää kumota repun liikemäärä eli sen on oltava yhtä suuri ja vastakkaismerkkinen kuin repun liikemäärä. Kajakin nopeus ei siis voi olla nolla ja siksi kajakki lähtee liikkeelle.

b) Valitaan repun liikkeen suunta positiiviseksi. Liikemäärän säilyminen vastaa silloin skalaariyhtälöä

$$m_{\text{reppu}} v_{\text{reppu}} + \left(m_{\text{Matti}} + m_{\text{Maija}} + m_{\text{kajakki}} \right) v = 0,$$

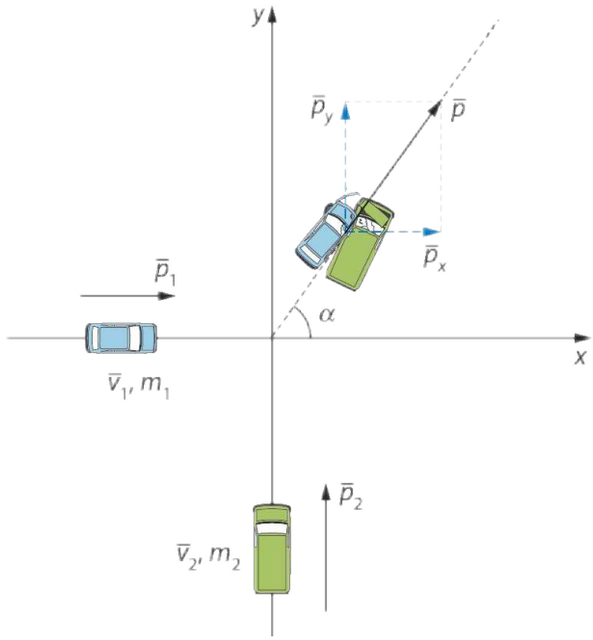
jossa v on kajakin nopeus. Ratkaistaan tästä kajakin, Matin ja Maijan yhteinen nopeus v:

$$v = -\frac{m_{\text{reppu}} v_{\text{reppu}}}{m_{\text{Matti}} + m_{\text{Maija}} + m_{\text{kajakki}}} = -\frac{14\ \text{kg} \cdot 3{,}1\ \text{m/s}}{68\ \text{kg} + 51\ \text{kg} + 28\ \text{kg}} \approx -0{,}30\ \text{m/s}.$$

Kajakki siis kulkee vauhdilla –0,30 m/s päinvastaiseen suuntaan kuin mihin reppu lentää.

c) Koska systeemin kokonaisliikemäärä säilyy, pitää kokonaisliikemäärän olla lopussa sama kuin alussa eli nolla. Koska kajakissa olevat Matti, Maija ja reppu eivät lopussa liiku kajakin suhteen, on niillä ja kajakilla sama nopeus. Tämän nopeuden pitää olla nolla, jotta kokonaisliikemäärä olisi nolla.

57.



Oletetaan, että auto 1 liikkuu pitkin *x*-akselia ja auto 2 pitkin *y*-akselia, kumpikin positiiviseen suuntaan, ja että autot törmäävät origossa. Autot tarttuvat törmäyksessä yhteen, joten törmäys on kimmoton. Kokonaisliikemäärä säilyy eli $m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 = (m_1 + m_2)\bar{u}$. Liikemäärä säilyy myös *x*- ja *y*-suunnissa komponenteittain:

$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u_x$ ja $m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u_y$.

Ratkaistaan nopeuden u komponentit:

$$u_x = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{1700\,\text{kg} \cdot 33\,\text{km/h}}{1700\,\text{kg} + 2500\,\text{kg}} = 13{,}3657\ \text{km/h}$$ ja

$$u_y = \frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{2500\,\text{kg} \cdot 54\,\text{km/h}}{1700\,\text{kg} + 2500\,\text{kg}} = 32{,}1429\ \text{m/s}.$$

Autojen yhteinen nopeus törmäyksen jälkeen on

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{(13{,}3657\ \text{km/h})^2 + (32{,}1429\ \text{km/h})^2} \approx 35\ \text{km/h}.$$

Suuntakulma α positiivisen x-akselin suhteen saadaan trigonometrian avulla:

$\tan\alpha = \dfrac{u_y}{u_x} = \dfrac{32{,}1429\ \text{km/h}}{13{,}3657\ \text{km/h}}$, josta saadaan kulmalle arvo $\alpha \approx 67°$.

58. **a)** Matkustajan liikemäärän muutos on $\Delta\overline{p} = m\Delta\overline{v}$. Voiman $\overline{F}$ impulssi matkustajaan on yhtä suuri kuin matkustajan liikemäärän muutos eli

$\overline{F}\Delta t = m\Delta\overline{v}$, joten $\overline{F} = \dfrac{m\Delta\overline{v}}{\Delta t}$ eli voima on suoraan verrannollinen nopeuden muutokseen ja kääntäen verrannollinen voiman vaikutusaikaan. Voiman $\overline{F}$ vaikutusaika Δt matkustajaan on likimain yhtä suuri molemmissa autoissa. Matkustajan nopeuden muutos $\Delta\overline{v}$ kevyessä autossa on suurempi kuin raskaassa autossa, joten kevyemmässä autossa matkustajaan kohdistuu suurempi voima (esim. turvavyön voima), joka aiheuttaa pahempia ruhjeita. Lisäksi raskaat autot ovat rakenteeltaan vahvempia kuin kevyet autot, ja siksi matkustajat ovat niissä paremmin suojattuja.

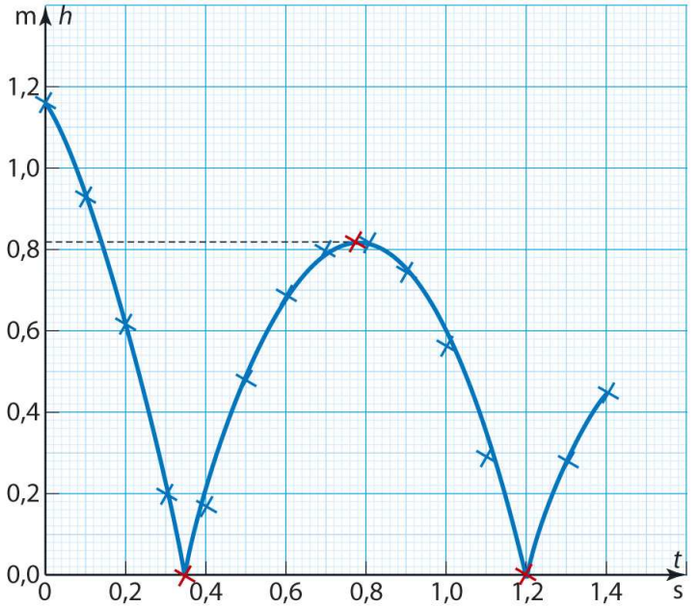
b) Jos turvavyötä ei ole, matkustaja jatkaa jatkavuuden lain mukaan liikettään ja törmää edessään oleviin esteisiin. Tällaisessa törmäyksessä pysäyttävä voima kohdistuu usein pienelle alueelle, jolloin syntyy vammoja. Lisäksi törmäyksen vaikutusaika on pieni, joten pysäyttävä voima on suuri. Turvavyö jakaa voiman $\overline{F}$ vaikutuksen laajemmalle alueelle A, jolloin kehoon voiman vaikutuskohdassa kohdistuva paine $p = \dfrac{F}{A}$ pienenee. Lisäksi turvavyöt joustavat, mikä pidentää voiman vaikutusaikaa ja siten voima pienenee. Nämä molemmat tekijät vähentävät vammoja. Matkustajan törmätessä turvatyynyyn voima jakautuu laajalle alueelle, jolloin kehoon kohdistuva paine tyynyn

kohdalla jää pieneksi. Myös turvatyynyt joustavat. Molemmat seikat vähentävät vammautumisriskiä.

VANHOJA YLIOPPILASTEHTÄVIÄ

S2016/2

a) Pallon etäisyys lattiasta ajan funktiona:



b) Jos oletetaan, että pallo pomppii pystysuorassa suunnassa, sen nopeus on nolla ensimmäisen pompun lakipisteessä ja kohdissa, joissa se osuu lattiaan. Nämä kohdat on merkitty kuvaajaan punaisilla rasteilla. Jos pallo liikkuu pomppiessaan myös vaakasuorassa suunnassa, sen nopeus ei ole missään kohdassa nolla.

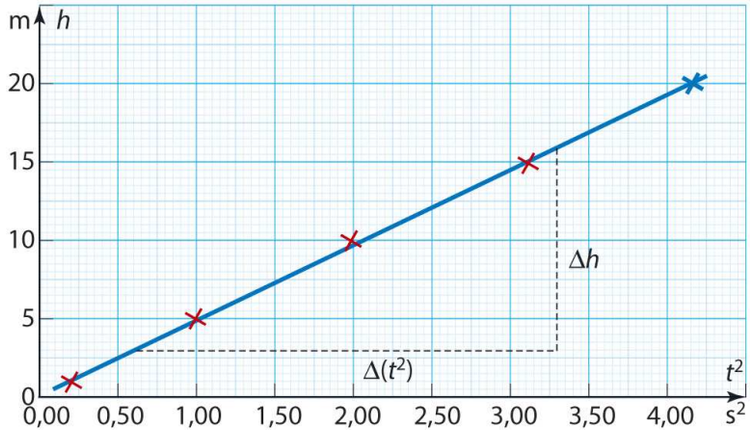
c) Kuvan perusteella pallo nousee 0,82 m:n korkeudelle.

K2016/2

a) Lasketaan t^2-arvot.

h (m)	1,00	5,00	10,0	15,0	20,0
t (s)	0,47	1,00	1,41	1,76	2,04
t^2 (s)	0,2209	1,0000	1,9881	3,0976	4,1616

Sijoitetaan lasketut arvot t^2,h-koordinaatistoon.



b) Kuula on tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä, jolloin putoamismatka on $h = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$.

Kuula lähtee levosta eli $v_0 = 0$, joten sen kiihtyvyys on $a = \frac{2h}{t^2}$.

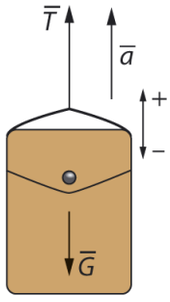
Kuulan kiihtyvyys saadaan a-kohdan kuvaajaan sovitetun suoran fysikaalisesta kulmakertoimesta:

$$a = 2 \cdot \frac{\Delta h}{\Delta\left(t^2\right)} = 2 \cdot \frac{16{,}0\ \text{m} - 3{,}0\ \text{m}}{3{,}30\ \text{s}^2 - 0{,}60\ \text{s}^2} \approx \underline{\underline{9{,}6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}.$$

S2014/5

$m = 5{,}03$ kg, $m_v = 5{,}31$ kg, $t = 11$ s

a)



$\overline{G}$ on paino ja $\overline{T}$ tukivoima.

b) Newtonin II lain mukaan on $\sum \overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{G} + \overline{T} = m\overline{a}$, jossa $\overline{T}$ on mitattu voima, m repun massa ja $\overline{a}$ hissin ja repun kiihtyvyys. Kun suunta ylös on positiivinen, saadaan skalaarimuodossa $T - G = ma$, jossa mitatun voiman suuruus on $T = m_v g$ ja m_v on vaa'an näyttämä massa. Kiihtyvyys on suuruudeltaan $a = \dfrac{T-G}{m}$. Koska hissin liike on tasaisesti kiihtyvää ja hissi lähtee levosta, loppunopeus saadaan yhtälöstä

$v = at$ eli

$$v = \frac{T-G}{m}t = \frac{m_v g - mg}{m}t = \left(\frac{m_v}{m} - 1\right)gt$$

$$= \left(\frac{5{,}31\,\text{kg}}{5{,}03\,\text{kg}} - 1\right) \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 11\,\text{s} = 6{,}00692\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx \underline{\underline{6{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}}.$$

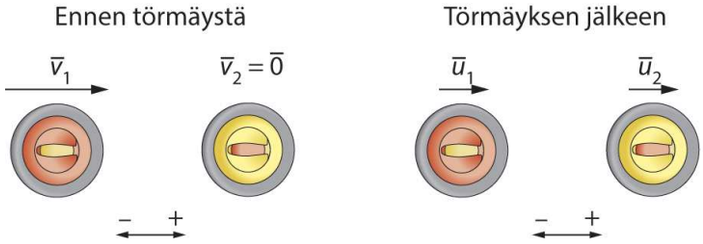
c) Hissin ja repun liikkuessa tasaisella nopeudella ylöspäin, reppuun kohdistuva kokonaisvoima $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{T} + \overline{G} = \overline{0}$, josta $T - G = 0$ eli $T = G$.

Vastaus: Vaaka näyttää samaa lukemaa 5,03 kg kuin silloin, kun reppu ja vaaka ovat paikallaan.

K2016/5 (osa)

$m = 20$ kg, $v_1 = 2{,}1$ m/s^2

a)



Osumahetkellä kiviin ei vaikuta merkittäviä ulkoisia voimia, joten kivien muodostamaa systeemiä voidaan pitää eristettynä. Törmäyksessä liikemäärä säilyy:

$$m\overline{v}_1 + m\overline{v}_2 = m\overline{u}_1 + m\overline{u}_2.$$

Sovitaan suunta oikealle positiiviseksi, ja koska $\overline{v}_2 = \overline{0}$, saadaan skalaariyhtälö $v_1 = u_1 + u_2$.

Kimmoisassa törmäyksessä kivien liike-energia säilyy:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}mu_2^2,$$

josta saadaan

$$v_1^2 = u_1^2 + u_2^2.$$

Sijoitetaan tähän liikemäärän säilymisestä saatu nopeus v_1:

$$\begin{aligned}(u_1+u_2)^2 &= u_1^2+u_2^2\\ u_1^2+u_2^2+2u_1u_2 &= u_1^2+u_2^2\\ 2u_1u_2 &= 0.\end{aligned}$$

Yhtälö on tosi vain, jos $u_1 = 0$ tai $u_2 = 0$. Myös liikemäärän säilyminen toteutuu, kun nopeudet törmäyksen jälkeen ovat $\overline{u}_1 = \overline{0}$ ja $\overline{u}_2 = \overline{v}_1$. Punainen kivi pysähtyy törmäyksessä ja keltainen kivi lähtee nopeudella 2,1 m/s samaan suuntaan kuin punainen kivi liikkui ennen törmäystä.

S2015/10 (osa)

$m = 5{,}5$ kg, $m_\mathrm{L} = 0{,}0102$ kg, $v = 235$ m/s, $l_1 = 0{,}62$ m, $l_2 = 0{,}31$ m,

$l_\mathrm{L} = 0{,}0167$ m

a) Luodin osuessa levyyn sen nopeus hidastuu tasaisesti nollaan luodin pituuden matkalla:

$$l_\mathrm{L} = \frac{1}{2}vt,$$

josta saadaan pysähtymiseen kuluvaksi ajaksi

$$t = \frac{2l_\mathrm{L}}{v}.$$

Impulssiperiaatteen mukaan

$$Ft = \Delta p = m_\mathrm{L}\Delta v = m_\mathrm{L}v,$$

joten voima on

$$F = \frac{m_\mathrm{L}v}{t} = m_\mathrm{L}v\frac{v}{2l_\mathrm{L}} = \frac{m_\mathrm{L}v^2}{2l_\mathrm{L}} = \frac{0{,}0102\ \mathrm{kg}\cdot(235\ \mathrm{m/s})^2}{2\cdot 0{,}0167\ \mathrm{m}} = 16865{,}12\ \mathrm{N} \approx \underline{\underline{16900\ \mathrm{N}}}.$$

K2011/5

$m = 29\ \text{kg},\ v = 5{,}0\ \text{m/s},\ s = 1{,}3\ \text{m},\ m_\text{p} = 21\ \text{kg},\ g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$

Kun poika hyppää patjalle, kyseessä on pojan ja patjan välinen törmäys. Pojan ja patjan kokonaisliikemäärä säilyy: $m\overline{v} + m_\text{p}\overline{v}_\text{p} = (m + m_\text{p})\overline{u}$, jossa $\overline{v}$ on pojan nopeus ja $\overline{v}_\text{p}$ patjan nopeus ennen törmäystä ja $\overline{u}$ on pojan ja patjan yhteinen nopeus heti törmäyksen jälkeen. Koska patja on alussa levossa, sen nopeus on $v_\text{p} = 0$ m/s. Kun pojan menosuunta valitaan positiiviseksi suunnaksi, voidaan liikemäärän säilyminen esittää skalaariyhtälönä $mv = (m + m_\text{p})u$. Tästä voidaan ratkaista u eli pojan ja patjan nopeus välittömästi törmäyksen jälkeen:

$$u = \frac{mv}{m + m_\text{p}} = \frac{29\,\text{kg} \cdot 5{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{29\,\text{kg} + 21\,\text{kg}} = 2{,}9\,\text{m/s}.$$

Työperiaatteen mukaan pojan ja patjan liike-energian muutos on yhtä suuri kuin kitkan F_μ patjaan matkalla s tekemä työ: $\Delta E_\text{k} = W$ eli $\Delta E_\text{k} = -F_\mu s$. Koska pinta on vaakasuora, Newtonin II lain mukaan on $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{N} + \overline{G} = \overline{0}$. Kun suunta ylös on positiivinen, skalaariyhtälöstä $N - G = 0$ saadaan $N = G$.

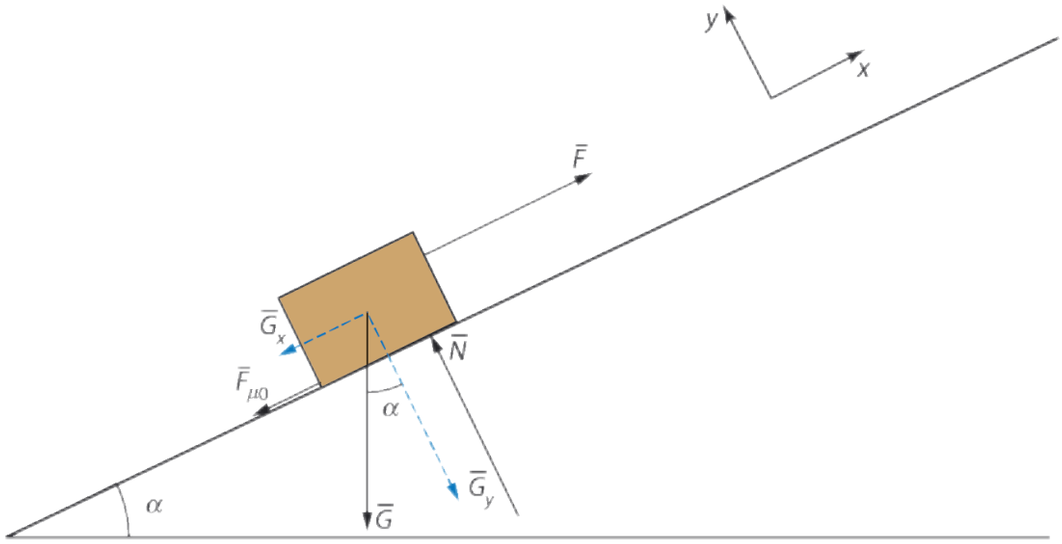
Kitka on $F_\mu = \mu N = \mu G = \mu(m + m_\text{p})g$.

Patja ja poika pysähtyvät kuljettuaan matkan s, joten työ-energiaperiaate $E_\text{k,l} - E_\text{k,a} = -F_\mu s$ eli $0 - \frac{1}{2}(m + m_\text{p})u^2 = -F_\mu s$ saadaan muotoon $\frac{1}{2}(m + m_\text{p})u^2 = \mu(m + m_\text{p})gs$. Yhtälöstä $\frac{1}{2}u^2 = \mu gs$ saadaan kitkakertoimeksi $\mu = \frac{u^2}{2gs} = \frac{(2{,}9\,\text{m/s})^2}{2 \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 1{,}3\,\text{m}} \approx 0{,}33$.

K2009/6

$m = 480\ \text{kg},\ r_1 = 3{,}6\ \text{cm},\ r_2 = 43\ \text{cm},\ \mu_0 = 0{,}15,\ \alpha = 15°,\ g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$

Laituriin kohdistuvat voimat ovat paino $\overline{G}$, luiskan tukivoima $\overline{N}$, vaijerin jännitysvoima $\overline{F}$ ja lepokitka $\overline{F}_{\mu 0}$



Jaetaan paino $\overline{G}$ komponentteihin: $G_x = G\sin\alpha = mg\sin\alpha$ ja

$G_y = G\cos\alpha = mg\cos\alpha$, kun positiivinen suunta on tason suunnassa vinosti ylös ja tasoa vastaan kohtisuorasti viistosti ylös. Tarkastellaan rajatapausta, jolloin laituri on levossa juuri lähdössä liikkeelle. Tällöin Newtonin II lain mukainen liikeyhtälö tason suunnassa on

$\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{F} + \overline{G}_x + \overline{F}_{\mu 0} = 0$ ja skalaariyhtälönä $F - G_x - F_{\mu 0} = 0.$

Liikeyhtälö tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa on

$\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{N} + \overline{G}_y = 0$, ja skalaariyhtälönä $N - G_y = 0.$

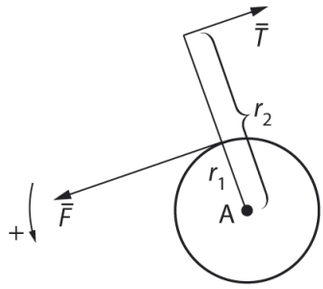
Alemmasta yhtälöstä saadaan tukivoimaksi $N = G_y = mg\cos\alpha$.
Ratkaistaan ylemmästä yhtälöstä vaijerin aiheuttama jännitysvoima:

$$F = G_x + F_{\mu 0} = mg\sin\alpha + \mu_0 N = mg\sin\alpha + \mu_0 mg\cos\alpha = mg(\sin\alpha + \mu_0\cos\alpha)$$

$$= 480\ \text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (\sin 15° + 0{,}15 \cdot \cos 15°) = 1900{,}98\ \text{N}.$$

Kampisysteemiin vaikuttavat voimat ovat vaijerin jännitysvoima $\overline{F}$ ja

käden kampea vääntävä voima $\overline{T}$.

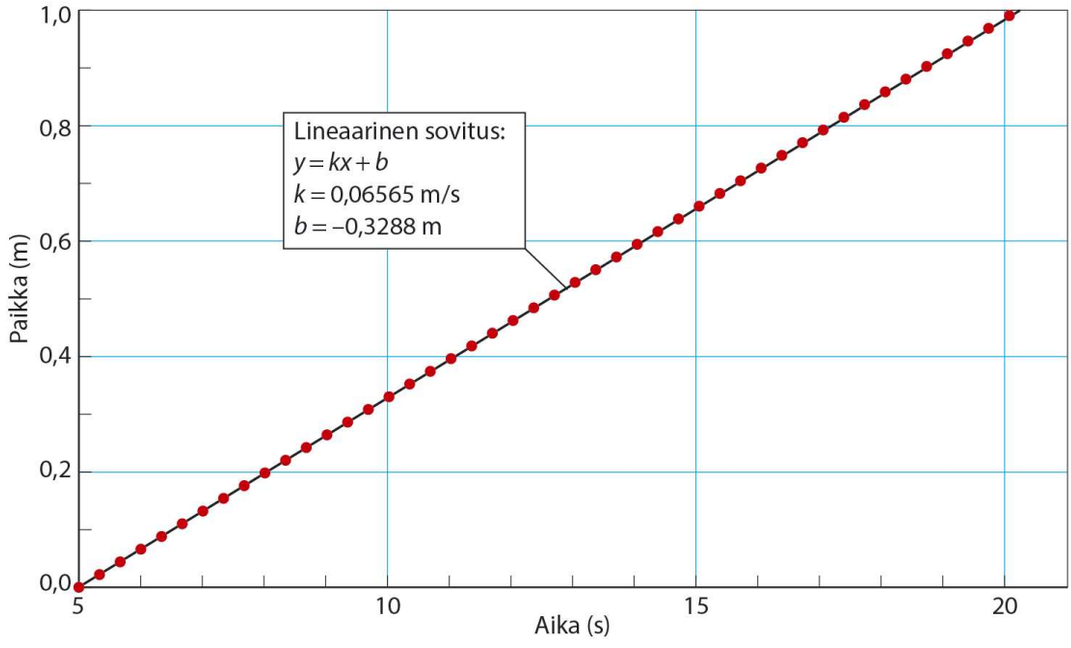


Tarkastellaan voimien momentteja rummun keskipisteen A kautta kulkevan akselin suhteen. Rajatapauksessa kampisysteemi on levossa, juuri lähdössä pyörimään, ja sen liikeyhtälö pyörimisen suhteen on $\sum M_{\mathrm{A}} = 0$. Kuvion mukaan voimien varret ovat r_1 ja r_2. Kun pyörimissuunta vastapäivään on positiivinen, liikeyhtälö on $F \cdot r_1 - T \cdot r_2 = 0$. Jotta laituri lähtisi liikkeelle, kampea kääntävän voiman tulee olla suuruudeltaan vähintään

$$T = \frac{F \cdot r_1}{r_2} = \frac{1900{,}98\ \mathrm{N} \cdot 3{,}6\ \mathrm{cm}}{43\ \mathrm{cm}} \approx 160\ \mathrm{N}.$$

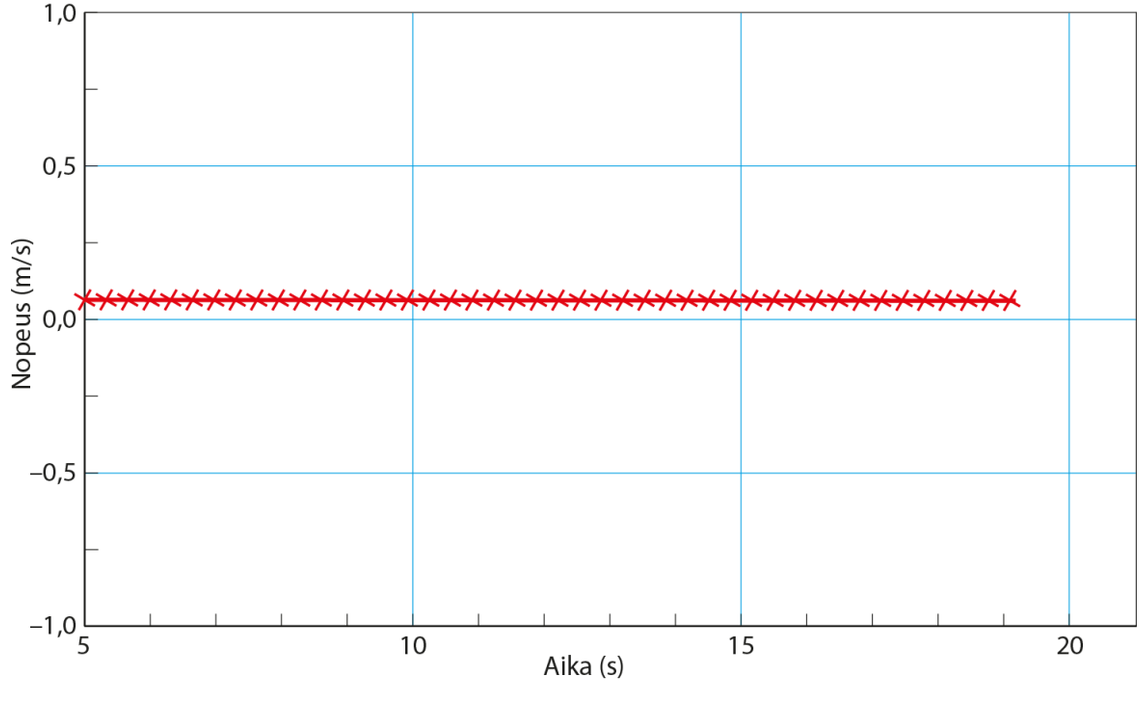
Kampeen kohdistuvan voiman on oltava suuruudeltaan vähintään 160 N.

1-4. **a)** Paikan kuvaaja:



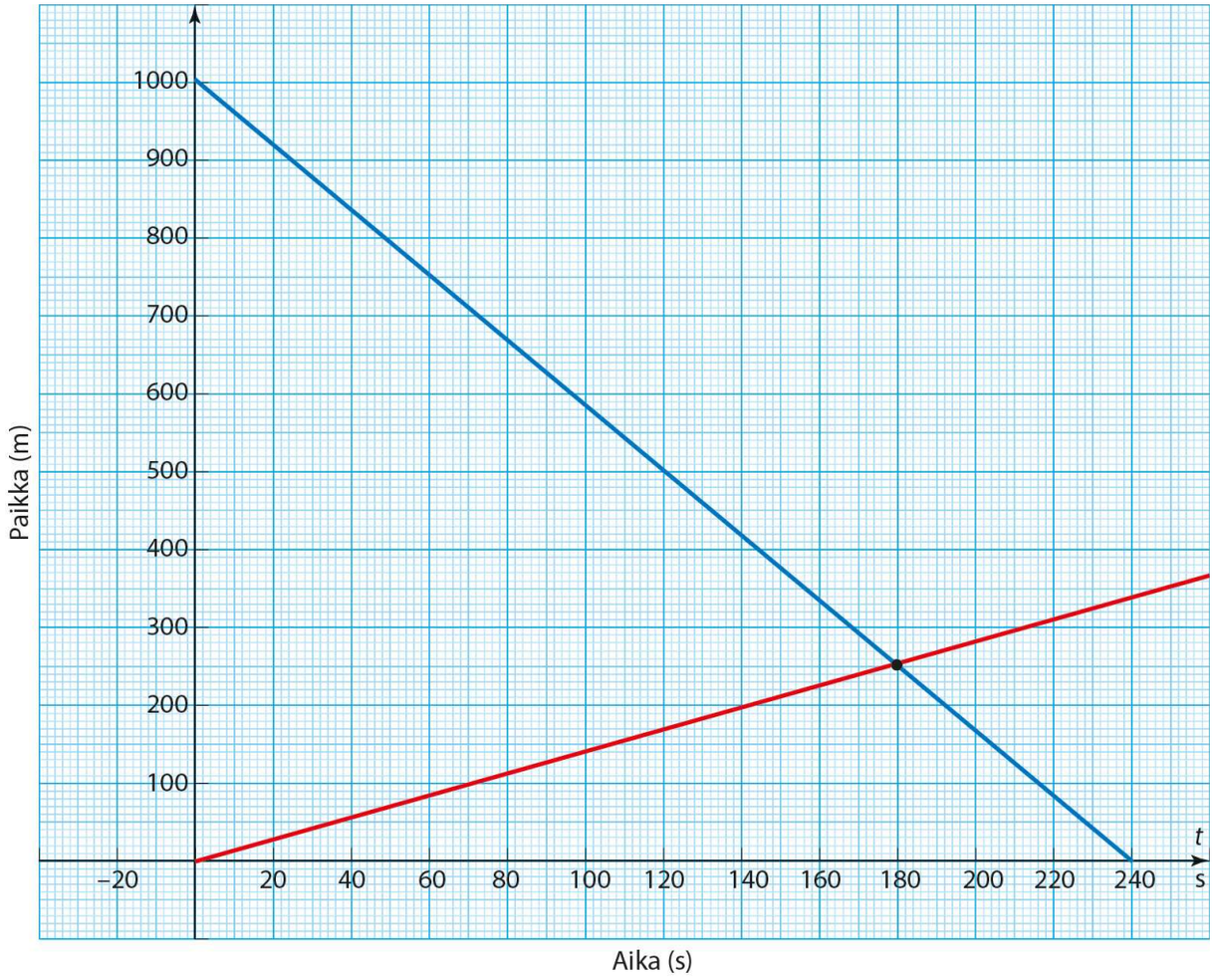
Suoran fysikaalinen kulmakerroin on kysytty ilmakuplan nopeus eli $v = 6{,}6$ cm/s.

b) Nopeuden kuvaaja:



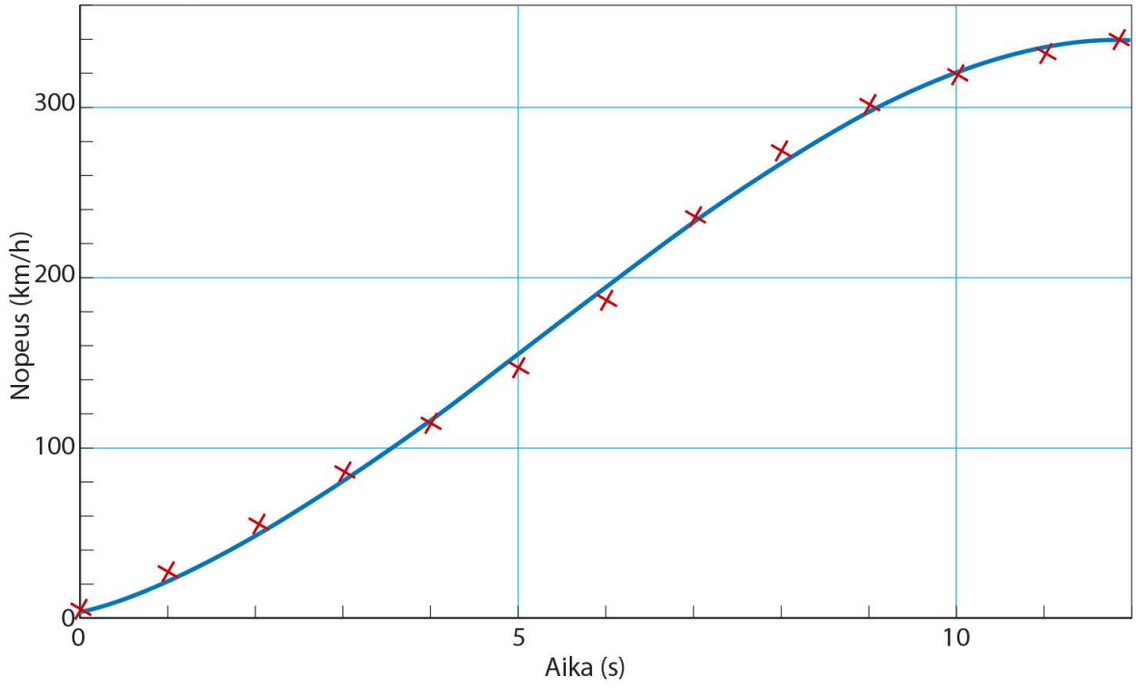
1-11. **a)** Valitaan liikkeen positiiviseksi suunnaksi Sinin liikkeen suunta, paikan nollakohdaksi Sinin lähtöpiste ja ajan nollakohdaksi liikkeelle lähtemisen hetki. Tällöin Sinin rata on suora, joka alkaa origosta ja jonka fysikaalinen kulmakerroin on 5,0 km/h ≈ 1,4 m/s.

Jonin rata on suora, joka lähtee pisteestä $(t, x) = (0, 1000\ \text{m})$ ja jonka kulmakerroin on -15 km/h ≈ $-$ 4,2 m/s. Suoran kulmakerroin on negatiivinen, koska Jonin siirtymä x on negatiivinen.

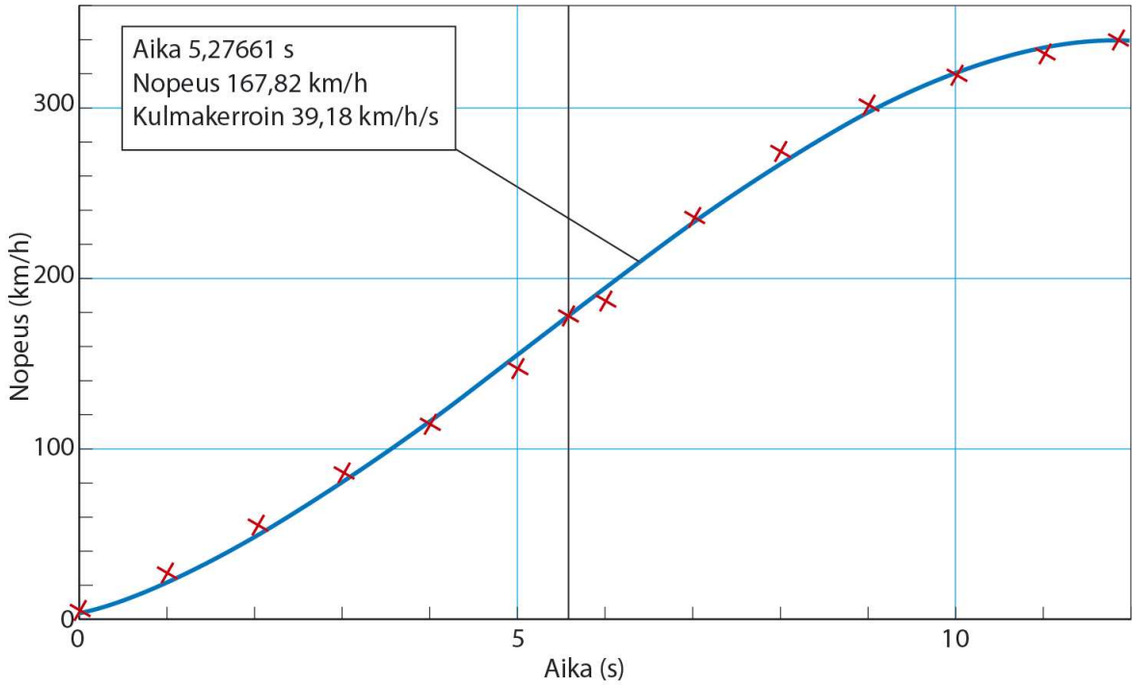


b) Kuvasta todetaan, että Sini ja Joni kohtaavat pisteessä $(t,x) \approx (180\ \text{s}, 250\ \text{m})$. Kohtaamispaikka on siis 250 m etäisyydellä Sinin lähtöpisteestä ja aikaa lähdöstä on kulunut 180 s.

3-8. **a)** Auton nopeuden $v = v(t)$ kuvaaja:



b) Mittausohjelman mukaan kiihtyvyyden suurin arvo saavutetaan hetkellä $t = 5{,}3$ s.



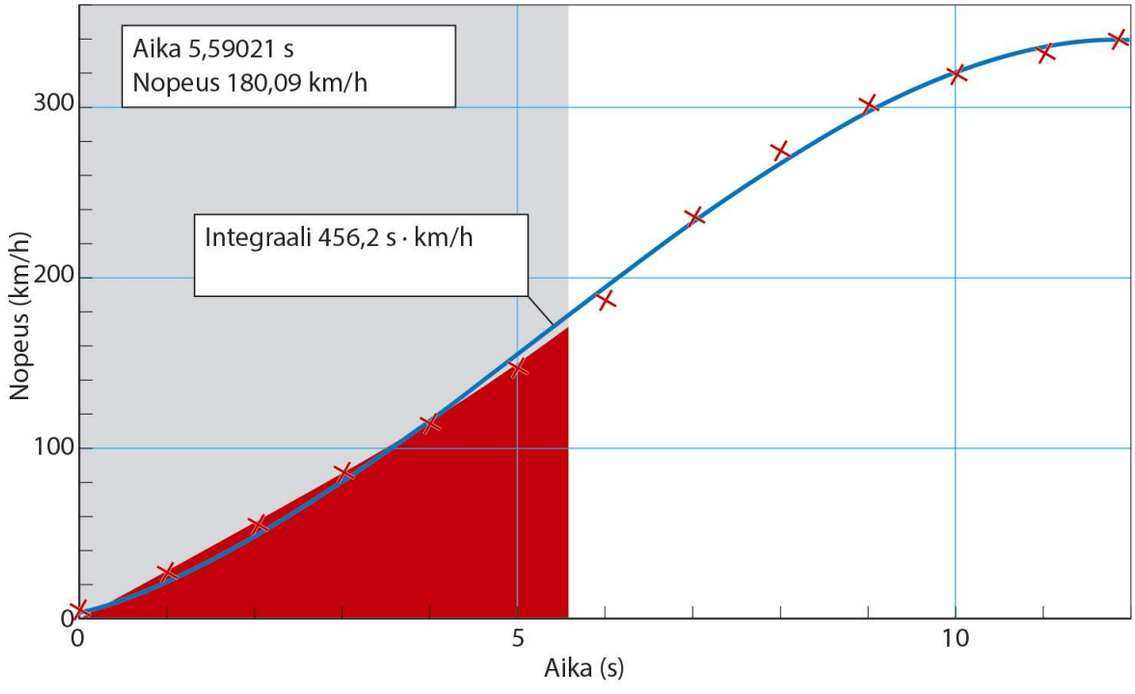
Suurin kiihtyvyys on

$$a_{\max}(5{,}3\,\text{s}) = \frac{39{,}18\ \text{km/h}}{\text{s}} = \frac{\frac{39{,}18}{3{,}6}\ \text{m/s}}{\text{s}} \approx 11\ \text{m/s}^2.$$

Huomaa, että ajanhetki riippuu hieman siitä, minkälainen käyrä on sovitettu pistejoukkoon.

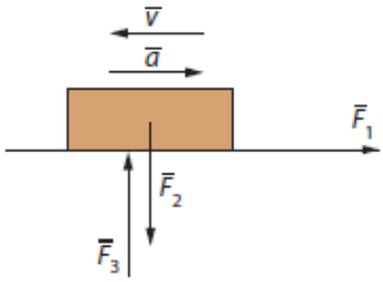
c) Matka saadaan määritettyä t, v-koordinaatiston kuvaajasta fysikaalisena pinta-alana. Mittausohjelman mukaan matka on

$$s = 456{,}2\ \text{s} \cdot \text{km/h} = \frac{456{,}2}{3{,}6}\ \text{s} \cdot \text{m/s} \approx 130\ \text{m}.$$



3-9. Esitetään mittaustulokset t, v-koordinaatistossa. Mittauspisteet näyttäisivät pistettä (1,68 s, 1,57 m/s) lukuun ottamatta asettuvan suoralle; ko. havainto on epäonnistunut eikä mittauspistettä huomioida.

c) Kappale on hidastuvassa liikkeessä vasemmalle.



Voimat ovat

$\overline{F}_1 = \overline{F}_\mu$ kitka,

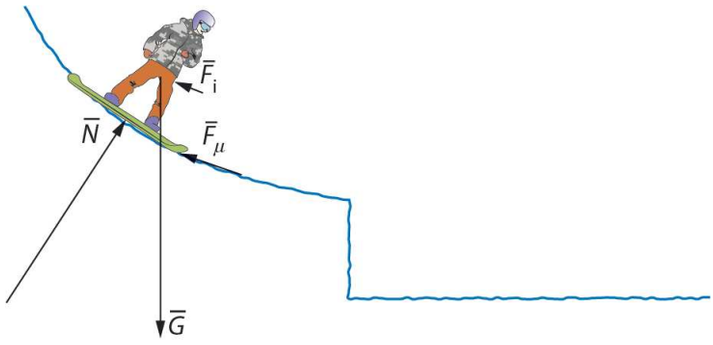
$\overline{F}_2 = \overline{G}$ Maan vetovoima eli kappaleeseen kohdistuva paino ja

$\overline{F}_3 = \overline{N}$ pinnan tukivoima.

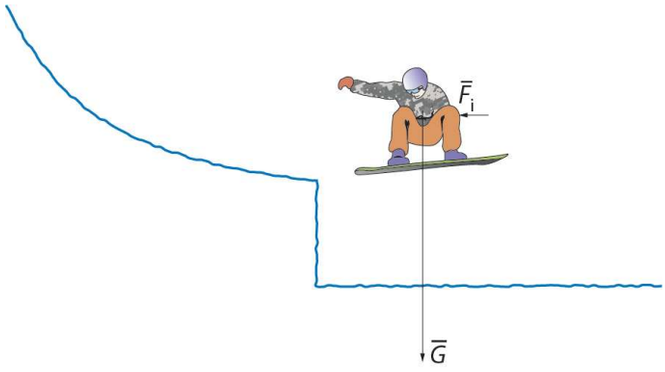
4-6. **a)** Jannika on kosketusvuorovaikutuksessa köyden, seinän ja ilman kanssa sekä etävuorovaikutuksessa Maan kanssa.

Kun Jannika laskeutuu köyden varassa pitkin seinää, häneen kohdistuu paino, köyden jännitysvoima, seinän tukivoima, seinän kitka, (ilman hyvin pieni noste) ja mahdollisesta tuulesta johtuva ilmanvastus.

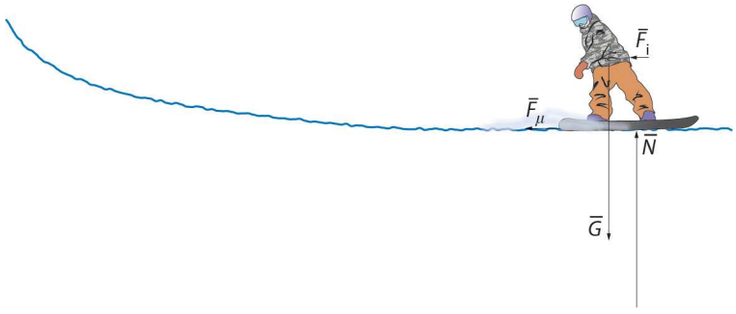
b) Ennen hyppyriä lumilautailijaan kohdistuvat paino $\overline{G}$, rinteen tukivoima $\overline{N}$, ilmanvastus $\overline{F}_\text{i}$ ja kitka $\overline{F}_\mu$ laudan ja lumen välillä.



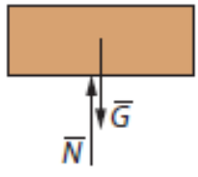
Kun lautailija on ilmassa, häneen kohdistuvat paino $\overline{G}$ ja ilman vastus $\overline{F}_{\mathrm{i}}$ (ja häviävän pieni noste).



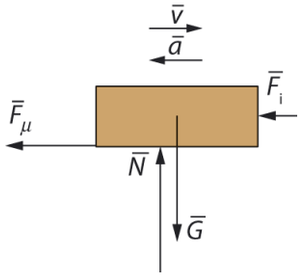
Hypyn jälkeen, kun lautailija on taas maassa, häneen kohdistuvat paino $\overline{G}$, pinnan (rinteen) tukivoima $\overline{N}$, ilmanvastus $\overline{F}_{\mathrm{i}}$ ja kitka $\overline{F}_{\mu}$.



4-7. **a)** Kirjaan vaikuttavat voimat ovat paino $\overline{G}$ ja pinnan tukivoima $\overline{N}$.



c) Voimakuvio:



d) Painon $\bar{G}$ vastavoima on voima, jolla kiekko vetää Maata.

Tukivoiman $\bar{N}$ vastavoima on voima, jolla kiekko painaa jäätä.

Kitkan $\bar{F}_{\mu}$ vastavoima on voima, jolla kiekko vaikuttaa jään pintaan.

Ilmanvastuksen $\bar{F}_{\mathrm{i}}$ vastavoima on voima, jolla kiekko vaikuttaa ilmaan.

4-9. Havaitsemissasi ilmiöissä kyse ei ole voimista vaan siitä, että massasi vastustaa liikkeesi muuttumista, kun bussin liike muuttuu. Kaikki havaitsemasi ilmiöt johtuvat massan hitaudesta.

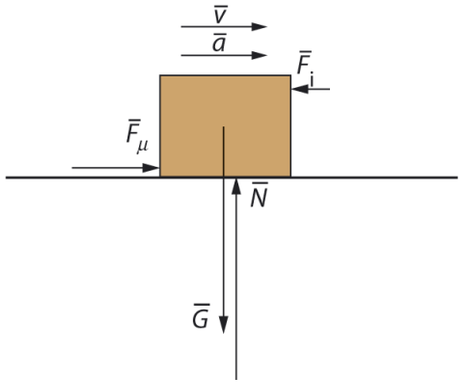
4-10. **a)** Voimat $\bar{F}_3$ ja $\bar{F}_4$ eivät ole voima ja vastavoima, koska ne vaikuttavat samaan kappaleeseen (lamppuun).

b) Voiman $\bar{F}_2$ vastavoima on $\bar{F}_3$.

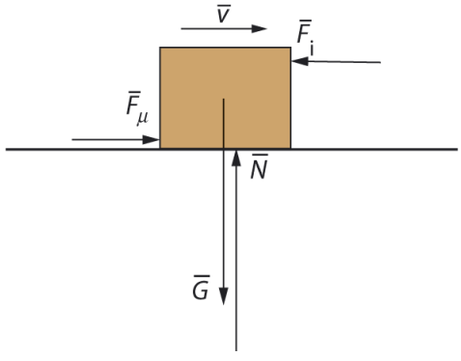
c) Voiman $\bar{F}_6$ vastavoima on voima, jolla lamppu vetää Maata.

d) Voima $\bar{F}_5$ on tukivoima, jolla naru estää lampun putoamisen. Voima $\bar{F}_6$ on voima, jolla Maa vetää lamppua.

4-11. **a)** Auton nopeus kasvaa. Laatikkoon vaikuttavat voimat ovat laatikkoon kohdistuva paino $\bar{G}$, lavan tukivoima $\bar{N}$, kitka $\bar{F}_{\mu}$ liikkeen suuntaan ja liikesuunnalle vastakkainen ilmanvastus $\bar{F}_{\mathrm{i}}$.

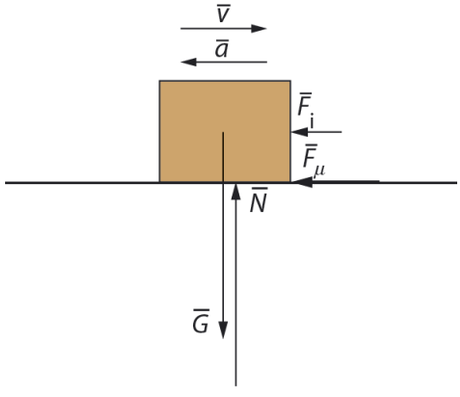


b) Auto liikkuu vakionopeudella. Laatikkoon vaikuttavat voimat ovat laatikkoon kohdistuva paino $\overline{G}$, lavan tukivoima $\overline{N}$ sekä kitka $\overline{F}_\mu$ ja ilmanvastus $\overline{F}_i$, jotka ovat yhtä suuria keskenään.

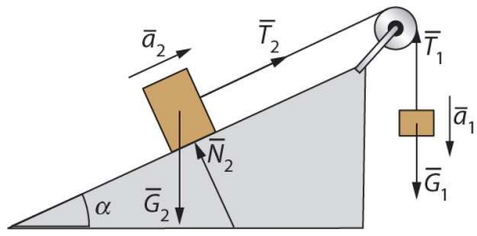


c) Auton nopeus pienenee.

Vaikuttavat voimat ovat laatikkoon kohdistuva paino $\overline{G}$, lavan tukivoima $\overline{N}$, kitka $\overline{F}_\mu$ja ilmanvastus $\overline{F}_i$. Kitka $\overline{F}_\mu$ ja ilmanvastus $\overline{F}_i$ ovat liikkeen suunnalle vastakkaiset.

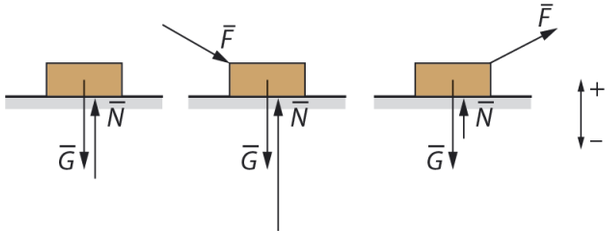


4-12. Voimakuvio:



$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 4{,}27615 \text{ m/s}^2 \cdot 39 \text{ m}} \approx 18 \text{ m/s}.$$

6-11.

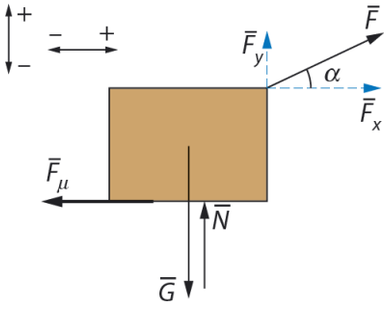


a) Newtonin II lain mukaan tasapainoehto pystysuunnassa on $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$. Kun suunta ylös on positiivinen, skalaariyhtälö on $N - G = 0$ eli $G = N$. Kappaleeseen kohdistuva paino ja tukivoima ovat yhtä suuret.

b) Newtonin II lain mukaan tasapainoehto pystysuunnassa on $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$. Kun suunta ylös on positiivinen, skalaariyhtälö on $N - F_y - G = 0$ eli $G = N - F_y$. Kappaleeseen kohdistuva paino on pienempi kuin tukivoima.

c) Newtonin II lain mukaan tasapainoehto pystysuunnassa on $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$. Kun suunta ylös on positiivinen, skalaariyhtälö on $N + F_y - G = 0$, eli $G = N + F_y$. Kappaleeseen kohdistuva paino on suurempi kuin tukivoima. On myös mahdollista, että kappale irtoaa pinnasta (jos $F_y > G$), jolloin tukivoimaa ei ole: silloin kappale on kiihtyvässä liikkeessä yläviistoon oikealle.

6-12. **a)** Jaetaan vetävä voima komponentteihinsa.



Voiman $\overline{F}$ komponenttien suuruudet ovat

Voiman tekemä työ on silloin

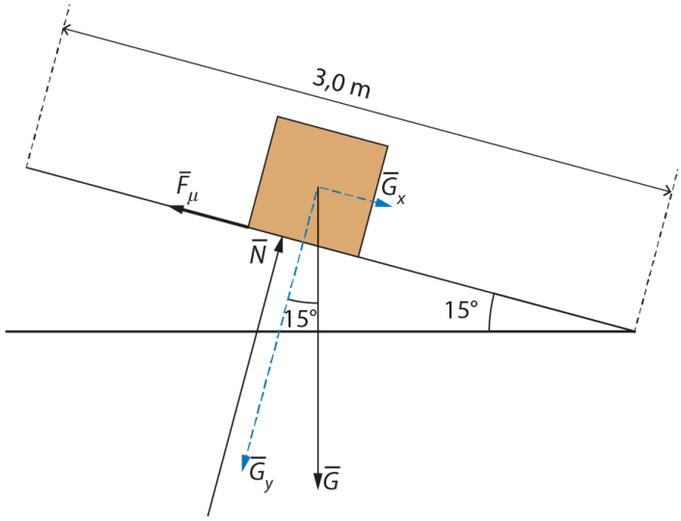
$$W = -F \cdot s = -mg \cdot s = -220\ \text{kg} \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 12\ \text{m} = -21{,}5898\ \text{kJ} \approx -22\ \text{kJ}.$$

Painon tekemä työ on

$$W = G \cdot s = mg \cdot s = 220\ \text{kg} \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 12\ \text{m} = 21{,}5898\ \text{kJ} \approx 22\ \text{kJ}.$$

b) Painon tekemä työ on sama kuin edellisessä tapauksessa eli 22 kJ.

11-5. **a)** Työtä tekevät voimat ovat pyöriin vaikuttava kitkavoima $\overline{F}_\mu$ liikkeen suunnassa ja vastakkaisessa suunnassa painon $\overline{G}$ luiskan suuntainen komponentti $\overline{G}_x$.



b) Koska luiskan kaltevuus on 15°, on $\overline{G}_x$:n suuruus

$$G_x = G\sin 15° = mg \cdot \sin 15° = 82\ \text{kg} \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}2588 = 208{,}184\ \text{N}.$$

Oletetaan, että pyörätuoli liikkuu likimain vakionopeudella. Silloin kitkan $\overline{F}_\mu$ suuruus on sama kuin vastakkaiseen suuntaan vaikuttavan voiman $\overline{G}_x$ suuruus eli F_μ=208,184 N. Voiman tekemäksi työksi saadaan silloin

$$W = F_\mu \cdot d = 208{,}184\ \text{N} \cdot 3{,}0\ \text{m} \approx 620\ \text{J}.$$

TEHTÄVIEN RATKAISUT

12-1. **a)** Liike-energia on $E_\text{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 60 \text{ kg} \cdot \frac{6}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 50 \text{ J}.$

b) Liike-energia on $E_\text{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ kg} \cdot \frac{100}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 140 \text{ J}.$

12-2. Henkilöauton liike-energia on

$$E_\text{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 1250 \text{ kg} \cdot \left(\frac{90{,}0}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = 390{,}625 \text{ kJ}.$$

Liike-energian yhtälöstä saadaan rekan nopeudeksi

$$v_\text{rekka} = \sqrt{\frac{2E_\text{k}}{m_\text{rekka}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 390{,}625 \cdot 10^3 \text{ J}}{40 \cdot 10^3 \text{ kg}}} = 4{,}41942 \cdot 3{,}6 \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 16 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

12-3. **a)** Liike-energia on verrannollinen nopeuden toiseen potenssiin. Esimerkiksi jos nopeus kaksinkertaistuu, liike-energia nelinkertaistuu.

b) Koska nopeus pienenee puoleen alkuperäisestä arvostaan, liike-energia pienenee neljäsosaan.

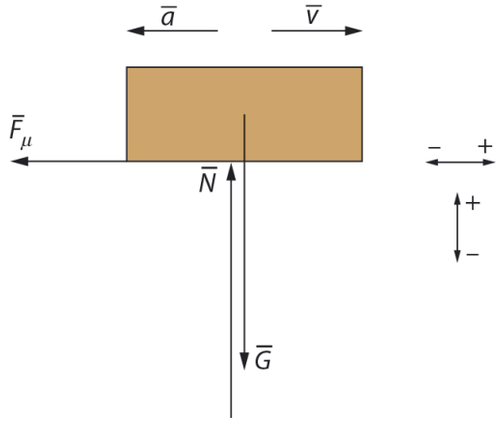
12-4. **a)** Auton nopeus 180 metrin kohdalla on 100 km/h. Sen liike-energia on silloin $E_\text{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 1250 \text{ kg} \cdot \left(\frac{100}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = 0{,}482253 \text{ MJ} \approx 0{,}48 \text{ MJ}.$

b) Koska liike-energia on verrannollinen nopeuden neliöön, liike-energia pienenee puoleen silloin, kun nopeus pienee tekijällä $\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0{,}71$ eli nopeus on $0{,}71 \cdot 100 \text{ km/h} = 71 \text{ km/h}$. Koska auton kiihtyvyys on vakio, kasvaa auton nopeus tasaisesti arvosta 0 km/h arvoon 100 km/h 180 metrin matkalla.

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{{v_2}^2}{{v_1}^2} = \frac{\left(120\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2}{\left(60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2} = 4 \text{ eli } \Delta x_2 = 4\Delta x_1 = 4 \cdot 20\ \text{m} = 80\ \text{m}.$$

Jarrutusmatka on 80 m.

12-7. **a)**



Työ-energiaperiaatteen mukaan liike-energian muutos on yhtä suuri kuin kokonaisvoiman tekemä työ eli $\Delta E_k = W$. Vastusvoimien (kitka ja ilmanvastus) suunta on siirtymän suunnalle vastakkainen, joten niiden tekemä työ on negatiivinen. Koska ilmanvastus oletetaan nollaksi, työ-energiaperiaatteen mukaan on $\Delta E_k = -F_\mu \cdot \Delta x$, jossa kitkan suuruus on $F_\mu = \mu N$.

Kappaleen liikeyhtälö y-suunnassa on Newtonin II lain mukaan $\sum \bar{F} = \bar{0}$ eli $\bar{G} + \bar{N} = \bar{0}$. Suunta ylös on positiivinen, joten $G - N = 0$ eli $N = G$.

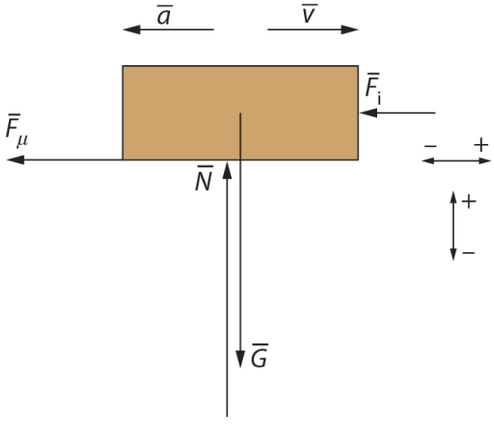
Työ-energiaperiaate saa muodon

$\Delta E_k = -F_\mu \cdot \Delta x = -\mu N \cdot \Delta x = -\mu G \cdot \Delta x$. Koska auto pysähtyy on, liike-energia lopussa on nolla, joten $0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\mu mg\Delta x$. Auton jarrutusmatkaksi saadaan

$$\Delta x = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\mu mg} = \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{\left(\frac{65}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 0{,}60 \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 28\ \text{m}.$$

Huomataan, että jarrutusmatka ei riipu auton massasta, joten vastaus on sama molemmille autoille.

b)



Jos ilmanvastus otetaan huomioon, työperiaate saa muodon $\Delta E_k = -F_\mu \cdot \Delta x - W_i$, jossa W_i on ilmanvastuksen tekemä työ. Työperiaate saa kohdan a perusteella muodon $0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\mu mg\Delta x - W_i$, josta ratkaistaan jarrutusmatka:

$$\mu mg\Delta x = \frac{1}{2}mv^2 - W_i,$$

$$\Delta x = \frac{\frac{1}{2}mv^2 - W_i}{\mu mg} = \frac{v^2}{2\mu g} - \frac{W_i}{\mu mg}.$$

Ilmanvastuksen suuruuteen vaikuttavat ilman tiheys, auton muoto, pinta-ala ja nopeus. Ne ovat molemmille autoille samat, joten ilmanvastuksen tekemä työ on yhtä suuri molemmille autoille. Jarrutusmatkaan vaikuttavista suureista vain massa on autoille eri suuri. Mitä suurempi

massa on, sitä pienempi on lauseke $\frac{W_\mathrm{i}}{\mu mg}$ ja sitä vähemmän termi $-\frac{W_\mathrm{i}}{\mu mg}$ lyhentää kohdassa a laskettua jarrutusmatkaa. Lastatun auton jarrutusmatka on pitempi.

12-8. Täydennetään taulukkoon vaunujen liike-energiat $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$.

m (kg)	0,1561	0,2287	0,3043	0,3803	0,4563
v (m/s)	2,475	2,041	1,767	1,582	1,529
E_k (J)	0,478105	0,476346	0,475056	0,475893	0,533378

Taulukosta päätellään, että 0,4563 kg:n massaisen vaunun tapauksessa nopeuden mittaus ei ole luotettava, koska saatu liike-energian arvo poikkeaa muista tapauksista selvästi. Määritetään liike-energia muista mittausarvoista keskiarvona. Saadaan $E_\mathrm{k} = 0{,}47635\ \mathrm{J} \approx 0{,}4764\ \mathrm{J}$. Työperiaatteen mukaan voiman tekemä työ on yhtä suuri kuin kappaleen liike-energian muutos, joten kuminauhan vaunuihin tekemä työ on $W = 0{,}4764\ \mathrm{J}$.

12-9. Työperiaatteen mukaan tikan liike-energian muutos on sama kuin sen voiman tekemä työ, jonka taulu kohdistaa tikkaan tikan tunkeutuessa siihen. Koska tikan nopeus lopussa on nolla, saadaan yhtälö

$0 - \frac{1}{2}mv^2 = F \cdot s$, josta saadaan

$$F = -\frac{mv^2}{2s} = -\frac{0{,}025\ \mathrm{kg} \cdot (7{,}0\ \mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 0{,}005\ \mathrm{m}} \approx -120\ \mathrm{N}.$$

Voiman suuruus on 120 N, tikan lentosuuntaa vastaan.

13-8. **a)** Putoavan veden massa on

$$m = \rho V = \rho A h = 1000\,\text{kg/m}^3 \cdot 417 \cdot 10^6\,\text{m}^2 \cdot 0{,}55\,\text{m} \approx 229{,}35 \cdot 10^9\,\text{kg}.$$

Energiaa vapautuu potentiaalienergian muutoksen verran. Tehtävässä oletetaan, että pudotuskorkeus pysyy likimain vakiona.
Potentiaalienergian muutos on

$$\Delta E_\text{p} = mg\Delta h = 229{,}35 \cdot 10^9\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 3{,}0\,\text{m} = 6{,}7498 \cdot 10^{12}\,\text{J} \approx 6{,}7\,\text{TJ}.$$

Säännöstelyaltaassa veden pudotuskorkeus vaihtelee sen mukaan, kuinka täynnä allas on vettä.

Veden juoksutuksesta kahden viikon aikana saatava keskimääräinen teho on

$$P = \frac{E}{t} = \frac{6{,}7498 \cdot 10^{12}\,\text{J}}{14 \cdot 24 \cdot 3600\,\text{s}} \approx 5600\,\text{kW}.$$

Veden juoksutuksen aikana voisi toimia noin 5600 kappaletta 1,0 kW:n sähkölämmitintä, jos oletetaan, että kaikki vapautuva energia saadaan käyttöön.

b) Vesivoimalaitoksessa padotun veden potentiaalienergiaa muunnetaan sähköenergiaksi hyötysuhteella η, joten $\eta mgh = E_\text{anto} = Pt$. Sekunnissa voimalaitoksen läpi virtaavan veden määrä on 930 m^3. Veden tiheys on 1000 kg/m^3, joten veden massa on m = 930 000 kg. Voimalaitoksen hyötysuhde on

$$\eta = \frac{Pt}{mgh} = \frac{170 \cdot 10^6\ \text{W} \cdot 1{,}0\ \text{s}}{930\,000\,\text{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 24\ \text{m}} \approx 0{,}78.$$

c) Veteen kohdistuva paino muuntaa veden potentiaalienergian liike-energiaksi, joka turbiineissa muunnetaan edelleen sähköksi.

Voimalaitoksen tuottoteho on

$$P = \frac{\eta E_\mathrm{p}}{t} = \frac{\eta mgh}{t} = \frac{\eta \rho Vgh}{t} = \frac{0{,}80 \cdot 1000\ \mathrm{kg/m^3} \cdot 92\ \mathrm{m^3} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 3{,}0\ \mathrm{m}}{1{,}0\ \mathrm{s}}$$
$$\approx 2{,}2\ \mathrm{MW}.$$

d) Jos potentiaalienergian nollatasoksi valitaan turbiinien sijaintikohta, vesivarastossa olevan veden potentiaalienergia on

$$E_\mathrm{p} = mgh = \rho_\mathrm{vesi} Vgh = 1{,}00 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \cdot 5{,}7 \cdot 10^6\ \mathrm{m^3} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \cdot 240\mathrm{m}$$
$$= 1{,}342 \cdot 10^{13}\ \mathrm{J} \approx 13\ \mathrm{TJ}.$$

Oletetaan, että voimalaitos toimii 100 %:n hyötysuhteella. Kun vesi saapuu turbiiniin, se käyttää kaiken putoamisessaan saamansa energian eli potentiaalienergian $E_\mathrm{p} = mgh$ turbiinien pyörittämiseen. Teho on silloin $P = \frac{E_\mathrm{p}}{\mathrm{s}} = \frac{mgh}{\mathrm{s}}$, josta voidaan ratkaista turbiinin läpi sekunnissa kulkevan vesimäärän massa:

$$m = \frac{P \cdot 1\ \mathrm{s}}{gh} = \frac{440 \cdot 10^6\ \mathrm{W} \cdot 1\ \mathrm{s}}{9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \cdot 240\ \mathrm{m}} = 186\ 884\ \mathrm{kg} \approx 190 \cdot 10^3\ \mathrm{kg}.$$

(Huomaa, että $\mathrm{W} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{kg \cdot m^2/s^2}}{\mathrm{s}}$.)

Turbiinin läpi sekunnissa kulkevan veden tilavuus on

$$V = \frac{m}{\rho_\mathrm{vesi}} = \frac{190 \cdot 10^3\ \mathrm{kg}}{1{,}00 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}} = 190\ \mathrm{m^3}.$$

Todellisuudessa voimalaitoksen hyötysuhde on pienempi kuin 100 %, joten ilmoitetun tehon saavuttamiseksi turbiinien läpi virtaavan veden tilavuus on saatua tulosta suurempi.

e) Valitaan potentiaalienergian nollatasoksi vedenpinta alhaalla turbiinin tasolla, jolloin vesivoimalaitoksen tuottoteho saadaan yhtälöstä

$P_{\text{tuotto}} = \eta P_{\text{otto}} = \eta \frac{E_{\text{otto}}}{t} = \eta \frac{mgh}{t}$, jossa η hyötysuhde, ρ veden tiheys, g putoamiskiihtyvyys ja h pudotuskorkeus.

Tiheys on $\rho = m/V$ ja massa $m = \rho V$, joten tuottoteho on

$$P_{\text{tuotto}} = \frac{\eta \rho V g h}{t} = \eta \rho g h \frac{V}{t}.$$

Tuottotehoksi saadaan

$$P_{\text{tuotto}} = \frac{\eta \rho V g h}{t} = \eta \rho g h \frac{V}{t} = 0{,}84 \cdot 1000 \ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}81 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 32{,}4 \ \text{m} \cdot 450 \ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \approx 120 \ \text{W}.$$

TESTAA OSAATKO S. 137

1. a, b, c **2.** b **3.** a, b **4.** c **5.** c **6.** c **7.** b **8.** c **9.** a, b, c **10.** a, c

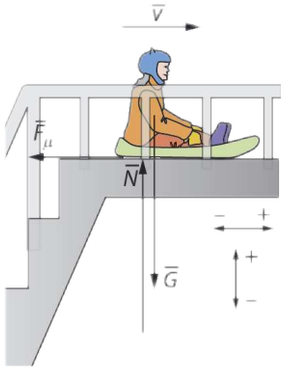
14-9. **a)** Lapseen kohdistuva paino muuntaa osan potentiaalienergiasta liike-energiaksi. Osa potentiaalienergiasta muuntuu vastusvoimien (ilmanvastus ja kitka) tekemän työn takia lapsen, liukumäen ja maan sisäenergiaksi. Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan on

$$mgh_\mathrm{a} + \frac{1}{2}mv_\mathrm{a}^2 + W = mgh_\mathrm{l} + \frac{1}{2}mv_\mathrm{l}^2.$$

Asetetaan potentiaalienergia lopputilanteessa nollaksi. Koska liike-energia alussa on nolla, energiaperiaate saa muodon $mgh_\mathrm{a} + W = \frac{1}{2}mv_\mathrm{l}^2$, joten vastusvoimien tekemä työ on

$$W = \frac{1}{2}mv_\mathrm{l}^2 - mgh_\mathrm{a} = \frac{1}{2}\cdot 20\,\mathrm{kg}\cdot(5{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 - 20\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 3{,}0\,\mathrm{m} \approx -340\,\mathrm{J}.$$

b) Vaakasuoralla pinnalla liukumisen alussa lapsen nopeus on yhtä suuri kuin mäessä saavutettu loppunopeus v_l. Maassa tapahtuvan liu'un aikana kitka ja ilmanvastus muuntavat lapsen liike-energian vuorovaikuttavien kappaleiden ja ilman sisäenergiaksi. Oletetaan ilmanvastus pieneksi. Lapsen liike-energia lopussa on nolla. Sovitaan potentiaalienergian nollatasoksi lapsen painopisteen taso.



Mekaniikan energiaperiaate saa muodon

$$\frac{1}{2}mv_\mathrm{l}^2 - F_\mu s = 0.$$

Kitkan suuruus on $F_\mu = \mu N$. Pystysuunnassa lapsen ja pulkan liikeyhtälö on $\overline{N} + \overline{G} = \overline{0}$. Kun suunta ylös sovitaan positiiviseksi, liikeyhtälö skalaariyhtälönä on $N - G = 0$ eli $N = G$. Kitkan suuruus on $F_\mu = \mu mg$. Lapsen liukuma matka on

$$s = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2}{F_\mu} = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2}{\mu mg} = \frac{v_1^2}{2\mu g} = \frac{(5{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2 \cdot 0{,}77 \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 1{,}7\,\text{m}.$$

14-10. Mekaniikan energiaperiaate $E_{\text{p,a}} + E_{\text{k,a}} + W = E_{\text{p,l}} + E_{\text{k,l}}$ tulee muotoon

$mgh + 0 + W = 0 + \frac{1}{2}mv_1^2$, jossa W on kitkan tekemä työ

$W = F_\mu \cdot s = \mu N \cdot s = \mu mg \cdot s.$

Yhtälöstä $mgh + 0 + \mu mgs = 0 + \frac{1}{2}mv_1^2$ saadaan nopeudelle liukumäen lopussa

$$v_1 = \sqrt{2(gh - \mu gs)} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2\,(23\ \text{m} - 0{,}15 \cdot 141\ \text{m})} \approx 6\ \text{m/s}.$$

Jos kitkakerroin olisi nolla, nopeus olisi

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 23\ \text{m}} \approx 21\ \text{m/s}^2.$$

14-11. **a)** Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan on $E_{\text{p,a}} + E_{\text{k,a}} + W = E_{\text{p,l}} + E_{\text{k,l}}$ eli $m_\text{A}gh_\text{a} + \frac{1}{2}m_\text{A}v_\text{a}^2 + W = m_\text{A}gh_\text{l} + \frac{1}{2}m_\text{A}v_\text{l}^2$. Liikevastusten tekemä työ oletetaan nollaksi. Oletetaan, että pulkat lähtevät levosta, eli liike-energia alussa on nolla. Valitaan potentiaalienergian nollataso mäen alle.

Mekaniikan energiaperiaate on silloin $m_\text{A}gh_\text{a} = \frac{1}{2}m_\text{A}v_\text{l}^2$, josta ratkaistaan nopeus mäen alla:

$v_\text{l}^2 = 2gh_\text{a}$ eli $v_\text{l} = \sqrt{2gh_\text{a}}$.

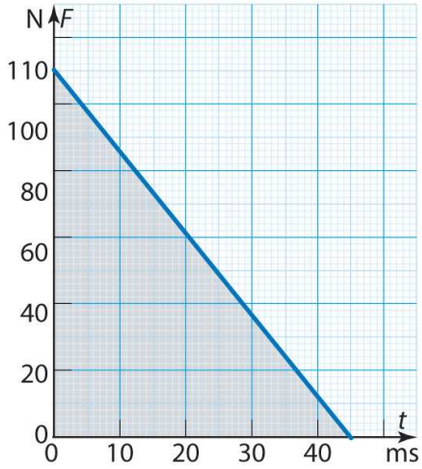
15-5. Voiman kuvaajasta *t,F*-koordinaatistossa saadaan impulssi laskemalla voiman kuvaajan ja koordinaattiakselien muodostaman kolmion fysikaalinen pinta-ala:

$I = 1/2 \cdot 45\ \text{ms} \cdot 110\ \text{N} = 2{,}475\ \text{Ns}.$

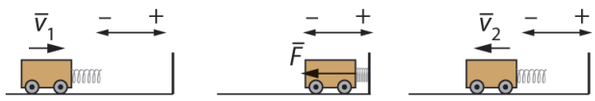
Impulssi on $I = \Delta p = mv$, joten nopeuden muutos on

$$\Delta v = \frac{I}{m} = \frac{2{,}475\ \text{Ns}}{0{,}036\ \text{kg}} \approx 69\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

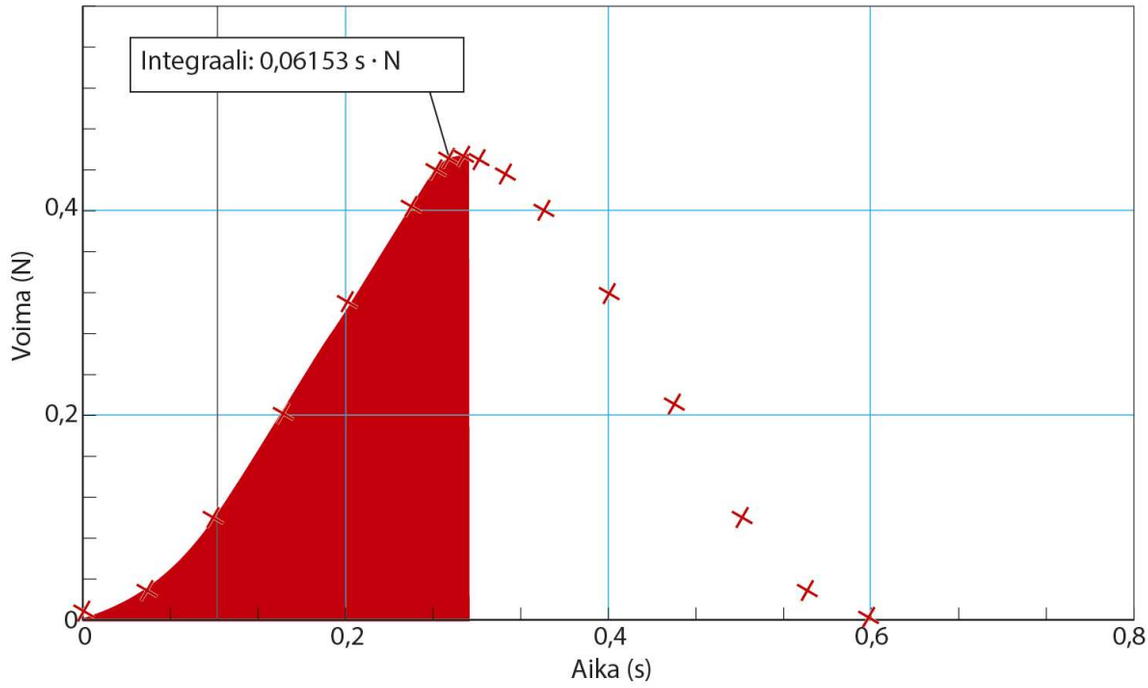
Nuolen lähtönopeus siis on 140 m/s.



15-6. a)



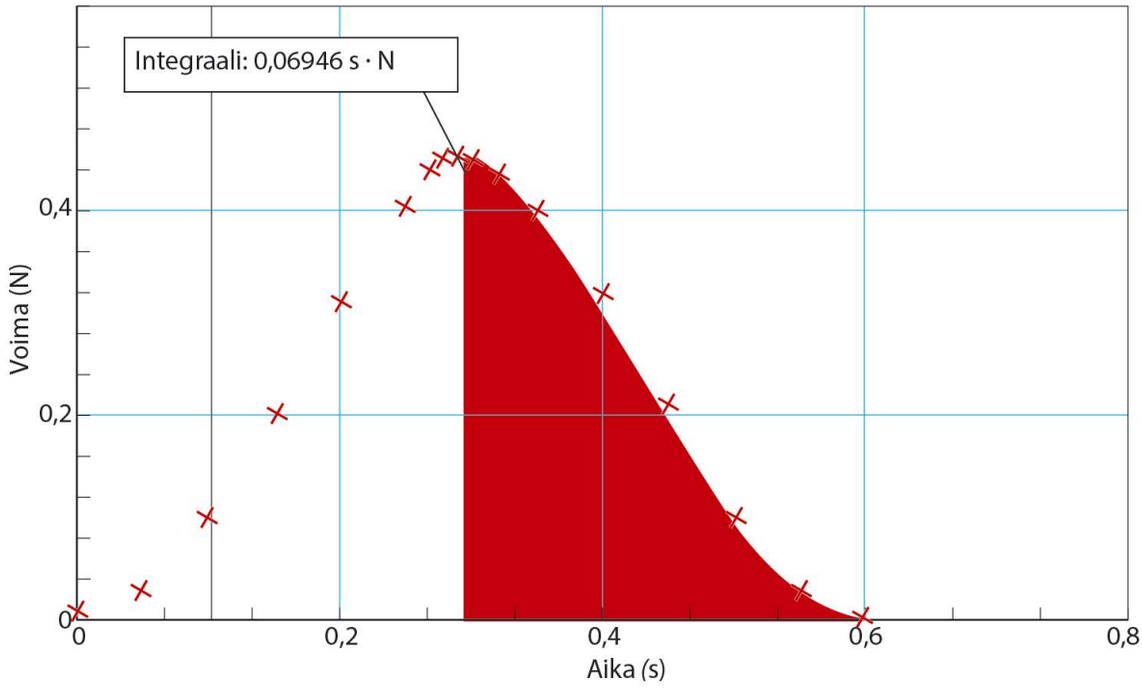
Vaunun nopeus ennen törmäystä on $\overline{v}_1$ ja törmäyksen jälkeen $\overline{v}_2$. Anturin vaunuun kohdistama voima aiheuttaa vaunun liikemäärän muutoksen, joka on yhtä suuri kuin voiman impulssi. Jousi puristuu kasaan kunnes vaunun liikesuunta muuttuu vastakkaiseksi, jolloin vaunuun kohdistuva voima on suurin ja vaunun nopeus on hetkellisesti 0 m/s. Vaunun hidastuessa törmäyksessä vaunuun kohdistuvan voiman impulssi on yhtä suuri kuin kuvion huipun vasemmalle puolelle jäävä fysikaalinen pinta-ala. Mittausohjelma antaa impulssin suuruudeksi 0,062 Ns. Impulssin suunta on kohti vaunun tulosuuntaa.



b) Impulssiperiaatteen mukaan on $\overline{I} = m\Delta\overline{v}$ eli $\overline{I} = m(\overline{0} - \overline{v}_1)$. Sovitaan vaunun tulosuunta positiiviseksi. Impulssin suunta on vaunun liikkeelle vastakkaissuuntainen, joten saadaan skalaariyhtälö $-I_1 = m(0 - v_1)$. Vaunun nopeus ennen törmäystä on

$$v_1 = \frac{I_1}{m} = \frac{0{,}06153\ \text{Ns}}{0{,}215\ \text{kg}} = 0{,}286186\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0{,}29\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Kun vaunun liikesuunta on muuttunut, jousi vapautuu aiheuttaen vaunun liikemäärään muutoksen, joka on yhtä suuri kuin jousivoiman impulssi $\overline{I}_2$. Impulssin suuruus on käyrän huipun oikealle puolelle jäävä fysikaalinen pinta-ala.



Mittausohjelma antaa impulssin arvoksi 0,06946 Ns.

Vaunun nopeuden suunta vaihtuu törmäyksessä, joten nopeus törmäyksen jälkeen on

$$v_2 = \frac{-I_2}{m} = \frac{-0{,}06946\ \text{Ns}}{0{,}215\ \text{kg}} = -0{,}323070\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx -0{,}32\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c) Impulssiperiaatteen mukaan törmäyksen aikana vaikuttavan voiman impulssi on yhtä suuri kuin vaunun liikemäärän muutos. Vaunun törmätessä anturiin impulssiperiaate skalaariyhtälönä on

$$I = m\Delta v = m(v_2 - v_1).$$

Liikemäärän muutos on

$$I = 0{,}215\ \text{kg} \cdot (-0{,}323070\ \text{m/s} - 0{,}286186\ \text{m/s}) \approx -0{,}13\ \text{kgm/s}.$$

Impulssi on yhtä suuri kuin liikemäärän muutos eli
$\Delta p = mv_2 - mv_1 = m(v_2 - 0)$, josta saadaan nopeudeksi

$$v = \frac{\Delta p}{m} = \frac{I}{m} = \frac{0{,}00722\ \text{Ns}}{0{,}0025\ \text{kg}} = 2{,}888\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Tätä nopeutta vastaava liike-energia $E_\text{k} = \frac{1}{2}mv^2$ on muuntunut potentiaalienergiaksi $E_\text{p} = mgh$ heinäsirkan saavuttaessa hyppynsä lakikorkeuden *h*.
Tästä saadaan yhtälö $mgh = \frac{1}{2}mv^2$, josta saadaan hypyn korkeudeksi

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{(2{,}888\ \text{m/s})^2}{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} \approx 0{,}43\ \text{m}.$$

b) Heinäsirkan kyky hypätä korkealle perustuu sen pitkiin takajalkoihin. Heinäsirkka painaa jalkojaan voimakkaasti alustaa vastaan, jolloin alusta kohdistaa niihin voiman Newtonin III lain mukaisesti. Jalkojen pituuden takia voimavaikutus kestää suhteellisen pitkän ajan, jolloin impulssi (liikemäärän muutos) on suuri.

15-10. Kananmunan potentiaalienergia $E_\text{p} = mgh$ muuttuu putoamisen aikana liike-energiaksi $E_\text{k} = \frac{1}{2}mv^2$. Yhtälöstä $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$ voidaan ratkaista kananmunan nopeus sen osuessa lattiaan:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 1{,}0\ \text{m}} = 4{,}42945\ \text{m/s}.$$

Kananmunan liikemäärä sen osuessa lattiaan on

$p = mv = 0{,}060\ \text{kg} \cdot 4{,}42945\ \text{m/s} \approx 0{,}27\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$. Koska kananmuna särkyy lattiaan osuessaan, törmäyksen jälkeen sen liikemäärä on nolla, joten liikemäärän muutos Δp on suuruudeltaan sama ja suunnaltaan vastakkainen kuin liikemäärä ennen törmäystä. Lattian kananmunaan kohdistaman voiman impulssi on yhtä suuri kuin kananmunan liikemäärän muutos eli $I = \Delta p = 0{,}27$ Ns ja sen suunta on ylöspäin.

Kananmunan lattiaan kohdistaman voiman impulssi on Newtonin III lain perusteella saman suuruinen eli 0,27 Ns, mutta sen suunta on alaspäin.

15-11. Lasketaan ensin pallon nopeus törmäyksen jälkeen. Törmäyksen jälkeen pallo pomppaa korkeudelle $h_2 = 3{,}1$ m, jolloin sen liike-energia on muuttunut potentiaalienergiaksi eli $\frac{1}{2}mv_2^{\,2} = mgh_2$.

Ratkaistaan tästä nopeuden suuruus törmäyksen jälkeen:

$$v_2 = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ (\text{m/s}^2) \cdot 3{,}1\ \text{m}} = 7{,}79885\ \text{m/s}.$$

Pallon nopeus pienenee törmäyksessä, joten

$\Delta p = mv_2 - mv_1 = -0{,}91$ kgm/s.

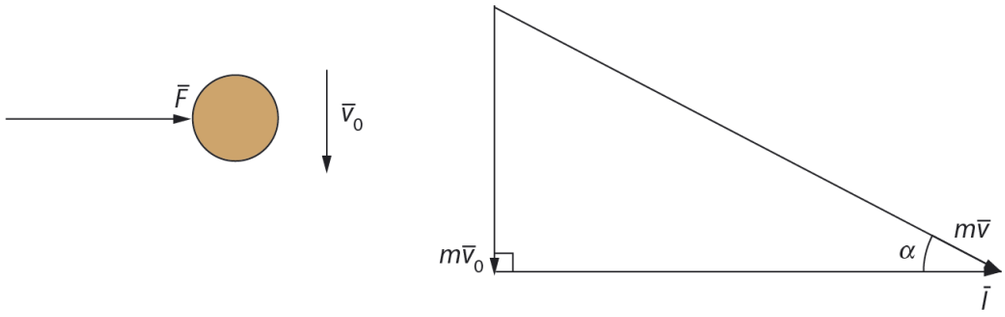
Pallon nopeus ennen törmäystä on silloin

$$v_1 = \frac{mv_2 - \Delta p}{m} = \frac{0{,}20\ \text{kg} \cdot 7{,}79885\ \text{m/s} - (-0{,}91\ \text{kg} \cdot \text{m/s})}{0{,}20\ \text{kg}} = 12{,}3489\ \text{m/s}.$$

Mekaanisen energian säilymislaista saadaan $\frac{1}{2}mv_1^{\,2} = mgh_1$, josta saadaan pudotuskorkeudeksi

$$h_1 = \frac{v_1^{\,2}}{2 \cdot g} = \frac{\left(12{,}3489\ \text{m/s}\right)^2}{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} \approx 7{,}8\ \text{m}.$$

15-12. Mailan osuessa palloon voiman impulssi on $\overline{I} = \Delta\overline{p} = m\overline{v} - m\overline{v}_0 = m\overline{v} + (-m\overline{v}_0)$. Impulssi voidaan arvioida kuvaajasta fysikaalisena pinta-alana (likimain kolmion alana):
$I \approx 3{,}3$ Ns.



Voiman impulssi on liikemäärän muutos vaakasuunnassa eli $I = mv_x$, joten

$$v_x = \frac{I}{m} = \frac{3{,}3\,\text{Ns}}{0{,}15\,\text{kg}} = 22\,\text{m/s}.$$

Pallon nopeus pystysuunnassa on $v_0 = v_y = 11{,}2$ m/s.

Nopeudeksi saadaan

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(22\,\text{m/s}\right)^2 + \left(11{,}2\,\text{m/s}\right)^2} \approx 25\,\text{m/s}.$$

Nopeuden suuntakulma on α: $\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}$, josta $\alpha \approx 27°$ vaakatasoon nähden alaviistoon.

15-13. **a)** Voiman impulssi on sama kuin liikemäärän muutos eli

$\bar{I} = \Delta\bar{p}$ eli $\bar{F}\Delta t = \bar{p}_\text{l} - \bar{p}_\text{a} = m_\text{a}\left(\bar{v}_\text{l} - \bar{v}_\text{a}\right) = m_\text{a}\cdot\bar{0} - m_\text{a}\bar{v}_\text{a}$, sillä auto pysähtyy törmäyksessä eli auton nopeus lopussa on $v_\text{l} = 0$. Kun auton nopeuden suunta valitaan negatiiviseksi suunnaksi, saadaan voimaksi

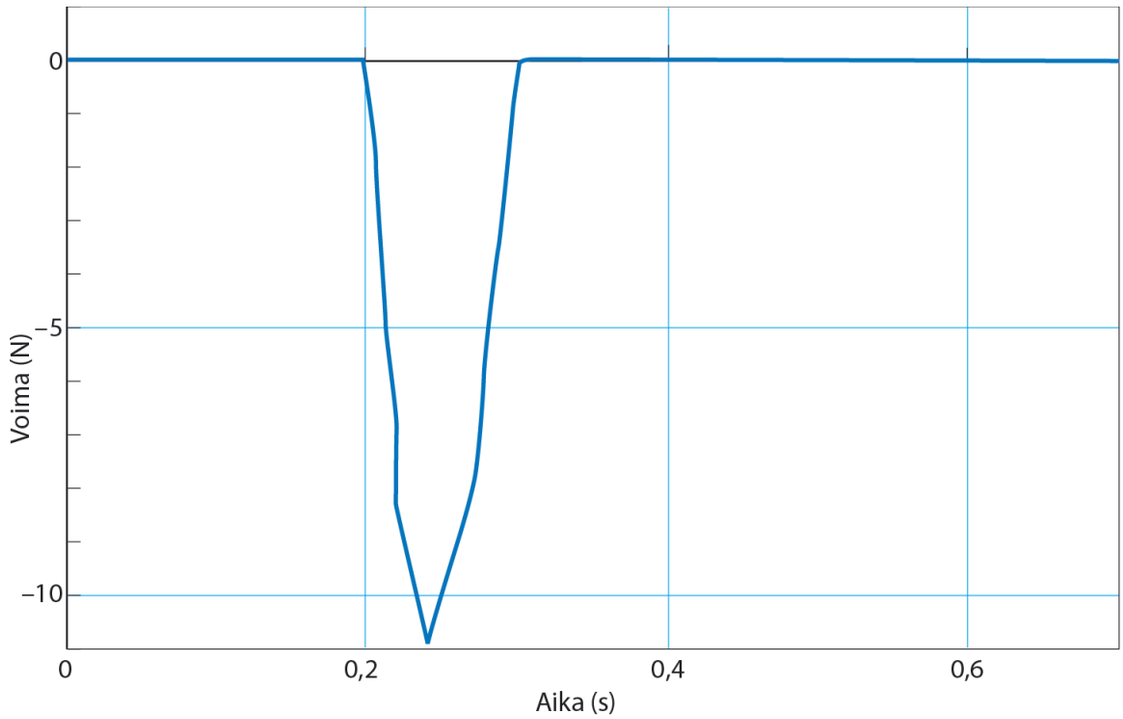
$$F = \frac{m_\text{a} v_\text{a}}{\Delta t_\text{a}} = \frac{1300\ \text{kg}\cdot 15{,}6\ \text{m/s}}{0{,}072\ \text{s}} = 281\ 883\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2} \approx 2{,}8\cdot 10^5\ \text{N}.$$

Voima on positiivinen eli sen suunta on auton nopeuden suunnalle vastakkainen.

b) Koska aikuisnuken nopeus törmäyksen alkaessa on sama kuin auton nopeus, saadaan voimalle samalla tavalla kuin a-kohdassa yhtälö

$$F = \frac{m_h v_a}{\Delta t_n} = \frac{75\ \text{kg} \cdot 15{,}6\ \text{m/s}}{0{,}115\ \text{s}} = 10173{,}9 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \approx 1{,}0 \cdot 10^4\ \text{N}.$$

15-14. **a)**



Voima, aika-kuvaajasta saadaan törmäyksen kestoksi 0,10 s.

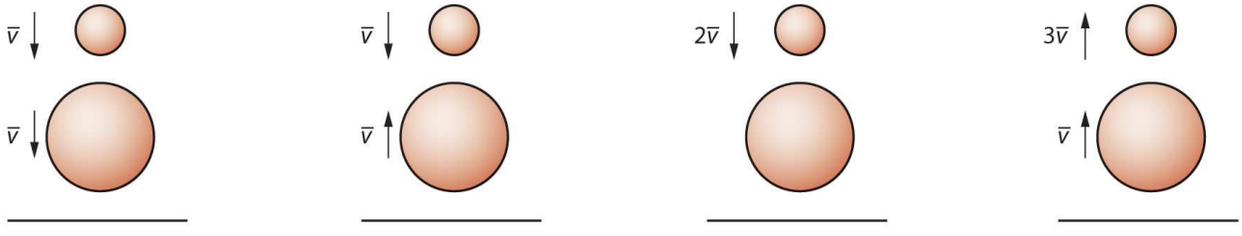
b) Kohdan a kuvaajasta saadaan voiman suurimmaksi arvoksi 11 N.

c) Nopeus, aika-kuvaajasta saadaan nopeudeksi ennen törmäystä 0,69 m/s ja törmäyksen jälkeen −0,54 m/s, joten nopeuden muutos on $\Delta v = -0{,}54 - 0{,}69\ \text{m/s} = -1{,}23\ \text{m/s}$.
Impulssi on yhtä suuri kuin liikemäärän muutos, joten
$I = \Delta p = m\Delta v = 0{,}250\ \text{kg} \cdot (-1{,}23\ \text{m/s}) \approx -0{,}31\ \text{Ns}$.

Suuntakulma α positiivisen x-akselin suhteen saadaan trigonometrian avulla:

$\tan\alpha = \frac{u_y}{u_x} = \frac{1{,}61\,\text{m/s}}{0{,}924\,\text{m/s}}$, josta saadaan suuntakulmalle arvo $\alpha \approx 60^\circ$.

16-15. Kun pallot putoavat, ne saavat saman nopeuden v. Voimme olettaa, että koripallon törmäys lattiaan on likipitäen kimmoisa, jolloin koripallon nopeus sen alkaessa liikkua ylöspäin on myös suunnilleen v. Tällöin jalkapallon nopeus koripallon suhteen on niiden törmätessä $2v$. Voidaan olettaa, että pallojen törmäys on kimmoinen, jolloin jalkapallo liikkuu törmäyksen jälkeen ylöspäin nopeudella $2v$ koripallon suhteen. Lattian suhteen se siis liikkuu nopeudella $3v$. Jalkapallon nopeuden suuruus siis kolminkertaistuu törmäyksessä eli sen liike-energia $\frac{1}{2}mv^2$ yhdeksänkertaistuu. Jos kaikki törmäykset olisivat täysin kimmoisia ja ilmanvastus ei vaikuttaisi, nousisi jalkapallo siis yhdeksän kertaa korkeammalle kuin mistä se pudotettiin, koska mekaanisen energian säilymislain mukaan $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$. Ihan niin korkealle se ei nouse käytännössä, mutta yllättävän korkealle kuitenkin.



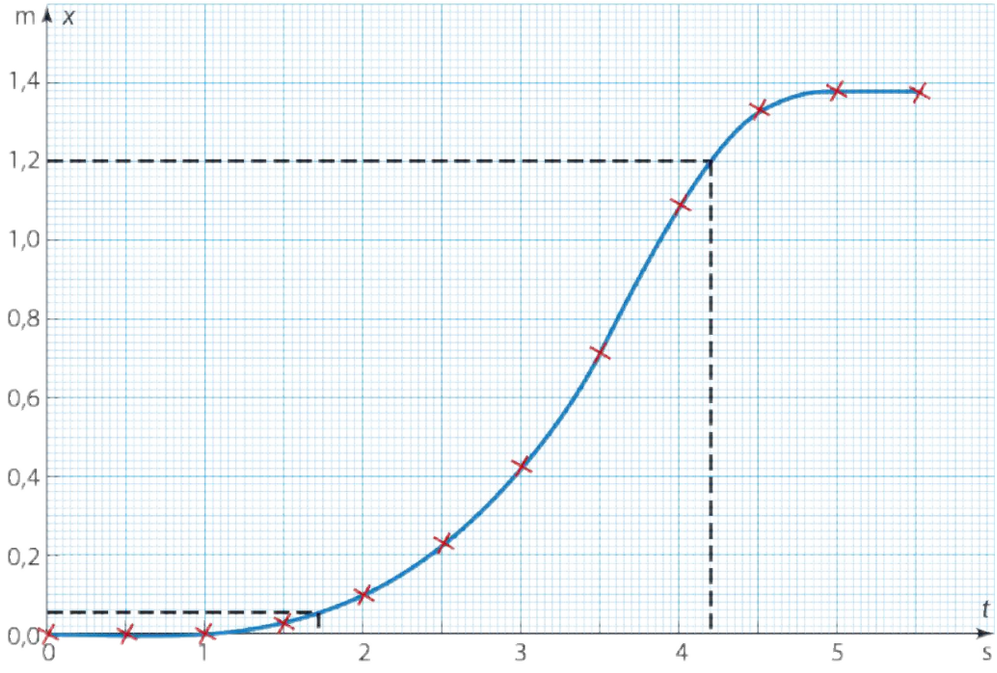
Kuvat esittävät pallojen nopeuksia tapahtuman eri vaiheissa. Ensimmäisessä kuvassa molemmat pallot liikkuvat alaspäin. Toisessa kuvassa iso pallo on osunut jo lattiaan ja liikkuu ylöspäin, ja pieni pallo on vielä matkalla alaspäin. Kolmas kuva esittää samaa vaihetta kuin toinen kuva, mutta isomman pallon kannalta nähtynä: koska iso pallo

liikkuu nopeudella v ylöspäin ja pieni pallo samalla nopeudella alaspäin, pieni pallo lähestyy isoa palloa nopeudella $2v$. Neljännessä kuvassa molemmat pallot ovat matkalla ylöspäin.

TESTAA OSAATKO S. 159

1. a, b, c **2.** b **3.** a, b **4.** a, c **5.** a, b **6.** c **7.** a, b, c **8.** a, b, c 9**.** a **10.** a

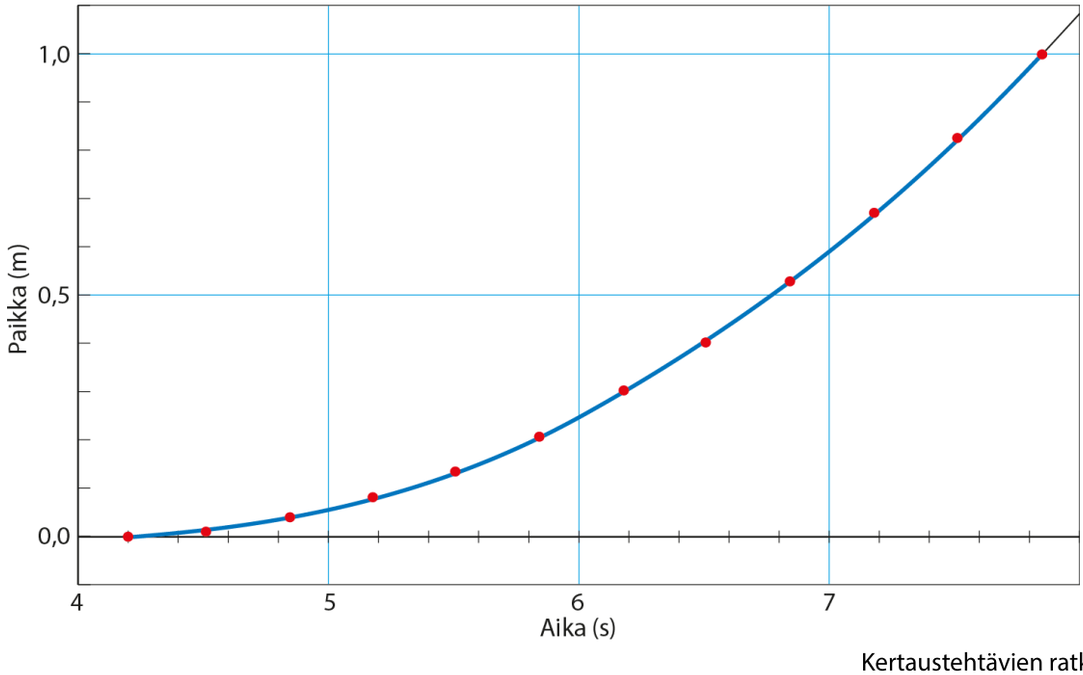
5. **a)** Auton paikka x ajan t funktiona:



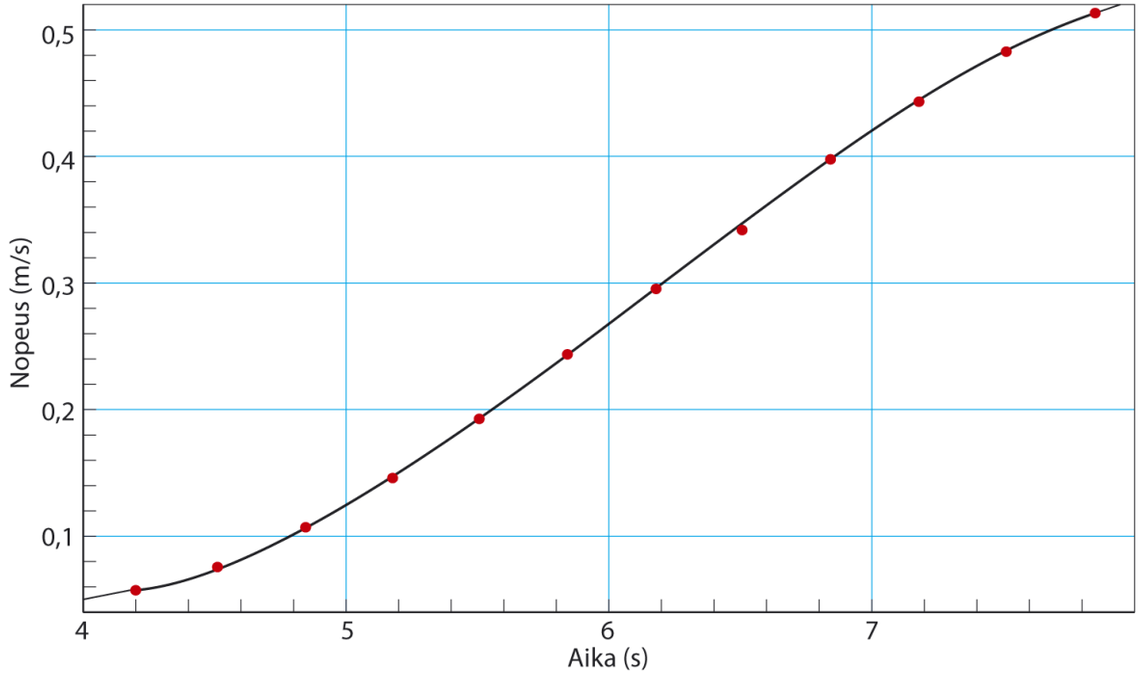
b) Luetaan kuvaajasta auton paikka hetkillä 1,7 s ja 4,2 s. Keskinopeus kysytyllä aikavälillä on $v_k = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1{,}2\ \text{m} - 0{,}05\ \text{m}}{4{,}2\ \text{s} - 1{,}7\ \text{s}} \approx 0{,}46\ \text{m/s}$.

c) Kuvaajasta nähdään, että auto lähtee liikkeelle, kun $t = 1{,}00$ s ja pysähtyy, kun $t = 4{,}85$ s. Auto liikkuu siis 4,85 s – 1,00 s ≈ 3,9 s ajan.

6. **a)** Kappaleen paikan kuvaaja.



b) Kappaleen nopeuden kuvaaja.



c) Kappaleen kiihtyvyys on likimain tasaista oheisen kuvaajan aikavälillä 5,5…6,9 s.

7. Matka, jonka ilmatyynyn on joustettava, saadaan yhtälöstä $s = \frac{1}{2}at^2$, jossa a on nuken maksimikiihtyvyys. Sijoitetaan aika $t = \frac{v}{a}$ yhtälöön $s = \frac{1}{2}at^2$:

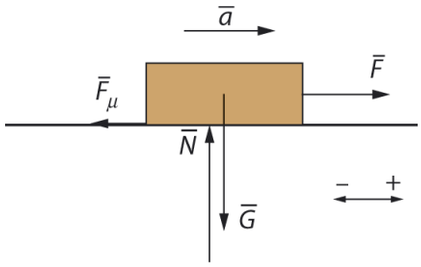
$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a \cdot \left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{v^2}{2a} = \frac{\left(\frac{82}{3{,}6}\ \text{m/s}\right)^2}{2 \cdot 250\ \text{m/s}^2} \approx 1{,}03765\ \text{m}.$$

Kun auton etuosa lyhenee törmäyksessä 65 cm, ilmatyynyn on joustettava vähintään 1,03765 m – 0,65 m ≈ 39 cm.

8. **a)** Auton liike on esitetty *t*,*x*-koordinaatistossa.

Koska kuvaaja aikavälillä 0…25 s on suora, auton nopeus on vakio ja liike tasaista.

19. **a)** Newtonin II lain mukaan vaakasuunnassa on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$ eli $\overline{F} + \overline{F}_\mu = m\overline{a}$.

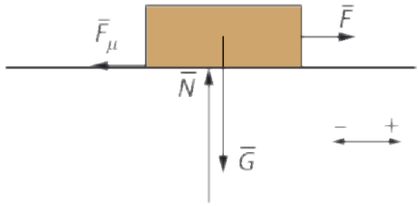


Kun liikkeen suunta valitaan positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö

$F - F_\mu = ma$ eli $F - \mu mg = ma$. Kitkakerroin on

$$\mu = \frac{F - ma}{mg} = \frac{4{,}0\ \text{N} - 1{,}0\ \text{kg} \cdot 2{,}0\ \text{m/s}^2}{1{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} = 0{,}203874 \approx 0{,}20\,.$$

b) Kun liike on tasaista, vetävän voiman $\overline{F}$ ja liikevastusten, tässä tapauksessa kitkan $\overline{F}_\mu$, summa on nolla eli $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$.



Kun liikkeen suunta valitaan positiiviseksi, saadaan $F - F_\mu = 0$.

Vetävän voiman suuruus on

$F = F_\mu = \mu mg = 0{,}203874 \cdot 1{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \approx 2{,}0\ \text{N}$.

Vetävä voima tekee työtä samalla teholla kuin liikevastukset muuntavat mekaanista työtä muihin energiamuotoihin esimerkiksi lämmöksi ja ääneksi. Myös pintojen kuluminen eli pintojen rakenteen muuttuminen vaatii energiaa.

3-7. **a)** Metrojunan suurin nopeus on 36 m/s.

b) Junan kiihdytysaika on 45 s.

c) Junan jarrutusaika on 30 s.

d) Junan liike on tasaista 30 s.

e) Junan keskikiihtyvyys pysäkiltä lähdettäessä on

$$a_{\mathrm{k}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{36{,}0\ \mathrm{m/s} - 0{,}0\ \mathrm{m/s}}{45{,}0\ \mathrm{s} - 0{,}0\ \mathrm{s}} = \frac{36{,}0\ \mathrm{m/s}}{45{,}0\ \mathrm{s}} \approx 0{,}80\ \mathrm{m/s^2}.$$

ja jarrutettaessa ennen seuraavaa pysäkkiä

$$a_{\mathrm{k}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{0{,}0\ \mathrm{m/s} - 30\ \mathrm{m/s}}{105{,}0\ \mathrm{s} - 75{,}0\ \mathrm{s}} = \frac{-30\ \mathrm{m/s}}{30{,}0\ \mathrm{s}} = -1{,}2\ \mathrm{m/s^2}.$$

f) Metroasemien välinen etäisyys saadaan fysikaalisena pinta-alana:

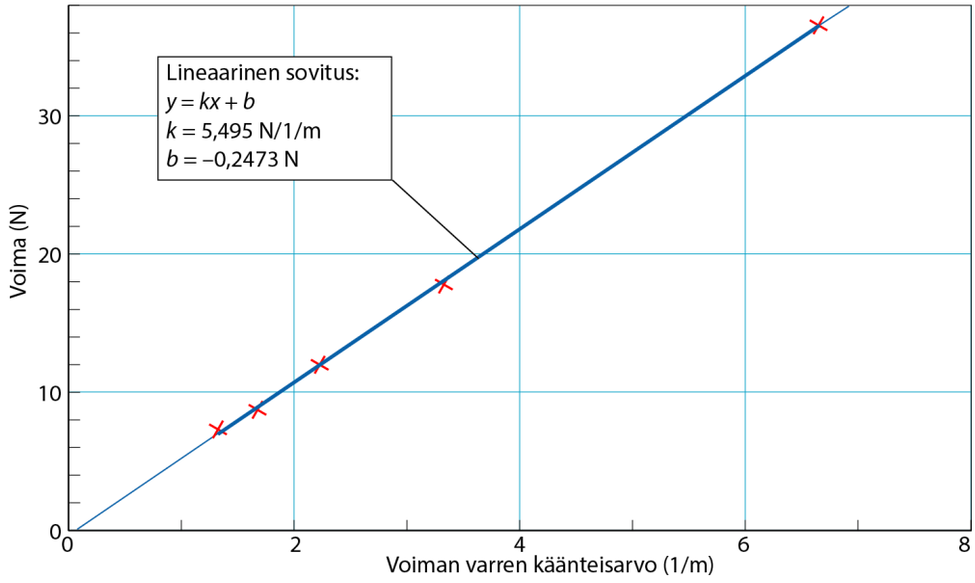
$$s = \frac{\Delta t_1 v}{2} + \Delta t_2 v + \frac{\Delta t_3 v}{2}$$

$$= \frac{45{,}0\,\mathrm{s} \cdot 36{,}0\,\mathrm{m/s}}{2} + (75{,}0\,\mathrm{s} - 45{,}0\,\mathrm{s}) \cdot 36{,}0\,\mathrm{m/s} + \frac{(105{,}0\,\mathrm{s} - 75{,}0\,\mathrm{s}) \cdot 30{,}0\,\mathrm{m/s}}{2} \approx 2{,}4\ \mathrm{km}.$$

9-8. Koska voiman momentti on kääntäen verrannollinen voiman vaikutussuoran etäisyyteen kiertoakselista, lisätään taulukkoon arvot $1/r$.

r (m)	0,15	0,30	0,45	0,60	0,75
$\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\text{m}}\right)$	6,67	3,33	2,22	1,67	1,33
F (N)	36,5	17,8	12,0	8,8	7,3

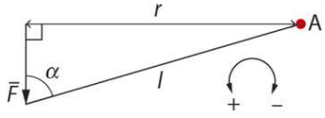
Viedään arvot $1/r, F$ mittausohjelmaan.



Mittausohjelman perusteella voiman momentti on 5,5 Nm. Momentin kiertosuunta on vastapäivään.

9-11. Polkupyörän polkimeen kohdistuu pyöräilijän painon suuruinen voima eli $F = G$.

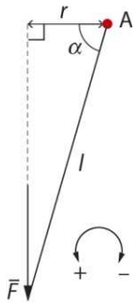
a) Voiman momentti on



$$M_{\text{A}} = Fr = Gr = mgr = mgl\sin\alpha = 57\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}17\ \text{m} \cdot \sin 75° \approx 92\ \text{Nm}.$$

Momentti on 92 Nm vastapäivään.

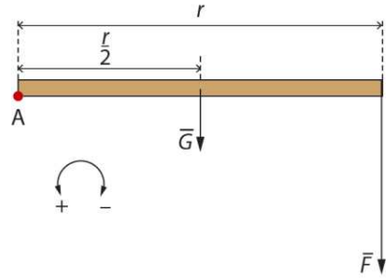
b) Voiman momentti on



$$M_{\mathrm{A}} = Fr = Gr = mgr = mgl\cos\alpha = 57\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}17\ \mathrm{m} \cdot \cos 75° \approx 25\ \mathrm{Nm}.$$

Momentti on 25 Nm vastapäivään.

9-12.



Uimahyppääjän paino on yhtä suuri kuin uimahyppääjän jalkapohjien lautaan kohdistama voima $\overline{F}$. Voiman $\overline{F}$ ja laudan painon $\overline{G}$ momenttien suunnat ovat negatiivisia akselin A suhteen.

$$\sum M_{\mathrm{A}} = -G \cdot \frac{r}{2} - Fr = -m_{\mathrm{lauta}} g \cdot \frac{r}{2} - m_{\mathrm{hyppääjä}} g \cdot r$$

$$= -15\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{2{,}0\ \mathrm{m}}{2} - 78\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 2{,}0\ \mathrm{m} \approx -1700\ \mathrm{Nm}.$$

Momentti on 1800 Nm myötäpäivään. Huomaa: Laudan vapaa pää voi olla myös vasemmalla, jolloin kiertosuunta on vastapäivään.

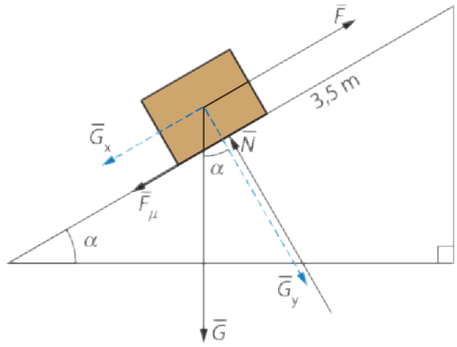
11-4. **a)** Koska piano lasketaan tasaisella nopeudella, on nosturin pianoon kohdistama voima $\overline{F}$ saman suuruinen kuin pianon paino $\overline{G}$ eli $F = G = mg$. Voiman $\overline{F}$ suunta on ylöspäin eli vastakkainen siirtymälle. Voiman tekemä työ on silloin

$$W = -F \cdot s = -mg \cdot s = -220\ \text{kg} \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 12\ \text{m} = -25{,}8984\ \text{kJ} \approx -26\ \text{kJ}.$$

Painon tekemä työ on

$$W = G \cdot s = mg \cdot s = 220\ \text{kg} \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 12\ \text{m} = 25{,}8984\ \text{kJ} \approx 26\ \text{kJ}.$$

11-15. Kaalilaatikkoon vaikutti luiskan suunnassa kolme voimaa, voima $\overline{F}$, jolla viljelijä työnsi laatikkoa, laatikon painon komponentti luiskan suunnassa ja kitka. Koska liike oli tasaista, nämä vastakkaisiin suuntiin vaikuttaneet voimat olivat yhtä suuret eli $F = G_x + F_\mu$ ja $N = G_y$, jossa G_y on painon komponentti luiskan suunnassa ja G_x luiskaa vastaan kohtisuorassa suunnassa. Koska pinnan tukivoima ja painon pintaa vastaan kohtisuora komponentti ovat yhtä suuret, on kitkan suuruus $F_\mu = \mu N = \mu G_y$. Silloin



$$F = G_x + F_\mu = G_x + \mu G_y = G\cos\alpha + \mu G\sin\alpha = mg\cos\alpha + \mu mg\sin\alpha$$
$$= 45\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2\left(\sin 38° + 0{,}32 \cdot \cos 38°\right) = 383{,}101\ \text{N}.$$

Voiman tekemä työ on $W = F \cdot s = 434{,}838\ \text{N} \cdot 3{,}5\ \text{m} \approx 1{,}3\ \text{kJ}$.

12-1. **a)** Liike-energia on $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 60\ \text{kg} \cdot \left(\frac{6}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 83\ \text{J}.$

b) Liike-energia on $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 10\ \text{kg} \cdot \left(\frac{100}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \approx 3{,}9\ \text{kJ}.$

13-8.

e) Valitaan potentiaalienergian nollatasoksi vedenpinta alhaalla turbiinin tasolla, jolloin vesivoimalaitoksen tuottoteho saadaan yhtälöstä $P_{\text{tuotto}} = \eta P_{\text{otto}} = \eta \frac{E_{\text{otto}}}{t} = \eta \frac{mgh}{t}$, jossa η hyötysuhde, ρ veden tiheys, g putoamiskiihtyvyys ja h pudotuskorkeus.

Tiheys on $\rho = m/V$ ja massa $m = \rho V$, joten tuottoteho on $P_{\text{tuotto}} = \frac{\eta \rho V g h}{t} = \eta \rho g h \frac{V}{t}$.

Virtaavan veden tilavuus aikayksikössä eli tilavuusvirta on

$$\frac{V}{t} = \frac{P_{\text{tuotto}}}{\eta \rho g h} = \frac{120 \cdot 10^6 \text{ W}}{0{,}84 \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 32{,}4 \text{ m}} \approx 450 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}.$$

Pyhäkosken vesivoimalaitoksen virtaama on $450 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$.

14-10. Mekaniikan energiaperiaate $E_{\text{p,a}} + E_{\text{k,a}} + W = E_{\text{p,l}} + E_{\text{k,l}}$ tulee muotoon

$mgh + 0 + W = 0 + \frac{1}{2} m v_1^2$, jossa W on kitkan tekemä työ

$W = F_\mu \cdot s = \mu N \cdot s = \mu mg \cdot s.$

Yhtälöstä $mgh + 0 + \mu mgs = 0 + \frac{1}{2} m v_1^2$ saadaan nopeudelle liukumäen lopussa

$$v_1 = \sqrt{2(gh - \mu g s)} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \left(23 \text{ m} - 0{,}15 \cdot 141 \text{ m}\right)} \approx 6{,}0 \text{ m/s}.$$

Jos kitkakerroin olisi nolla, nopeus olisi $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 23 \text{ m}} \approx 21 \text{ m/s}^2$.

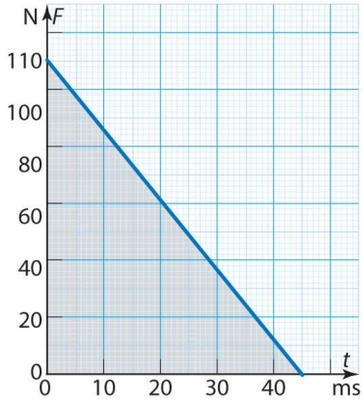
15-5. Voiman kuvaajasta *t,F*-koordinaatistossa saadaan impulssi laskemalla voiman kuvaajan ja koordinaattiakselien muodostaman kolmion fysikaalinen pinta-ala:

$I = 1/2 \cdot 45\ \text{ms} \cdot 110\ \text{N} = 2{,}475\ \text{Ns}.$

Impulssi on $I = \Delta p = mv$, joten nopeuden muutos on

$$\Delta v = \frac{I}{m} = \frac{2{,}475\ \text{Ns}}{0{,}036\ \text{kg}} \approx 69\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Nuolen lähtönopeus siis on 69 m/s.



15-7. Valitaan pallon alkuperäinen liikesuunta positiiviseksi suunnaksi. Silloin $v_1 = 25$ m/s ja $v_2 = -35$ m/s. Pallon liikemäärän muutos on silloin

$\Delta p = mv_2 - mv_1 = m(v_2 - v_1)$

$= 0{,}065\ \text{kg} \cdot (-35\ \text{m/s}) - 25\ \text{m/s}) = -3{,}9\ \text{kgm/s}$. Impulssiperiaatteen mukaan liikemäärän muutos on yhtä suuri kuin impulssi $I = Ft$, jossa F on kappaleeseen kohdistunut keskimääräinen voima ja Δt on voiman vaikutusaika. Saadaan yhtälö $Ft = \Delta p$, josta voidaan ratkaista keskimääräinen voima: $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{-3{,}9\ \text{kg} \cdot \text{m/s}}{4{,}0\ \text{ms}} \approx -0{,}98\ \text{kN}$.

Keskimääräisen voiman suuruus on 0.98 kN.

15-14.

c) Nopeus, aika-kuvaajasta saadaan nopeudeksi ennen törmäystä 0,69 m/s ja törmäyksen jälkeen −0,54 m/s, joten nopeuden muutos on
$\Delta v = -0{,}54 - 0{,}69\ \text{m/s} = -1{,}23\ \text{m/s}$.
Impulssi on yhtä suuri kuin liikemäärän muutos, joten
$I = \Delta p = m\Delta v = 0{,}570\ \text{kg} \cdot (-1{,}23\ \text{m/s}) \approx -0{,}70\ \text{Ns}$.

38. **a)** Gravitaatiovoiman (painon) $\vec{G}$ komponentti liikkeen suunnassa on

$G_x = G\sin 20{,}0° = mg\sin 20{,}0° = 13\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \sin 20{,}0° = 43{,}6178\ \text{N}.$

Gravitaatiovoiman tekemä työ on

$W_g = G_x s = 43{,}6178\ \text{N} \cdot 2{,}0\ \text{m} = 87{,}2356\ \text{J} \approx 87\ \text{J}.$

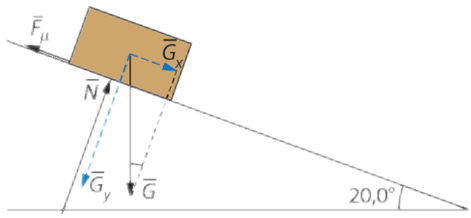
b) Kitkan suuruus on $F = \mu N$ ja suunta tasoa ylöspäin. Tukivoiman suuruus N on sama kuin gravitaatiovoiman pintaa vastaan kohtisuora komponentti eli

$N = G_y = mg\cos 20{,}0° = 13\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \cos 20{,}0° = 119{,}839\ \text{N}.$

Koska kitka vaikuttaa vastakkaiseen suuntaan kuin mihin laatikko liikkuu, sen tekemä työ on negatiivinen. Kitkan tekemä työ on

$W_\mu = -F_\mu s = -\mu N s = -0{,}22 \cdot 119{,}839\ \text{N} \cdot 2{,}0\ \text{m} = -52{,}7292\ \text{J} \approx -53\ \text{J}.$

Kokonaisvoiman tekemän työ on $W = W_g + W_\mu = 87{,}2356\ \text{J} - 52{,}7292\ \text{J} \approx 35\ \text{J}.$



Kitkan suuruus on $F_\mu = \mu N$. Pystysuunnassa lapsen ja pulkan liikeyhtälö on $\overline{N} + \overline{G} = \overline{0}$. Kun suunta ylös sovitaan positiiviseksi, liikeyhtälö skalaariyhtälönä on $N - G = 0$ eli $N = G$. Kitkan suuruus on $F_\mu = \mu mg$. Lapsen liukuma matka on

$$s = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2}{F_\mu} = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2}{\mu mg} = \frac{v_1^2}{2\mu g} = \frac{(5{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2 \cdot 0{,}77 \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 1{,}7\,\text{m}.$$

14-10. Mekaniikan energiaperiaate $E_{\text{p,a}} + E_{\text{k,a}} + W = E_{\text{p,l}} + E_{\text{k,l}}$ tulee muotoon

$mgh + 0 + W = 0 + \frac{1}{2}mv_1^2$, jossa W on kitkan tekemä työ

$W = -F_\mu \cdot s = -\mu N \cdot s = -\mu mg \cdot s.$

Yhtälöstä $mgh + 0 - \mu mgs = 0 + \frac{1}{2}mv_1^2$ saadaan nopeudelle liukumäen lopussa

$$v_1 = \sqrt{2(gh - \mu gs)} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2\,(23\ \text{m} - 0{,}15 \cdot 141\ \text{m})} \approx 6{,}0\ \text{m/s}.$$

Jos kitkakerroin olisi nolla, nopeus olisi

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 23\ \text{m}} \approx 21\ \text{m/s}^2.$$

14-11. **a)** Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan on $E_{\text{p,a}} + E_{\text{k,a}} + W = E_{\text{p,l}} + E_{\text{k,l}}$ eli $m_\text{A}gh_\text{a} + \frac{1}{2}m_\text{A}v_\text{a}^2 + W = m_\text{A}gh_\text{l} + \frac{1}{2}m_\text{A}v_\text{l}^2$. Liikevastusten tekemä työ oletetaan nollaksi. Oletetaan, että pulkat lähtevät levosta, eli liike-energia alussa on nolla. Valitaan potentiaalienergian nollataso mäen alle.

Mekaniikan energiaperiaate on silloin $m_\text{A}gh_\text{a} = \frac{1}{2}m_\text{A}v_\text{l}^2$, josta ratkaistaan nopeus mäen alla:

$v_\text{l}^2 = 2gh_\text{a}$ eli $v_\text{l} = \sqrt{2gh_\text{a}}$.

e) Valitaan potentiaalienergian nollatasoksi vedenpinta alhaalla turbiinin tasolla, jolloin vesivoimalaitoksen tuottoteho saadaan yhtälöstä $P_{\text{tuotto}} = \eta P_{\text{otto}} = \eta \frac{E_{\text{otto}}}{t} = \eta \frac{mgh}{t}$, jossa η hyötysuhde, ρ veden tiheys, g putoamiskiihtyvyys ja h pudotuskorkeus.

Tiheys on $\rho = m/V$ ja massa $m = \rho V$, joten tuottoteho on $P_{\text{tuotto}} = \frac{\eta \rho V g h}{t} = \eta \rho g h \frac{V}{t}$.

Tuottotehoksi saadaan

$$P_{\text{tuotto}} = \frac{\eta \rho V g h}{t} = \eta \rho g h \frac{V}{t} = 0{,}84 \cdot 1000 \ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}81 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 32{,}4 \ \text{m} \cdot \ \frac{450 \ \text{m}^3}{\text{s}} \approx 120 \ \text{W}.$$

TEHTÄVIEN RATKAISUT

12-1. **a)** Liike-energia on $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\cdot 60\ \mathrm{kg}\cdot\left(\frac{6}{3{,}6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 83\ \mathrm{J}.$

b) Liike-energia on $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\cdot 10\ \mathrm{kg}\cdot\left(\frac{100}{3{,}6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 \approx 3{,}9\ \mathrm{kJ}.$

12-2. Henkilöauton liike-energia on

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\cdot 1250\ \mathrm{kg}\cdot\left(\frac{90{,}0}{3{,}6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 390{,}625\ \mathrm{kJ}.$$

Liike-energian yhtälöstä saadaan rekan nopeudeksi

$$v_\mathrm{rekka} = \sqrt{\frac{2E_\mathrm{k}}{m_\mathrm{rekka}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 390{,}625\cdot 10^3\ \mathrm{J}}{40\cdot 10^3\ \mathrm{kg}}} = 4{,}41942\cdot 3{,}6\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \approx 16\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

12-3. **a)** Liike-energia on verrannollinen nopeuden toiseen potenssiin. Esimerkiksi jos nopeus kaksinkertaistuu, liike-energia nelinkertaistuu.

b) Koska nopeus pienenee puoleen alkuperäisestä arvostaan, liike-energia pienenee neljäsosaan.

12-4. **a)** Auton nopeus 180 metrin kohdalla on 100 km/h. Sen liike-energia on silloin $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\cdot 1250\ \mathrm{kg}\cdot\left(\frac{100}{3{,}6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 0{,}482253\ \mathrm{MJ} \approx 0{,}48\ \mathrm{MJ}.$

b) Koska liike-energia on verrannollinen nopeuden neliöön, liike-energia pienenee puoleen silloin, kun nopeus pienee tekijällä $\sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0{,}71$ eli nopeus on $\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot 100$ km/h. Kun kiihtyvyys on vakio, auton nopeus hetkellä t on $v = at$ ja auton kulkema matka $s = \frac{1}{2}at^2$.

Ratkaisemalla ensimmäisestä yhtälöstä aika, $t = \frac{v}{a}$, ja sijoittamalla se jälkimmäiseen yhtälöön, saadaan $s = \frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{v^2}{a}$ eli $v^2 = 2as$.

Saadaan verranto $\frac{2ax}{2a \cdot 180\ \text{m}} = \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot 100\ \text{km/h}}{100\ \text{km/h}}\right)^2$ eli $\frac{x}{180\ \text{m}} = \frac{1}{2}$,

jossa x on kysytty matka.

Saadaan $x = 180\ \text{m} \cdot \frac{1}{2} \approx 90\ \text{m}$.

12-5. Jousen aiheuttaman voiman tekemä työ on

$W = F \cdot s = 102\ \text{N} \cdot 0{,}73\ \text{m} = 73{,}7446\ \text{J}$.

Tämä työ on työ-energiaperiaatteen mukaan sama kuin nuolen liike-energian muutos eli

$$W = \Delta E_\text{k} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_\text{a}^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - 0.$$

Ratkaistaan tästä yhtälöstä nuolen saavuttama nopeus:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot W}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 73{,}7446\ \text{J}}{0{,}085\ \text{kg}}} \approx 42\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

12-6. Molemmissa tapauksissa loppunopeus on nolla. Jarruttavan voiman $\overline{F}$ tekemä työ on liike-energian muutos eli

$$W = 0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}mv^2.$$

Toisaalta voiman tekemä työ on $W = -Fx$, jossa etumerkki johtuu siitä, että voiman suunta on vastakkainen siirtymän suuntaan nähden.

Saadaan yhtälö

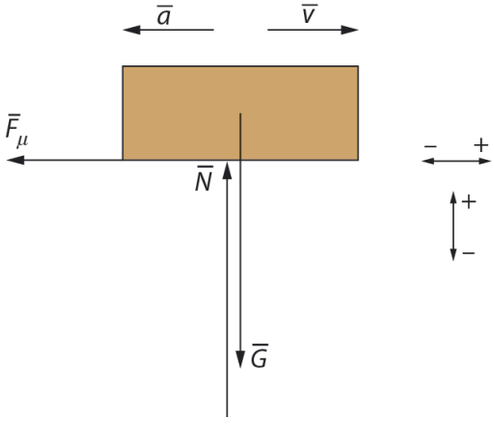
$$F\Delta x = \frac{1}{2}mv^{\,2} \text{ eli } \Delta x = \frac{m}{2F}v^{\,2}.$$

Koska auton massa m ja jarruttava voima F ovat molemmissa tapauksissa samat, havaitaan että jarrutusmatka on verrannollinen nopeuden toiseen potenssiin. Silloin

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{v_2^{\,2}}{v_1^{\,2}} = \frac{\left(120\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2}{\left(60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)^2} = 4 \text{ eli } \Delta x_2 = 4\Delta x_1 = 4 \cdot 20\ \text{m} = 80\ \text{m}.$$

Jarrutusmatka on 80 m.

12-7. **a)**



Työ-energiaperiaatteen mukaan liike-energian muutos on yhtä suuri kuin kokonaisvoiman tekemä työ eli $\Delta E_\text{k} = W$. Vastusvoimien (kitka ja ilmanvastus) suunta on siirtymän suunnalle vastakkainen, joten niiden tekemä työ on negatiivinen. Koska ilmanvastus oletetaan nollaksi, työ-energiaperiaatteen mukaan on $\Delta E_\text{k} = -F_\mu \cdot \Delta x$, jossa kitkan suuruus on $F_\mu = \mu N$.

Kappaleen liikeyhtälö y-suunnassa on Newtonin II lain mukaan $\sum \overline{F} = \overline{0}$ eli $\overline{G} + \overline{N} = \overline{0}$. Suunta ylös on positiivinen, joten $G - N = 0$ eli $N = G$.

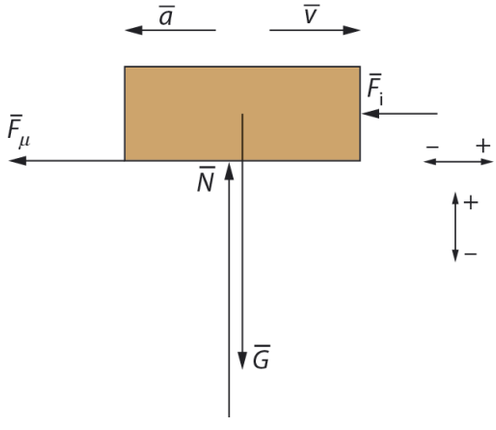
Työ-energiaperiaate saa muodon

$\Delta E_\mathrm{k} = -F_\mu \cdot \Delta x = -\mu N \cdot \Delta x = -\mu G \cdot \Delta x$. Koska auto pysähtyy on, liike-energia lopussa on nolla, joten $0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\mu mg\Delta x$. Auton jarrutusmatkaksi saadaan

$$\Delta x = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\mu mg} = \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{\left(\frac{65}{3{,}6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2 \cdot 0{,}60 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \approx 28\ \mathrm{m}.$$

Huomataan, että jarrutusmatka ei riipu auton massasta, joten vastaus on sama molemmille autoille.

b)



Jos ilmanvastus otetaan huomioon, työperiaate saa muodon $\Delta E_\mathrm{k} = -F_\mu \cdot \Delta x - W_\mathrm{i}$, jossa W_i on ilmanvastuksen tekemä työ. Työperiaate saa kohdan a perusteella muodon $0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\mu mg\Delta x - W_\mathrm{i}$, josta ratkaistaan jarrutusmatka:

$$\mu mg\Delta x = \frac{1}{2}mv^2 - W_\mathrm{i},$$

$$\Delta x = \frac{\frac{1}{2}mv^2 - W_\mathrm{i}}{\mu mg} = \frac{v^2}{2\mu g} - \frac{W_\mathrm{i}}{\mu mg}.$$

Ilmanvastuksen suuruuteen vaikuttavat ilman tiheys, auton muoto, pinta-ala ja nopeus. Ne ovat molemmille autoille samat, joten ilmanvastuksen tekemä työ on yhtä suuri molemmille autoille. Jarrutusmatkaan vaikuttavista suureista vain massa on autoille eri suuri. Mitä suurempi massa on, sitä pienempi on lauseke $\frac{W_\mathrm{i}}{\mu mg}$ ja sitä vähemmän termi $-\frac{W_\mathrm{i}}{\mu mg}$ lyhentää kohdassa a laskettua jarrutusmatkaa. Lastatun auton jarrutusmatka on pitempi.

12-8. Täydennetään taulukkoon vaunujen liike-energiat $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$.

m (kg)	0,1561	0,2287	0,3043	0,3803	0,4563
v (m/s)	2,475	2,041	1,767	1,582	1,529
E_k (J)	0,478105	0,476346	0,475056	0,475893	0,533378

Taulukosta päätellään, että 0,4563 kg:n massaisen vaunun tapauksessa nopeuden mittaus ei ole luotettava, koska saatu liike-energian arvo poikkeaa muista tapauksista selvästi. Määritetään liike-energia muista mittausarvoista keskiarvona. Saadaan $E_\mathrm{k} = 0{,}47635\ \mathrm{J} \approx 0{,}4764\ \mathrm{J}$. Työperiaatteen mukaan voiman tekemä työ on yhtä suuri kuin kappaleen liike-energian muutos, joten kuminauhan vaunuihin tekemä työ on $W = 0{,}4764\ \mathrm{J}$.

12-9. Työperiaatteen mukaan tikan liike-energian muutos on sama kuin sen voiman tekemä työ, jonka taulu kohdistaa tikkaan tikan tunkeutuessa siihen. Koska tikan nopeus lopussa on nolla, saadaan yhtälö

$0 - \frac{1}{2}mv^2 = F \cdot s$, josta saadaan

$$F = -\frac{mv^2}{2s} = -\frac{0{,}025\ \text{kg} \cdot (7{,}0\ \text{m/s})^2}{2 \cdot 0{,}005\ \text{m}} \approx -120\ \text{N}.$$

Voiman suuruus on 120 N, tikan lentosuuntaa vastaan.

12-10. **a)**

* Koska $P \sim v^3$, nopeuden kasvaminen 3 tekijällä kasvattaa tehoa tekijällä $3^3 = 27$.

* Koska $P \sim r^2$, lavan pituuden r kasvattaminen tekijällä 3 kasvattaa tehoa tekijällä $3^2 = 9$.

* Koska $P \sim r^2\ v^3$, lavan pituuden ja tuulen nopeuden kolminkertaistuessa teho kasvaa tekijällä $3^2 \cdot 3^3 = 243$.

b) Teho on

$$P = \frac{1}{2}\eta\rho\pi r^2 v^3 = \frac{1}{2} 0{,}29 \cdot 1{,}293\ \text{kg/m}^3 \cdot \pi \cdot (25\ \text{m})^2 \cdot (5{,}2\ \text{m/s})^3 \approx 52\ \text{kW}.$$

Arvoisa lukija,

tämä on tärkein teokseni. Julkaisin sen vuonna 1686. Tuohon aikaan tieteen kieli oli latina, siksi en kirjoittanut kirjaa äidinkielelläni.

Tässä kirjassa esittelen voimiin liittyvät kolme lakia. Oivalsin ne pohtiessani painovoiman ja muiden voimien luonnetta. Niiden sanotaan yhä teidän aikanannekin olevan tärkeitä kappaleeseen vaikuttavien voimien ja voimien aiheuttaman liikkeen ymmärtämisessä.

Toivon sinulle mitä parhainta lukukokemusta teokseni parissa. Voit jatkaa Newtonin lakien pohtimista monenlaisten tilanteiden mallintamisessa tälläkin kurssilla.

Menestystä ja innostusta sinulle, aloitteleva fyysikko!

ystävällisesti
Sir Isaac Newton